



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

IV.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE;

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME QUATRIÈME.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET V^{or} DALMONT, ÉDITEURS

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n°s 39 et 41.

—

1845.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION

du problème proposé au concours général de 1844, pour la classe de mathématiques élémentaires,

PAR J. HOUBIGANT (1er prix),
élève du Collége royal de Louis-le-Grand (Division de *M. Vieille*).

Par un point O (*fig.* 1), donné sur un diamètre AB, on mène à la circonférence une sécante OMM′; démontrer qu'en joignant les points d'intersection M et M′ avec le centre C, le produit

$$\tang \frac{MCA}{2} \tang \frac{M'CA}{2},$$

est constant pour toutes les sécantes menées du point O à la circonférence.

Si nous joignons MB, M′B, on sait que l'angle $MBA = \frac{MCA}{2}$, et l'angle $M'BA = \frac{M'CA}{2}$. La question est ramenée à faire voir que le produit

$$\tang MBA \tang M'BA$$

est constant.

Joignons MA, M'A; dans les triangles rectangles BMA, BM'A, une proposition connue donne :

$$\text{tang MBA} = \frac{AM}{BM}, \quad \text{tang M'BA} = \frac{AM'}{BM'};$$

donc
$$\text{tang MBA tang M'BA} = \frac{AM.AM'}{BM.BM'}.$$

Les angles MAM', MBM' étant égaux, comme inscrits dans un même segment, les aires des triangles MAM', MBM', sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces angles; donc

$$\frac{AM.AM'}{BM.BM'} = \frac{AMM'}{BMM'}.$$

Or les mêmes triangles ont une base commune MM'; leurs aires sont aussi entre elles comme leurs hauteurs AP, BP';

donc $\frac{AMM'}{BMM'} = \frac{AP}{BP'}$, et par suite

$$\frac{AM.AM'}{BM.BM'} = \frac{AP}{BP'}.$$

Enfin, ce rapport $\frac{AP}{BP'}$ peut se changer en celui-ci $\frac{OA}{OB}$, à cause de la similitude des triangles OAP, OBP'. On a donc :

$$(1) \qquad \text{tang MBA tang M'BA} = \frac{OA}{OB},$$

rapport indépendant de la direction de la sécante, et qui, par conséquent, sera constant pour toute sécante menée du point O à la circonférence.

Discussion. L'égalité (1), vraie pour toute sécante, le sera encore à la limite, quand celle-ci deviendra tangente; alors les deux angles M'CA, MCA se confondent (*fig.* 2), et on a :

$$\overline{\text{tang}}^2\,\text{MBA} = \frac{OA}{OB};$$

il est facile de démontrer cette égalité directement.

Dans le triangle rectangle BMA on a :

$$\text{tang}\,MBA = \frac{AM}{BM}$$

donc

$$\text{tang}^2 MBA = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2}.$$

Ces carrés étant dans le rapport de leurs projections AI et IB sur l'hypoténuse, on aura :

$$\text{tang}^2 MBA = \frac{AI}{IB}.$$

Mais le triangle rectangle CMO donne :

$$OC : CM :: CM : CI,$$

proportion qui, d'après une propriété connue, devient :

$$OC + CM : OC - CM :: CM + CI : CM - CI,$$

ou bien

$$OC + CB : OC - CA :: CB + CI : CA - CI,$$

ou enfin

$$OB : OA :: IB : AI,$$

donc

$$\text{tang}^2 MBA = \frac{AI}{IB} = \frac{OA}{OB}; \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. Les points I et O, qui jouissent de la propriété que leurs distances respectives à deux autres points A et B sont dans le même rapport, ont reçu le nom de points conjugués harmoniques, et la ligne AB est dite divisée harmoniquement aux points I et O.

Un autre cas, limite, à examiner serait celui où la sécante se confond avec le diamètre ; mais alors l'un des angles devient nul, l'autre devient droit ; et le produit proposé prend la forme indéterminée $0 \times \infty$; on peut encore dire qu'il est égal à $\frac{OA}{OB}$.

Lorsque le point O au lieu d'être extérieur au cercle est intérieur (*fig* 3), l'égalité (1) est encore vraie. La démonstration est absolument la même que celle que nous avons donnée pour le cas du point extérieur, seulement pour passer du rapport $\frac{AM.AM'}{BM.BM'}$ à celui des aires $\frac{AMM'}{BMM'}$, on ne s'appuie pas sur ce que les angles MAM' et MBM' sont égaux, mais sur ce qu'ils sont supplémentaires; dans ce cas le théorème qui a servi est encore vrai.

Dans le cas particulier où MM' est perpendiculaire au diamètre (*fig*. 4), les angles MBA, M'BA sont égaux, alors

$$\text{tang MBA tang M'BA} = \text{tang}^2 \text{MBA} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{OA}{OB}.$$

Enfin si le point O se confond avec le centre C (*fig*. 5), le rapport $\frac{OA}{OB}$ devient l'unité; il faut que, pour toute direction de la sécante, le produit tang MBA tang M'BA $= 1$.

En effet, comme AM=BM', et AM'=BM, le rapport $\frac{AMM'}{BMM'}$, est évidemment l'unité, puisque le numérateur est égal au dénominateur.

Mais on peut dire plus simplement, que M'BA étant le complément de MBA, tang M'BA = cot MBA, donc

$$\text{tang MBA tang M'BA} = \text{tang MBA cot MBA},$$

et on sait que

$$\text{tang MBA cot MBA} = 1.$$

NOTE

sur les équations d'équilibre entre des forces quelconques, appliquées aux différents points d'un corps solide libre.

PAR M. LAURENT,
ancien élève de l'École normale.

—

Soient P, P′, P″,... les forces appliquées, et sous l'influence desquelles le corps est supposé en équilibre ; représentons par (xyz), $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$... les coordonnées de leurs points d'application respectifs, et par $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$... les angles de leurs directions avec des parallèles aux axes rectangulaires des X, des Y et des Z.

Considérons la force P, et désignons par u, v, w les coordonnées courantes de la droite, suivant laquelle elle agit ; on aura pour les équations de sa direction :

$$\frac{u-x}{\cos\alpha}=\frac{v-y}{\cos\beta}=\frac{w-z}{\cos\gamma}.$$

Prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre avec le plan XY, et les coordonnées du point d'intersection données par les équations précédentes sont

$$u=x-z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad v=y-z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\quad w=0.$$

Supposons la force P transportée à ce point de sa direction et décomposons-la en trois suivant des parallèles aux axes des X, des Y et des Z ; ces composantes seront respectivement

$$P\cos\alpha,\qquad P\cos\beta,\qquad P\cos\gamma:$$

laissons la force $P\cos\gamma$, perpendiculaire au plan XY, appliquée en ce point ; la résultante des deux autres forces $P\cos\alpha$ et $P\cos\beta$ comprises dans ce plan, est dirigée suivant la droite

$$\frac{u-x}{\cos\alpha}=\frac{v-y}{\cos\beta},$$

laquelle prolongée jusqu'à l'axe des X, vient le couper au point

$$u=x-y\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Supposons encore cette résultante transportée en ce point, et décomposons-la en deux autres, égales aux précédentes : $P\cos\alpha$ dirigée suivant l'axe des X, et $P\cos\beta$ perpendiculaire au même axe.

D'après ce qui précède, la force P se trouve remplacée par trois autres, savoir : $P\cos\alpha$ dirigée suivant l'axe des X ; $P\cos\beta$ située dans le plan XY perpendiculaire à l'axe des X, et appliquée au point $u=x-y\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; enfin $P\cos\gamma$ perpendiculaire au plan XY, appliquée au point dont les coordonnées sont

$$u=x-z\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad v=y-z\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

La force P' pourrait également être remplacée par trois autres analogues appliquées aux deux points que l'on détermine de la même manière, et qu'il suffit de distinguer des précédents par l'accentuation. Et ainsi des autres.

De sorte que le système des forces données se trouve transformé en trois groupes de forces : 1° des forces dirigées suivant l'axe des X ; 2° un ensemble de forces parallèles, comprises dans le plan XY et perpendiculaire à l'axe des X ; 3° enfin des forces perpendiculaires au plan XY.

Mais pour que l'équilibre puisse subsister, il faut qu'il y ait équilibre dans chacun de ces groupes séparément, sans

quoi, en fixant dans le plan XY une droite arbitraire, les forces perpendiculaires à ce plan romperaient l'équilibre, si elles ne se détruisaient mutuellement; de même, si on fixe un point de l'axe des X, les forces perpendiculaires à cet axe doivent se faire équilibre pour ne pas faire mouvoir le corps dans leur plan autour du point fixe.

Or, pour qu'il y ait équilibre entre les forces dirigées suivant l'axe des X, la seule condition est que :

(1) $P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0$;

pour l'équilibre des forces perpendiculaires à l'axe des X, il faut d'après les conditions d'équilibre entre des forces parallèles comprises dans un même plan :

(2) $P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0$,

et

$$P\cos\beta\left(x - y\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) + P'\cos\beta'\left(x' - y'\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right) + \ldots = 0;$$

cette dernière se transforme facilement en

(3) $P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = 0.$

Enfin pour l'équilibre des forces parallèles perpendiculaires au plan XY, il faut les trois conditions suivantes :

(4) $P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0$,

$$P\cos\gamma\left(x - z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) + P'\cos\gamma'\left(x' - z'\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}\right) + \ldots = 0,$$

$$P\cos\gamma\left(y - z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) + P'\cos\gamma'\left(y' - z'\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}\right) + \ldots = 0;$$

ces deux dernières se réduisent à

(5) $P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \ldots = 0$,

(6) $P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots = 0.$

Telles sont les six équations générales d'équilibre d'un système de forces quelconques; et si l'on représente respective-

ment par X, Y, Z, les premiers membres des équations (1), (2), (4) et par L, M, N, ceux des équations (3), (5) et (6), ces équations deviendront :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Généralisation des formules précédentes.

Il nous reste maintenant à démontrer que les formules trouvées précédemment pour conditions d'équilibre sont générales, qu'elles conviennent à toutes les directions des forces, et qu'il suffit d'y substituer pour $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$,... les valeurs qui conviennent à la direction de chacune.

Examinons un seul cas, qui comprend tous ceux pour lesquels la décomposition précédente pourrait offrir quelque difficulté, celui où l'une des forces P_i par exemple, serait parallèle à l'axe des X.

Soit $x_i y_i z_i$, les coordonnées de son point d'application, on aura pour équations de sa direction :

$$v = y_i, \quad w = z_i;$$

au même point, appliquons deux forces m et $-m$ égales directement opposées et perpendiculaires au plan XY, puis prolongeons la direction de $-m$ jusqu'au plan XY au point dont les coordonnées sont $u = x_i$, $v = y_i$, cette force fera partie de celles perpendiculaires au plan XY. La résultante des deux forces m et P sera dirigée suivant la droite

$$\frac{u - u_i}{P_i} = \frac{w - z^i}{m}, \quad v = y_i,$$

et cette résultante ira rencontrer le plan XY au point

$$u = x_i - z_i \frac{P_i}{m}, \quad v = y_i,$$

auquel on pourra la supposer appliquée. Ici décomposons-la avec ses deux éléments P_i et m, la première parallèle à l'axe des X, et la seconde fera partie, comme $-m$, du groupe perpendiculaire au plan XY.

Or dans les conditions d'équilibre de ces forces parallèles, l'équation $Z=0$ contiendra $m-m$, qui est identiquement nul.

L'équation $M=0$ renfermera le groupe

$-mx_i+m\left(x_i-z_i\frac{P_i}{m}\right)$, qui se réduit à $-P_i z_i$.

Enfin l'équation $N=0$, aura les deux termes $my_i - my_i$ qui se détruisent immédiatement. De sorte que ces trois équations se composent avec la force P_i précisément comme si dans les équations générales, on avait fait $\alpha_i=0$, $\beta_i=90°$ et $\gamma = 90°$ savoir :

$$P_i \cos\gamma_i = 0 \quad \text{dans} \quad Z=0,$$
$$P_i(x_i\cos\gamma_i - z_i\cos\alpha_i) = -P_i z_i \quad \text{dans} \quad M=0,$$
$$P_i(y_i\cos\gamma_i - z_i\cos\beta_i) = 0 \quad \text{dans} \quad N=0.$$

Occupons-nous maintenant de la force P_i comprise dans le plan XY, et parallèle à l'axe des X. On a pour équation de sa direction $v=y_i$.

Au point $u=x_i$ de la droite suivant laquelle elle agit, appliquons deux forces u et $-u$ égales, directement opposées et perpendiculaires à l'axe des X; prolongeons $-u$ jusqu'à cet axe, et là elle fera partie du groupe des forces parallèles qui lui sont perpendiculaires.

La résultante des deux forces P_i et n sera dirigée suivant la droite

$$\frac{u-x_i}{P_i}=\frac{v-y_i}{n},$$

et rencontrera l'axe des X au point $u=x_i-y_i\frac{P_i}{n}$, et si

çant dans l'équation y par $ax+b$, on obtient (prob. 2, LVIII),

$$X=-\frac{a'_m b + a_{m-1}}{ma_m},\quad Y=aX+b=\frac{mba_m - a'_m ab - a.a_{m-1}}{ma_m};$$

éliminant b entre ces deux équations, et remplaçant X et Y par x et y, on obtient :

$$x(aa'_m - ma_m) - a'_m y = a_{m-1}. \qquad (35)$$

équation de la droite des moyennes distances.

Applications; Lignes du second ordre.

$$P_2 = Ay^2 + Bxy + Cx^2;\quad P_1 = Dy + Ex,\quad P_{(0)} = F,$$

$$a_2 = Aa^2 + Ba + C;\ a_1 = Da + E;\ a'_2 = 2Aa + B;\ a'_1 = D;$$

l'équation (34) devient :

$$x^2(Aa^2+Ba+C)+x[2Aab+Bb+Da+E]+Ab^2+Db+F=0;$$

l'équation (35) devient :

$$a(2Ay+Bx+D)+2Cx+By+E=0.$$

Lignes du troisième ordre.

$$P_3 = Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3;\ P_2 = Ey^2 + Fxy + Gx^2;$$

$$P_1 = Hy + Ix;\quad P_0 = K,$$

$$a_3 = Aa^3+Ba^2+Ca+D;\ a_2 = Ea^2+Fa+G;\ a_1 = Ha+I,$$

$$a'_3 = 3Aa^2 + 2Ba + C;\quad a'_2 = 2Ea + F,\ a'_1 = H,$$

$$a''_3 = 6Aa + 2B;\qquad a''_2 = 2E,$$

$$a'''_3 = 6A;$$

l'équation (34) devient :

$$\begin{array}{l|l|l}
(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^3+(3Aa^2+Ba+C)b & x^2+(3Aa+B)b^2 & x+Aq^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad Ea^2+Fa+G & \quad (2Ea+F)b & +Eb^2 \\
 & \qquad Ha+I & +Hb \\
 & & +K,
\end{array}$$

l'équation (35) devient :

$$a^2(3Ay+Bx+E)+a(2By+2G+F)+Cy+3Dx+G=0.$$

Corollaire. Un triangle étant une ligne du troisième degré, il est facile d'en trouver les diamètres.

Observation. Dans les coniques, la droite des moyennes distances n'est autre que la bissectrice des cordes parallèles, et c'est la définition qu'Apollonius donne du diamètre. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, « j'appelle diamètre de toute ligne courbe, située dans un même plan, une droite qui, menée d'un point de la courbe à une autre, divise en deux parties égales, toutes les droites parallèles à une certaine droite » (liv. 1, définit. 10). On voit bien que les diamètres d'Apollonius ne peuvent exister que dans les courbes planes dont l'équation peut se ramener à ne renfermer que des puissances paires d'une des coordonnées ou de toutes deux. Apollonius pose une seconde définition (définit. 13), pour les diamètres qui vont d'une courbe à une autre comme dans l'hyperbole ; et une troisième définition (déf. 15), pour des diamètres qui ne rencontrent pas la courbe, dont l'hyperbole offre aussi un exemple. Newton a donné la véritable notion du diamètre, en appliquant ce nom aux droites de moyenne distance; il ne s'en sert que pour les lignes du troisième ordre; il est évident que la dénomination est générale. Ainsi à chaque sécante répond un diamètre, qu'on peut désigner sous le nom de *diamètre conjugué à la sécante* et *vice versâ.*

Corollaire I. Si deux lignes de l'ordre m, rapportées aux mêmes axes coordonnés, ont en commun les fonctions P_m et P_{m-1}, elles ont le même système de diamètre. Il suffit donc d'étudier les diamètres dans la courbe donnée par l'équation $P_m + P_{m-1} = 0$.

Corollaire II. Si P_{m-1} manque dans l'équation, a_{m-1} est nul, et dans ce cas tous les diamètres passent par un même

point, qui est l'origine. L'enveloppe des diamètres est alors un point auquel Newton a donné le nom de *centre général*, et il appelle simplement *centre* la rencontre de deux diamètres quelconques.

Corollaire III. S'il existe un centre général, en y transportant l'origine, la fonction P_{m-1} disparaît de l'équation. Ainsi, pour découvrir si une courbe donnée par une équation a un centre général, on changera l'origine en conservant la direction des axes, ce qui introduit deux indéterminées. Si, par des valeurs réelles et finies, données à ces indéterminées, on peut faire disparaître les m coefficients de la fonction P_{m-1}, la nouvelle origine est le centre général; mais si l'une de ces valeurs, ou toutes les deux sont infinies, le centre général est à l'infini, et on ne peut faire disparaître la fonction P_{m-1}.

Applications. Courbes du second degré. Même équation que ci-dessus; soient p et q les coordonnées de la nouvelle origine, il vient :

$$P_1 = y(2Aq + Bp + D) + x(2Cp + Bq + E);$$

égalant à zéro les coefficients de y et de x, on en tire les valeurs connues des coordonnées du centre général, mais qui deviennent infinies lorsque $B^2 - 4AC = 0$.

2° *Courbes du troisième degré.* Équation comme ci-dessus; p et q coordonnés de la nouvelle origine, il vient :

$$P_2 = y^2(3Aq+Bp+E) + xy(2Bq+2Cp+F) + x^2(3Dp+Cq+G);$$

égalant à zéro les deux coefficients de y^2 et de x^2, il vient :

$$p = \frac{CE - 3AG}{9AD - BC},$$

$$q = \frac{BG - 3DE}{9AD - BC}.$$

Ainsi pour que xy disparaisse, il faut qu'on ait l'équation de condition

$$2G(B^2-3AC)+2E(C^2-3BD)+F(9AD-BC)=0,$$
(Voir Euler, introd., t. II, p. 345).

Si l'on avait d'abord fait disparaître les coefficients de y^3 et de xy, on aurait trouvé :

$$p=\frac{3AF-2BE}{2(B^2-3AC)},\quad q=\frac{2CE-BF}{2(B^2-3AC)}.$$

Mais, en vertu de l'équation de condition, les deux valeurs de p sont égales ; il en est de même des valeurs de q ; de sorte que l'équation de condition peut se mettre sous ces six formes :

$$2(B^2-3AC)\ (CE-3AG)=(9AD-BC)(3AF-2BE),$$
$$2(B^2-3AC)\ (BG-3DE)=(9AD-BC)(2CE-BF),$$
$$2(C^2-3BD)\ (CE-3AG)=(9AD-BC)(2BG-CF),$$
$$2(C^2-3BD)\ (BG-3DE)=(9AD-BC)(3DF-2CG),$$
$$(B^2-3AC)(2BG-CF)=(C^2-3BD)(3AF-2BE),$$
$$(B^2-3AC)(3DF-2CG)=(C^2-3BD)(2CE-BF).$$

Si $B^2-3AC=0$, il faut qu'on ait ou $9AD-BC=0$, ou $3AG-2BE=0$; dans le premier cas, le centre général est à l'infini ; dans le second cas, on a $p=\frac{0}{0}$; il existe alors une infinité de centres généraux, tous distribués sur des droites : ainsi que nous le dirons plus loin, ce qui est intuitif lorsque la courbe se réduit à trois droites parallèles.

Corollaire. Le coefficient angulaire du diamètre est $\frac{aa'-ma_m}{a'_m}$; celui de la sécante est a ; on connaît donc la tangente de l'angle de ces deux droites : lorsque cet angle est droit, le diamètre prend le nom d'*axe* ; la tangente de l'angle que fait un axe avec la sécante conjuguée étant infinie, si les coordonnées sont aussi à angle droit, on a pour équation $a^m(a^2+1)-maa_m=0$. Équation du degré m ; ainsi toute ligne du degré m a au plus m axes.

Application aux lignes du troisième degré. On trouve toute réduction faite :

$$Ba^3 + [2C - 3A]a^2 + [3D - 2B]a - C = 0.$$

LXI. *Problème.* Quelles sont les courbes algébriques dont tous les diamètres sont parallèles?

Solution. Le coefficient angulaire doit donc être égal à une quantité constante que nous représentons par k; d'où l'on tire $\frac{a'_m}{a_m} = \frac{m}{a-k}$; remontant aux fonctions primitives, il vient $\log a_m = m \log(a-k) + \log f$, où f représente la constante arbitraire, aussi $a_m = f(a-k)^m$ et $P_m = f(y-kx)^m$; en vérifiant, on trouve qu'en effet le coefficient angulaire des diamètres est constamment égal à k; faisant $m=2$, on a la parabole ordinaire; et, quelle que soit la valeur de m, nous verrons que toutes ces courbes sont du genre dit paraboliques.

Corollaire. Si l'on a $P_m = f(y-kx)^m$. et $P_{m-1} = 0$, la courbe n'a qu'un seul diamètre; savoir $y = kx$.

LXII. *Problème.* Une ligne de l'ordre m étant donnée par une équation, et connaissant le coefficient angulaire d'un diamètre, construire ce diamètre et une sécante conjuguée.

Solution. Regardant a comme l'inconnue dans l'expression du coefficient angulaire du diamètre, on a une équation du degré $m-1$, et a est le coefficient angulaire de la sécante conjuguée; on exclut le cas où tous les diamètres sont parallèles.

Corollaire. Ainsi une ligne de l'ordre m, ne peut avoir que $m-1$ diamètres de même direction.

LXIII. *Problème.* Étant données une ligne par son équation et une droite $y = rx + s$, dans le plan de la ligne; quelle relation doit exister entre r et s, pour que cette droite soit un diamètre ?

Solution. On a $r = \frac{aa_1^m - ma_m}{a'_m}$, $s = -\frac{a_{m-1}}{a'_m}$; éliminant a entre ces deux équations, on obtient la relation cherchée qui ne peut dépasser le degré $(m-1)^2$.

Application. $m=2$; on trouve pour relation :

$$s(B^2 - 4AC) + r(2AE - BD) = 2CD - BE.$$

LXIV. Théorie des *diamètres conjugués*.

Soit $\quad Aa_m = A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots A_m,$

$$a_{m-1} = B_0a^{m-1} + B_1a^{m-2} + B_2a^{m-3} + \ldots B_{m-1}.$$

Soit a' le coefficient angulaire du diamètre conjugué au diamètre $y = ax' + b'$, on aura d'après ce qui précède :

$$\left.\begin{array}{l} a'[mA_0a^{m-1} + (m-1)A_1a^{m-2} + \ldots A_{m-1}] + \\ \quad + A_1a^{m-1} + 2A_2a^{m-2} + \ldots mA_m = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Si le diamètre $y = ax + b$ doit aussi être conjugué au diamètre $y' = ax' + b'$, l'on doit avoir :

$$\left.\begin{array}{l} a[mA_0a'^{m-1} + (m-1)A_1a'^{m-1} + \ldots A_{m-1}] + \\ \quad + A_1a'^{m-1} + A_2a'^{m-2} + \ldots mA_m = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

soustrayant (2) de (1), et divisant par $a - a'$, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} mA_0a'a[a^{m-3} + a'^{m-3} + aa'(a^{m-5} + a'^{m-5}) + a^2a'^2(a^{m-7} + a'^{m-7}) + \ldots] \\ +(m-1)A_1aa'[a^{m-4} + a'^{m-4} + aa'(a^{m-6} + a'^{m-6}) + a^2a'^2(a^{m-8} + a'^{m-8}) + \ldots] \\ \quad \vdots \\ +(m-1)A_{m-1} = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Faisons $aa' = u$, $a + a' = v$; a et a' seront racines de l'équation $t^2 - ut + v = 0$, et d'après la théorie des fonctions symétriques, on sait que $a^k + a'^k$ sont des fonctions de degré k, de u et de v; donc l'équation (3) est au plus du degré $m-2$, des mêmes variables u et v, multipliant l'équation (1) par a'^{m-1} et l'équation (2) par a^{m-1} et ajoutant, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} (m-1)A_1a'^{m-2}a^{m-2}(a'-a) + (m-2)A_2a'^{m-3}a^{m-3}(a'^2 - a^2) + \\ \quad + (m-3)A_3a'^{m-4}a^{m-4}(a'^3 - a^3) + \text{etc.} = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Divisant par $a' - a$, on démontre comme pour l'équation (3) qu'elle s'élève au plus au degré $m-2$, en fonction de u et v; ces deux variables dépendent donc de deux équations chacune de degré $m-2$ au plus; on a donc ce théorème.

Théorème. Une courbe algébrique de degré m ne saurait avoir plus de $(m-2)^2$ systèmes de diamètres conjugués, m étant plus grand que deux.

1. *Application.* $m=2$; l'équation (1) devient :

$$2A_0aa' + A_1(a+a') + 2A = 0.$$

Équation symétrique en a et a'; elle se confond alors avec l'équation (2); a reste indéterminé et il existe une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

2. $m=3$,

$$3Aa^2a' + 2Baa' + Ca' + Ba^2 + 2Ca + 3D = 0, \qquad (1)$$

même notation que ci-dessus,

$$3Aa'^2a + 2Baa' + Ca + Ba'^2 + 2Ca' + 3D = 0, \qquad (2)$$

$$3Aaa' + B(a+a') + C = 0. \qquad (3)$$

Prenant la valeur de a' dans (3), et substituant dans (1), il vient, toute réduction faite :

$$a^2[3AC - B^2] + a(9AD - BC) + 3BD - C^2 = 0;$$

les deux racines de cette équation sont les coefficients angulaires du système unique des diamètres conjugués; les deux diamètres conjugués ont pour équation

$$y(3Aa^2 + 2Ba + C) + x(Ba^2 + 2Ca + 3D) = -Ea^2 - Fa - G,$$

$$y(3Aa'^2 + 2Ba' + C) + x(Ba'^2 + 2Ca' + 3D) = -Ea'^2 - Fa' - G,$$

d'où

$$x = \frac{aa'[3AF - 2BE] + (a+a')[3AG - CE] + 2BG - CF}{2aa'(3AC - B^2) + (a+a')(9AD - BC) + 2(3BD - C^2)} = \frac{P}{Q},$$

ou

$$aa' = \frac{3BD - C^2}{3AC - B^2}; \quad a + a' = \frac{BC - 9AD}{3AC - B^2};$$

substituant ces valeurs, on a

$$Q = 4[3AC - B^2][3BD - C^2] - (9AD - BC)^2.$$

Si $Q > 0$, a et a' sont imaginaires; mais l'intersection des diamètres est toujours réelle. Dans ce même cas les trois racines de l'équation $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$ sont réelles (*V.* t. III, p. 164), et réciproquement lorsque les racines de cette équation sont réelles, la courbe n'a pas de diamètres conjugués. Si $Q = 0$, deux ou trois racines de cette équation sont égales, et l'intersection des diamètres est à l'infini, les diamètres deviennent des asymptotes situées à l'infini ; lorsque les trois racines sont égales, tous les diamètres sont parallèles, voir ci-dessus (LXI).

Le carré de la tangente de l'angle des deux diamètres conjugués

$$-\frac{-Q}{3AC - B^2} = \frac{-Q}{[B^2 - 3AC + C^2 - 3BD + (9AD - BC)\cos\gamma]^2},$$

γ étant l'angle des axes.

Lorsque les diamètres conjugués existent, en les prenant pour axes, il est évident que tout ce qui multiplie y^2 et x^2 disparaît, et l'équation se réduit à cette forme :

$$Ay^3 + Dx^3 + Fxy + Hy + Ex + F = 0.$$

Exemple : $y^2x - mx^2y - nxy = 0$; équation du système de trois droites, on a $A = 0$, $B = 1$, $C = -m$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -n$, $G = 0$.

L'équation aux diamètres conjugués se réduit à $a^2 - ma + m^2 = 0$; ainsi les diamètres conjugués n'existent pas ;

$$x = -\frac{n}{3m}.$$

On trouverait de même $y = +\frac{n}{3}$; ainsi le point réel d'intersection est le centre de gravité de l'aire du triangle.

LXV. Théorie des *enveloppes diamétrales*.

Problème. Trouver l'enveloppe des diamètres d'une ligne de degré m?

Solution. On a pour l'équation d'un diamètre l'équation (35), (LIX); prenant la dérivée par rapport à a, il vient $x[(1-m)a'_m - aa''_m] - a''_m y = a''_{m-1}$; a étant connu, on a ainsi deux équations du premier degré entre x et y; on peut donc déterminer pour chaque valeur de a, les coordonnées du point où le diamètre touche son enveloppe; et si l'on élimine a, on obtient l'équation de l'enveloppe des diamètres; or l'équation (35) est du premier degré en x et y, et de degré $m-1$ en a; sa dérivée aussi du premier degré en x et y est de degré $m-2$; le degré de l'enveloppe ne peut dépasser $(m-1)(m-2)$.

Observation. L'enveloppe n'admet que $m-1$ tangentes parallèles (coroll. LXI), donc la *polaire réciproque* de l'enveloppe diamétrale est au plus du degré $m-1$; comme nous le verrons dans la théorie de ces polaires, le plus important progrès que la géométrie doit à M. Poncelet; ainsi dans les lignes du second degré, la polaire réciproque de l'enveloppe est une droite; donc l'enveloppe diamétrale est un point; ce qui est évident. — Tm.

NOTE

sur la discussion de l'équation générale du deuxième degré à deux inconnues.

PAR M. ALFRED RODRIGUES.

—

1. Soit

(1) $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation d'une courbe dite du deuxième degré, si x et y

sont les coordonnées rectilignes d'un point dont l'angle est G.

2. Si je suppose que (x', y') soit un point de la courbe, l'équation (1) pourra être mise sous la forme (2) :

$$(2)\quad \begin{cases} [2A(y+y')+B(x+x')+2D](y-y')+ \\ +[B(y+y')+2C(x+x')+2E](x+x')=0. \end{cases}$$

3. $y-y'=m(x-x')$ est l'équation d'une droite passant par le point (x', y'), elle peut représenter à volonté ou des cordes parallèles ou des sécantes à la courbe en (x', y'), suivant que l'on supposera m ou y', x' constants.

4. Soit m constant, l'équation (2), en y faisant entrer m, deviendra celle du lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction m.

$$(3)\qquad (2Ay+Bx+D)m+By+2Cx+E=0,$$

d'où l'on conclut que ce lieu est une droite dont le coefficient angulaire m' est tel que

$$(4)\qquad 2Amm'+B(m+m')+2C=0,$$

ou que

$$(2Am+B)(2Am'+B)=B^2-4AC,$$

ce qui permet de distinguer les trois espèces des courbes du deuxième degré par leurs différences caractéristiques.

Si $B^2-4AC<0$, m n'est jamais égal à m', et il y a une infinité de diamètres conjugués,

$B^2-4AC=0$, quel que soit m, $\quad m'=-\dfrac{B}{2A}$,

$B^2-4AC>0$, m est égal à m' pour les valeurs

$\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4HC}}{2A}$, et il y a une infinité de diamètres conjugués.

5. Une autre conséquence de la forme de l'équation (3), c'est que toutes les courbes, dont les équations ne diffèrent que par le terme F, ont les mêmes diamètres. On en dé-

duira une construction très-facile, pour une courbe du deuxième degré, étant donnés un de ses points et une courbe de même espèce, et dont l'équation ne différerait de la sienne que par le terme tout connu.

6. Supposons maintenant que (x', y') soit fixe et que m varie, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$y = m'x + k, \tag{5}$$

où k est une fonction du premier degré de (x', y'), et est par conséquent déterminée pour ce point (x', y''). La droite, que cette équation représente devra contenir le deuxième point d'intersection de la sécante passant par (x', y'), si cela arrive. Or il est évident qu'il y aura un point d'intersection tant que m ne sera pas égal à m', ou tant que l'on n'aura pas

$$Am^2 + Bm + C = 0, \tag{6}$$

équation qui n'est possible que si $B^2 - 4AC =$ ou > 0.

7. L'équation (6) démontre donc ce que l'équation (4) nous avait fait pressentir en passant aux limites, c'est que dans les courbes où $B^2 - 4AC = 0$, il y a un système de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un seul point, et dont, par conséquent, le diamètre conjugué est parallèle à leur direction, et que dans celles où $B^2 - 4AC > 0$, il existe deux systèmes de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un point; ces considérations permettent de ranger les courbes du deuxième degré en courbes fermées, pouvant se réduire à une portion de droite $B - 4AC < 0$, courbes à deux branches infinies, $B^2 - 4AC = 0$, et enfin les courbes à quatre branches infinies, pouvant se réduire à deux droites $B^2 - 4AC > 0$, et, dans ce dernier cas, il est toujours facile d'obtenir deux droites ayant les mêmes diamètres que la courbe proposée

8. L'équation (2) nous donne directement les coordonnées

d'un point, tel que toute corde y passant, y soit divisée en deux parties égales. En effet, si l'on désigne par (a, b) les coordonnées d'un point O tel que

$$(7)\quad \begin{cases} 2Ab + Ba + D = 0, \\ Bb + 2Ca + E = 0. \end{cases}$$

En effet si $\frac{y+y'}{2} = b$, $\frac{x+x'}{2} = a$, le point O est le centre de la courbe. Les équations (7) sont compatibles pour $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}$, d'une infinité de manières, et incompatibles pour $B^2 - 4AC = 0$, $2AE - BD \lessgtr 0$, on en voit aisément la raison.

9. On conclut facilement de l'équation (2) quelles sont les courbes du deuxième degré, où le centre est un point de la courbe, car, si l'on considère, une transformation très-simple change cette équation en celle-ci :

$$(8)\quad A(y-b)^2 + B(y-b)(x-a) + C(x-a)^2 = 0;$$

cette équation peut se décomposer en deux autres du premier, la courbe est donc un système de deux droites qui se rencontrent au point (b, a), ou une seule droite, si $B^2 - 4AC = 0$, et même un point si $B^2 - 4AC < 0$.

10. Dans le cas où $B^2 - 4AC > 0$, l'équation (8) représente en général les deux droites dont le système est une courbe concentrique et semblable à la courbe proposée, et dont l'équation est (2) ou (1).

11. Toutes les courbes du deuxième degré, ayant un centre, peuvent avoir une équation de la forme suivante :

$$(9)\quad A(y-b)^2 + B(y-b)(x-a + C(x-a)^2 = k.$$

(12) On eût pu déduire le centre de la rencontre des diamètres conjugués en partant de l'équation (3).

13. Une tangente est une corde qui ne rencontre la courbe qu'en un point, ou dont les deux points d'intersection se confondent. Soit donc (x', y') le point de tangente d'une droite, et m son coefficient angulaire, le diamètre conjugué des cordes parallèles à cette tangente, devra rencontrer la courbe au point (x', y') ; on aura donc identiquement :

$$(2Ay' + Bx' + D)\,m + By' + 2Cx' + E = 0.$$

L'équation de la tangente à la courbe au point (x', y') est donc

$$(10) \qquad y - y' = \frac{By' + 2Cx' + E}{2Hy' + Bx' + D}(x - x'),$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, symétrique par rapport à xy, $x'y'$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2Ayy' + B(xy' + x'y) + 2Cxx' + D(y + y') + \\ \qquad + E(x + x')\,AF = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit plusieurs conséquences connues sur les sécantes et les lignes de contact. Il est bon de remarquer qu'une méthode tout à fait semblable s'appliquerait parfaitement à la discussion de l'équation générale du deuxième degré à trois inconnues.

NOTE

Sur la résolution d'un système général de m *équations du premier degré entre* m *inconnues.*

PAR M. H. DE FÉRUSSAC,
élève de M. VINCENT.

—

Je prends la notation adoptée dans la discussion des équations du premier degré. Dans cette notation la lettre qui

servait à représenter les termes connus dans son système, sert dans le système suivant; de coefficient à la nouvelle inconnue introduite.

En passant d'un système à un autre, j'introduis une nouvelle inconnue et une nouvelle équation.

L'équation $ax=b$ donne $x=\frac{b}{a}=\frac{B}{A}$.

Le système $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$ résolu par le calcul, donne

$$(1)\qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{cb'-bc'}{Ab'-Ba'}=\frac{A_1}{D},$$

$$(2)\qquad y=\frac{ac'-ca'}{Ab'-Ba'}=\frac{B_1}{D}.$$

Le dénominateur de ces nouvelles valeurs s'obtient, comme on le voit, en multipliant le dénominateur de la valeur du système précédent par le coefficient de la nouvelle inconnue dans la dernière équation, et en retranchant le produit du numérateur de l'inconnue du premier système, par le coefficient correspondant à la même inconnue dans cette dernière équation.

Cette loi se vérifie de même pour un système des trois équations à trois inconnues. La dernière des équations est

$$a''x+b''y+c''z=d'',$$

et le dénominateur de la valeur de x, obtenu par le calcul, est

$$(ab'-ba')c''-(cb'-bc')a''-(ac'-ca')b'',$$

ou bien remontant aux valeurs (1) et (2),

$$Dc''-A_1a''-B_1b''.$$

En observant ce nouveau dénominateur, on voit qu'il se forme de celui du système précédent, suivant une certaine loi qui, généralement énoncée, est la suivante :

Connaissant les valeurs des inconnues d'un système de n équations à n inconnues, pour avoir le dénominateur commun des valeurs d'un système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues, on multiplie le dénominateur des valeurs du premier système, par le coefficient de la nouvelle inconnue dans la nouvelle équation. Puis on en retranche les produits respectifs des numérateurs des n inconnues du premier système par leurs coefficients, dans la dernière du nouveau système. Quant au numérateur il se forme toujours du dénominateur en remplaçant le coefficient de l'inconnue que l'on considère par le terme tout connu.

C'est cette loi qu'il s'agit de démontrer. Soit un système de n équations à n inconnues, écrit avec la notation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + p_1u = q_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + p_2u = q_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + p_3u = q_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + p_nu = q_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

J'écris maintenant le système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \ldots + p_1u = r_1 - q_1t \\ a_2x + b_2y + c_2z \ldots + p_2u = r_2 - q_2t \\ a_3x + b_3y + c_3z \ldots + p_3u = r_3 - q_3t \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_nx + b_ny + c_nz \ldots + p_nu = r_n - q_nt \\ a_{n+1}x + b^{n+1}y + c_{n+1}z \ldots + p_{n+1}u + q_{n+1}t = r_{n+1} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si la loi est vraie pour n équations, je dis qu'elle est vraie pour $(n+1)$ équations. Soient

$$\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D},\ \ldots\ \frac{P}{D},$$

les valeurs du système (1). Le dénominateur D est, d'après la loi de formation, indépendant des seconds membres des équations; les numérateurs A, B, C, etc., s'obtiennent en mettant à la place du coefficient des inconnues, les termes tout connus.

Je considère maintenant les n premières équations du système (2), et supposant les n seconds membres connus, je résous ce système ; il est clair que le dénominateur des valeurs que j'obtiendrai sera D, puisque comme je l'ai déjà observé, ce dénominateur est indépendant des termes tout connus, et que les premiers membres des deux systèmes sont identiques.

Pour avoir les numérateurs, celui de x par exemple, il me faudra dans A remplacer partout q_1, q_2, q_3, etc., par $r - q_1 t$, $r^2 - q_2 t$, $r^3 - q_3 t$, etc. Or, qu'arrivera-t-il? chaque terme de A m'en donnera deux : les premiers de la forme $A_1 r_n$ qui s'obtiendront en remplaçant dans tous les termes de A, les lettres q_1, q_2, etc., par r_1, r_2, r_3, etc. Puis, les autres de la forme $-A_1 q_n t$; et si dans ces derniers on met t en facteur commun, le résultat entre parenthèses ne sera autre chose que A dans lequel q_1, q_2, q_3, etc., au lieu de représenter les termes tout connus comme dans le premier système, représenteront les coefficients de la nouvelle inconnue. Pour indiquer que la somme des premiers termes est A dans lequel on a remplacé q, q_1, q_2, par r_1, r_2, r_3, etc., je représente cette somme par Ar_1, et le numérateur de n dans le second système sera $Ar_1 - At$. Les valeurs des inconnues seront donc de la forme :

$$x = \frac{Ar_1 - At}{D}, \; y = \frac{Br_1 - Bt}{D}, \; z = \frac{Cr_1 - Ct}{D}, \ldots \; u = \frac{Pr_1 - Pt}{D};$$

substituant dans la $(n+1)^{ième}$ équation du système (2), et chassant les dénominateurs il vient :

$$t\,(q_{n+1}\mathrm{D} - a_{n+1}\mathrm{A} - b_{n+1}\mathrm{B} - c_{n+1}\mathrm{C} - \ldots - p_{n+1}\mathrm{P}) =$$
$$= r_{n+1}\mathrm{D} - a_{n+1}\mathrm{A}r_t - b_{n+1}\,\mathrm{B}r_t - c_{n+1}\mathrm{C}r_t - \ldots - p_{n+1}\mathrm{P}r_t.$$

Le dénominateur de t sera la quantité comprise entre parenthèses. Elle est formée d'après la loi énoncée, car D est le dénominateur des valeurs du système précédent ; A, B, C, en sont les numérateurs, et entrent bien dans le dénominateur de t suivant la règle.

La loi ayant été vérifiée pour un système de trois équations est donc générale.

En examinant le numérateur de t, je vois que le terme $r_{n+1}\mathrm{D}$ se forme de $q_{n+1}\mathrm{D}$, en remplaçant q_{n+1} coefficient de t par le terme tout connu r_{n+1} ; de même le terme $a_{n+1}\mathrm{A}r$ se forme de $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}$, par la même méthode.

Car, ainsi que je l'ai observé, $\mathrm{A}r$ se forme de A en remplaçant partout q_1, q_2, etc., par les termes tout connus r_1, r_2.

De même pour tous les autres termes, donc enfin la loi énoncée est vraie.

Observation. Dans cette loi, pour avoir les valeurs d'un système, il faut avoir les valeurs des inconnues du système précédent. Cet inconvénient est en partie commun avec la loi de *Crammer*. Car dans cette loi, pour former un dénominateur, il faut nécessairement connaître le dénominateur des valeurs du système précédent ; je n'ai donc que les numérateurs en plus à obtenir. Or ils s'obtiennent par une simple écriture, sans operations à effectuer.

Ce léger inconvénient est racheté par une loi qui s'énonce plus facilement que la loi de Crammer, et dans laquelle il n'y a pas besoin d'avoir égard aux signes, non plus qu'aux accents et au rang des termes ; d'un autre côté les multiplications indiquées sont toutes d'une simplicité extrême, puisque le multiplicateur ne contient qu'une lettre. Enfin, les termes obtenus ne peuvent pas se réduire entre eux, comme il est facile de le voir.

DES RACINES INFINIES

Des équations algébriques. — Asymptotes rectilignes aux courbes que ces équations représentent (*).

—

Quelle que soit la direction d'une droite asymptote à une courbe algébrique, qu'elle soit parallèle ou non parallèle à l'axe des ordonnées, pour trouver les valeurs des coefficients qui déterminent l'équation de cette droite, on est toujours conduit à considérer des équations à deux variables auxquelles il faut satisfaire par des solutions composées d'une valeur réelle et finie pour l'une des variables, et d'une valeur infinie et *réelle* de l'autre. C'est ce que nous allons démontrer.

Parmi les différentes définitions qu'on a données d'une asymptote rectiligne, j'adopterai la suivante :

Une droite est asymptote à une courbe, lorsque la courbe se rapproche indéfiniment de cette droite à partir d'un de

(*) Plusieurs observations m'ont été communiquées au sujet de mes deux premiers articles (tome III, pages 32 et 85), sur les racines infinies des équations algébriques. Peu différentes, au fond, ces observations s'accordent parfaitement sur un point. Dans un des articles dont il s'agit, il a été dit que : la détermination des asymptotes rectilignes dépend uniquement de la résolution d'équations à deux variables, en valeurs réelles dont l'une serait infinie. C'est ce qu'on ne trouve pas suffisamment explique.

Les personnes qui ont bien voulu me faire savoir que de nouveaux développements à cet égard leur sembleraient utiles, pourront en lisant ce 3e article, reconnaître dans les détails mêmes où je suis entre, tout le prix que j'attache à leur obligeante communication.

Afin d'être mieux compris des élèves, il m'a semblé convenable de reprendre à son origine la théorie des asymptotes. Un autre motif m'a aussi déterminé à ne pas craindre de trop insister sur quelques points de cette théorie : c'est l'intention de contribuer, autant qu'il me serait possible, à rendre plus faciles, plus précises, les objections de ceux qui ne partageraient pas mon avis sur la question que j'examine. G

ses points, et peut s'en rapprocher aussi près qu'on le voudra sans jamais l'atteindre, à quelque distance que les deux lignes soient prolongées l'une et l'autre.

De cette définition il résulte que · si une courbe a une asymptote rectiligne, on pourra en prolongeant suffisamment les deux lignes, trouver sur la courbe un point dont la distance à la droite sera moindre qu'une quantité donnée, quelque petite que soit cette quantité; et si l'on continue à prolonger les deux lignes, les points successifs de la courbe, à partir du point obtenu, se rapprocheront de plus en plus de la droite.

Pour qu'une courbe ait une asymptote, il faut qu'elle ait au moins une branche qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini. Cette condition est évidemment nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

L'hyperbole du second degré a deux asymptotes rectilignes, la parabole n'en a aucune. Je cite à dessein ces exemples afin d'éviter toute espèce d'équivoque, car je sais que, dans un autre ordre d'idées, dont je n'ai pas l'intention de m'occuper, on a trouvé, en étendant la définition des asymptotes, que la parabole a aussi des asymptotes rectilignes.

En recherchant les équations des asymptotes, je suivrai exactement dans le calcul la définition de ces droites. Je supposerai d'abord qu'elles ne soient pas parallèles à l'axe des ordonnées; leurs équations seront de la forme $y=cx+d$, les coefficients c, d, ayant des valeurs finies. L'équation de la courbe sera représentée par $y=f(x)$, en supposant cette équation résolue par rapport à l'ordonnée y. L'expression $f(x)$, pourra prendre une ou plusieurs valeurs différentes pour chaque valeur attribuée à l'abscisse x.

Si la droite $y=cx+d$ est asymptote à la courbe $y=f(x)$, il faudra que, pour une valeur α de x, suffisamment grande, la différence, $cx+d-f(x)$, entre les ordonnées des deux

lignes, correspondantes à une même abscisse, devienne moindre que toute quantité déterminée δ; et si l'on donne à x des valeurs croissantes à partir de α, la différence $cx+d-f(x)$, déjà moindre que δ, ira continuellement en diminuant.

Or l'expression $cx+d-f(x)$ peut être mise sous la forme du produit $x\left[c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]$. Le premier facteur x augmentant, à partir de α, le second facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$, devra diminuer continuellement, puisque la valeur du produit diminue. Enfin, lorsque $x=\infty$, le facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$ devra s'annuler, sans quoi le produit serait lui-même infini.

D'ailleurs, à cette limite, le terme $\frac{d}{x}$ du facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$ est nul, car la valeur de d est supposée finie. Alors, on a $c-\frac{f(x)}{x}=0$, d'où $c=\frac{f(x)}{x}$; et par conséquent $c=\frac{y}{x}$, puisque $y=f(x)$.

La courbe considérée ne peut donc avoir une asymptote non parallèle à l'axe des ordonnées, qu'autant que le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse des points de l'une de ses branches, tende vers une limite finie pour des valeurs de x indéfiniment croissantes. Et si, cette condition étant remplie, l'asymptote existe réellement, le coefficient d'inclinaison de cette droite sur l'axe des abscisses doit être égal à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$, et qu'il atteint seulement lorsque l'abscisse devient infinie.

D'après cela, pour trouver les limites de $\frac{y}{x}$ correspondantes à $x = \infty$, je nomme c le rapport variable $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse d'un point quelconque de la courbe, dont l'équation sera maintenant représentée sous cette forme générale $f(x, y) = 0$. L'égalité $\frac{y}{x} = c$, donne $y = cx$, et en remplaçant y par cx dans $f(x, y) = 0$, on a l'équation $f(x, cx) = 0$, qui détermine pour chaque point de la courbe, la relation qui existe entre l'abscisse et le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse. C'est donc parmi les valeurs finies de la variable c, correspondantes aux valeurs infinies *réelles* de x, et satisfaisant à l'équation $f(x, cx) = 0$, qu'il faut chercher les coefficients de l'inclinaison sur l'axe des abscisses, des asymptotes non parallèles à l'axe des ordonnées.

En supposant que $f(x, y)$, soit une fonction algébrique et entière, il en sera de même de $f(x, cx)$; et l'équation $f(x, cx) = 0$, développée suivant les puissances entières et décroissantes de x prendra la forme :

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.} = 0.$$

Les coefficients A, B, C, etc., seront des fonctions entières de c, et premières entre elles (*).

Pour obtenir les valeurs réelles de c correspondantes aux valeurs infinies de x, il faudra d'abord déterminer les racines réelles c', c'', etc., de l'équation $A = 0$; il restera ensuite à examiner si les valeurs de x correspondantes aux racines c', c'',... sont infinies *réelles*. Si l'une des racines c'

(*) Je suppose ici qu'on ait débarrassé les coefficients A, B, etc., de leur plus grand commun diviseur. — Dans le cas particulier où les coefficients dont il s'agit ont un commun diviseur fonction de la variable c, le premier membre de $f(x,y) = 0$, admet au moins un diviseur de la forme $y - cx$; en tenant compte de ce facteur qui représente une droite si la quantité c est réelle, on en débarrasse l'équation $f(x,y) = 0$, dont le degré s'abaisse ainsi d'une unité.

de $A = 0$, est simple ou multiple d'ordre impair, la valeur infinie de x, correspondante à c', sera toujours réelle (*Voy.* t. III, p. 87). Dans ce cas, la courbe $f(x, y) = 0$, aura au moins une branche infinie. En effet, on pourra donner à la variable c, une valeur $c' + h$ ou $c' - h$, assez peu différente de c', pour que la valeur correspondante de x, dans l'équation $f(x, cx) = 0$, soit réelle et plus grande qu'une quantité déterminée α; et si l'on fait converger la quantité $c' + h$, ou $c' - h$, vers c', par la diminution progressive de h, la valeur correspondante de x, ira continuellement en augmentant, à partir de α (p. 87, t. III). En remplaçant c et x, par ces valeurs dans $y = cx$, l'ordonnée y restera constamment réelle, et par conséquent on obtiendra des points de la courbe, aussi éloignés de l'axe des y, que l'on voudra. C'est-à-dire que la courbe sera illimitée dans le sens des abscisses. Elle sera de même illimitée dans le sens des ordonnées, si la racine c' n'est pas nulle, car le produit $(c' \pm h)\alpha$, peut devenir plus grand que toute quantité donnée.

On peut encore observer que les solutions réelles de l'équation $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc. $= 0$, déterminent les points de rencontre de la courbe proposée $f(x, y) = 0$, et des droites représentées par l'équation $y = cx$. Lorsqu'on fait converger la variable c vers c', la droite mobile $y = cx$, tourne autour de l'origine des coordonnées, pour se rapprocher indéfiniment de la direction déterminée par $y = c'x$; dans chacune de ses positions, le dernier des points auxquels elle va couper la courbe s'éloigne progressivement de l'axe des y, et la distance de ce point à l'axe des y pouvant surpasser toute grandeur assignable, on voit qu'une branche de la courbe doit s'étendre jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses.

Mais, il ne faut pas affirmer que la courbe proposée $f(x, y) = 0$, a toujours une branche infinie, lorsque l'équa-

tion $A = 0$, a une racine réelle. Car la valeur de x déduite de $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc. $= 0$, et correspondante à la racine réelle de $A = 0$, peut être imaginaire. C'est, par exemple, ce qui a lieu pour la courbe dont l'équation est $(y^2 - x^2)^2 + y^2 + x^2 - 1 = 0$. En remplaçant y par cx dans cette équation, on obtient :

$$(c^2 - 1)^2 x^4 + (c^2 + 1) x^2 - 1 = 0.$$

L'équation $A = 0$, devient $(c^2 - 1)^2 = 0$, dont les quatre racines sont réelles ; et néanmoins, la courbe proposée $(y^2 - x^2)^2 + y^2 + x^2 - 1 = 0$, est limitée dans le sens des abscisses, puisque les abscisses des points de cette courbe, sont moindres que l'unité, comme il est facile de le reconnaître.

L'assertion que nous réfutons ici, a sa source dans l'énoncé d'un principe d'algèbre qui a été présenté d'une manière incomplète, et capable d'induire en erreur. On a dit : lorsque le coefficient A du premier terme d'une équation $Ax^m + Bx^n +$ etc. $= 0$ devient nul, l'équation a une racine infinie. J'ai déjà fait observer ailleurs (t. III, p. 39), que les raisonnements sur lesquels on veut fonder ce principe, manquent de rigueur, en ce qu'ils supposent que le produit $0 \times \infty$ est toujours nul. Et, lors même qu'on aurait prouvé rigoureusement que si le coefficient A se réduit à zéro, l'équation $Ax^m + Bx^n + \ldots = 0$, a une racine infinie réelle, ou bien une racine imaginaire dont le module est infini, il resterait encore à reconnaître lequel de ces deux cas a lieu, pour l'interprétation géométrique des résultats obtenus. Faute d'avoir distingué ces deux cas on a conclu, à tort, que si l'équation $A = 0$, a des racines réelles, la courbe considérée a nécessairement des branches infinies. Car, non-seulement l'équation donnée $f(x, y) = 0$, peut représenter une courbe limitée, quand les racines de $A = 0$, sont réelles,

mais encore il est possible que l'équation $f(x, y) = 0$, ne représente aucune ligne (*).

On ne doit donc admettre pour valeur du coefficient c, dans l'équation $y = cx + d$ de l'asymptote, qu'une racine réelle c', de $A = 0$, correspondante à une valeur *infinie réelle* de x. Cette première condition sera toujours remplie lorsque la racine c' sera simple ou multiple d'ordre impair, en admettant, toutefois, que le facteur $c - c'$ ne soit pas commun à tous les termes de $Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.} = 0$.

Une seconde condition est également nécessaire : c'est qu'il soit possible de trouver pour le coefficient d dans $y = c'x + d$, une valeur d' réelle et finie, correspondante au coefficient c'.

Supposons que la courbe puisse avoir une asymptote rectiligne $y = c'x + d$, dont le coefficient d'inclinaison sur l'axe des x soit c'. La différence $y - (c'x + d)$ entre les ordonnées y et $(c'x + d)$ de ces deux lignes ira continuellement en diminuant et deviendra moindre que toute quantité donnée, lorsque les valeurs attribuées à x seront suffisamment grandes. Par conséquent, la fonction $y - c'x$ des coordonnées y, x, d'un point de la courbe devra, pour les valeurs de x indéfiniment croissantes, tendre vers une limite finie qui sera précisément la valeur de d correspondante à c'. Pour trouver cette limite, nommons d la valeur variable de la fonction $y - c'x$, des coordonnées d'un point quelconque de la courbe ; il en résulte $y = c'x + d$, et en substituant $c'x + d$ à y dans l'équation $f(y, x) = 0$, on obtient la relation $f(c'x + d, x) = 0$, qui a lieu entre l'abscisse x et la fonction d ou $y - c'x$ des deux coordonnées de chaque point de la courbe. Et il restera à déterminer les valeurs réelles et

---

(*) L'équation $(y^2 - x^2)^2 + x^2 + y^2 + 1 = 0$ en offre un exemple. Cette équation ne représente aucune ligne, et néanmoins, si l'on remplace y par cx, le coefficient de la plus haute puissance de x devient $(c^2 - 1)^2$, qui est annulé par les valeurs $c = \pm 1$.

finies de la variable d correspondantes aux valeurs *infinies réelles* de x, et satisfaisant à l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$.

A cet effet, on ordonnera $f(c'x+d,\ x)$, suivant les puissances décroissantes de x; l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$, se ramènera à la forme $A'x^r+B'x^s+\text{etc.}=0$: les coefficients A', B', etc., étant des fonctions entières de d, et débarrassées de tout facteur commun.

Les valeurs de d que l'on cherche devront être racines de $A'=0$, et correspondre à des valeurs réelles de x, dans l'équation $A'x^r+B'x^s+\text{etc.}=0$.

Réciproquement, si d' est une racine réelle de $A'=0$, qui satisfasse à la condition que nous venons d'indiquer, la droite $y=c'x+d'$, sera asymptote à la courbe proposée $f(x,y)=0$.

Car, si l'on désigne par h une quantité suffisamment petite, en remplaçant l'inconnue d par $d'+h$, dans l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$, l'autre inconnue x aura une valeur réelle α, qui sera aussi grande que l'on voudra. Et si l'on fait converger h vers zéro, la valeur de x reste réelle et devient de plus en plus grande (t. III, p. 87). Or l'égalité $d=d'+h$, donne $y-c'x=d'+h$, puisque d remplace dans le calcul $y-c'x$. Il s'en suit : $y=c'x+d'+h$. L'abscisse x restant constamment réelle, pour les valeurs décroissantes de h, il en sera de même de l'ordonnée y, qui est égale à $c'x+d'+h$; on obtient donc des points de la courbe qui s'éloignent indéfiniment de l'axe des y, lorsque h décroît. D'ailleurs, la différence h, entre l'ordonnée y d'un point de la courbe et l'ordonnée $c'x+d'$ du point de la droite $y=c'x+d'$, correspondante à la même abscisse, diminuant au delà de toute grandeur assignable, on voit qu'une branche de la courbe en s'éloignant de l'axe des ordonnées se rapproche indéfiniment de la droite $y=cx'+d'$, et qu'elle peut s'en rapprocher aussi près qu'on le voudra, sans jamais la rencontrer, car h ne deviendra nulle qu'autant que x soit

infinie. Par conséquent, la droite $y=c'x+d'$, est asymptote à la courbe $f(x,y)=0$.

On arrive à la même conclusion en observant que les solutions réelles de l'équation $f(c'x+d, x)=0$, déterminent les points de rencontre de la courbe $f(y, x)=0$, et des droites parallèles représentées par l'équation $y=c'x+d$. Lorsque la valeur attribuée au coefficient d est convergente vers d', la droite mobile $y=c'x+d$, se rapproche de la droite $y=c'x+d'$, à une distance $(d'-d)$ qui devient moindre que toute quantité donnée; dans chacune des positions de la droite $y=c'x+d$, elle a avec la courbe, un point commun dont la distance x à l'axe des y, augmente continuellement et sans autre limite que l'infini: une branche de la courbe a donc pour asymptote la droite $y=c'x+d'$.

La détermination des asymptotes rectilignes $y=cx+d$, non parallèles à l'axe des y, dépend uniquement, comme on voit, de la résolution d'équations à deux variables, en valeurs réelles dont l'une soit infinie. Il en est absolument de même des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées. Car, si la droite $x=\alpha$ est asymptote à la courbe $f(x,y)=0$, en remplaçant dans l'équation $f(x,y)=0$, x par $\alpha\pm h$, et donnant à h des valeurs décroissantes et suffisamment petites, il faudra qu'une des valeurs de y reste constamment réelle et augmente au delà de toute grandeur assignable. En d'autres termes, l'équation $f(x, y)=0$, devra admettre la solution réelle $x=\alpha$, $y=\infty$. Réciproquement, si l'équation $f(x,y)=0$, admet la solution $x=\alpha, y=\infty$, la droite $x=\alpha$, est asymptote à la courbe $f(x,y)=0$, puisqu'une branche indéfinie de cette courbe s'approche de la droite $x=\alpha$, autant qu'on le voudra et sans jamais l'atteindre.

Et de même encore, on doit observer que pour déterminer les équations des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, il ne suffit pas d'obtenir les racines réelles de l'équation

formée en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation de la courbe. Ces racines ne conviennent à la question traitée qu'autant que les valeurs correspondantes de y soient aussi réelles (*). C'est la remarque déjà faite au sujet des équations $A = 0$, $A' = 0$, dans la recherche des asymptotes $y = cx + d$, inclinées sur l'axe des y : les racines c', d', de ces équations peuvent être réelles et finies, sans que la droite $y = c'x + d'$ soit une asymptote.

On a trouvé, en cela, je ne sais quel paradoxe ; et en voulant le résoudre, on a été conduit à une interprétation géométrique dans laquelle l'infini n'est plus considéré comme la limite des quantités croissantes.

Pour ma part, je ne trouve ici rien qui soit paradoxal. Il est inexact de dire que le calcul a donné une asymptote, sans qu'il y ait de courbe. Car, sous le point de vue analytique, la question n'est pas complétement traitée, lorsqu'on a obtenu les racines c', d', des équations $A = 0$, $A' = 0$; il reste encore à considérer les valeurs correspondantes de x. La même observation s'applique, comme on sait, à toutes les questions dont la solution dépend des valeurs réelles de plusieurs inconnues.

Quant à la recherche d'une interprétation géométrique de la droite $y = c'x + d'$, lorsque l'équation proposée $f(x, y) = 0$ ne représente rien, il conviendrait peut-être d'en indiquer d'abord l'utilité. Si elle a pour objet de justifier, d'une manière générale, la conclusion qu'on a voulu déduire de la seule réalité des valeurs de c', d' ; quelque ingénieuse que puisse être, sous d'autres rapports, l'interprétation trouvée, il serait difficile de l'admettre sans faire de concession à un mauvais raisonnement.

(*) En admettant toujours que les coefficients des termes de l'équation $f(x,y) = 0$, aient été débarrassés de tout facteur commun en x.

Je n'entrerai ici dans aucun détail sur les simplifications du calcul qui donne les équations $A = 0$, $A' = 0$: la plupart des traités élémentaires contiennent à cet égard, des développements suffisants. Je ne parlerai pas non plus du moyen de reconnaître en discutant ces équations, combien la courbe proposée peut avoir d'asymptotes parallèles à une direction déterminée : cette partie de la discussion du problème n'offre aucune difficulté réelle. Le point principal consiste à savoir dans quels cas la solution c', d', des équations considérées, détermine effectivement une asymptote à la courbe ; le reste s'en déduit facilement. Et par conséquent, tout se réduit en définitive à cette question d'algèbre, que déjà nous avons en partie examinée :

L'équation $Ay^m + By^n + Cx^p + \ldots = 0$, à deux inconnues y, x, ordonnée suivant les puissances décroissantes de y, a pour coefficients, A, B, C, etc., des fonctions entières de x et premières entre elles : trouver les racines réelles et finies de $A = 0$, correspondantes à une valeur infinie et réelle de l'inconnue y.

9. On a démontré (t. III, p. 87), que si la racine réelle α de $A = 0$, est *simple* ou multiple d'ordre impair, la valeur correspondante de y est réelle ; il reste à examiner ce qui a lieu lorsque le plus haut degré de multiplicité de la racine α est un nombre pair $2r$.

Je ferai d'abord abstraction du cas particulier où la valeur α qui, substituée à x, annule le coefficient A, réduirait de même à zéro le coefficient B du terme suivant. En remplaçant x par α, dans les polynômes entiers $\frac{A}{(x-\alpha)^{2r}}$, B, on aura pour résultats des nombres m', n' différents de zéro, positifs ou négatifs ; alors, il sera possible de trouver une quantité h assez petite pour que les équations $\frac{A}{(x-\alpha)^{2r}} = 0$,

$B=0$, n'aient aucune racine comprise entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$. En faisant varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$, les fonctions A, B, conserveront constamment les signes des nombres m', n'. Entre ces deux limites $\alpha+h$, $\alpha-h$, le polynôme A s'annule lorsque $x=\alpha$; mais en passant par zéro il ne change pas de signe, puisque le nombre des racines égales à α est pair.

Les nombres m', n' auront le même signe, ou des signes différents; les exposants m, n, pourront être tous deux pairs ou tous deux impairs; ou bien encore l'un de ces exposants sera pair et l'autre impair : ce sont les différentes hypothèses dans lesquelles nous allons successivement discuter l'équation.

1° Si les nombres m', n' ayant le même signe, les exposants m, n sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, aucune valeur de y, correspondante à $x=\alpha$, ne pourra être infinie réelle. En d'autres termes, la droite $x=\alpha$ ne sera pas asymptote à la courbe dont l'équation est

$$Ay^m+By^n+Cy^p+\ldots=0.$$

En effet, nommons b la plus petite des valeurs que prend B, lorsque x varie depuis $\alpha+h$, jusqu'à $\alpha-h$; et N la plus grande valeur des coefficients C, D, etc., lorsque x varie entre ces deux limites. En substituant à y le nombre $\frac{N}{b}+1$, ou bien un nombre plus grand, le polynôme By^n+Cy^p+etc., aura toujours le même signe que son premier terme By^n, et la valeur absolue de cè polynôme ira continuellement en augmentant à mesure que y deviendra plus grand, à partir de $\frac{N}{b}+1$.

D'ailleurs, le premier terme Ay^m de l'équation Ay^m+By^n+etc.$=0$, ne peut prendre un signe différent de celui du second terme By^n. Car, quelle que soit la valeur réelle attribuée à y, les puissances y^m, y^n seront, l'une et l'autre,

positives ou négatives. De plus, les coefficients A, B, ont, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$, les signes des nombres m', n'; donc, le signe du produit Ay^m ne peut être différent de celui du produit By^n.

Par conséquent, en donnant à x des valeurs comprises entre $\alpha+h$ et à $\alpha-h$, et à y une valeur réelle plus grande que $\frac{N}{b}+1$, le premier membre de l'équation $Ay^m+By^n+Cy^p+\text{etc.}=0$, ne sera jamais annulé. Il en faut conclure que la valeur de y, correspondante à $x=\alpha$, n'est pas réellement infinie.

2° Si les nombres m', n', ayant le même signe, les exposants m, n, sont l'un pair, et l'autre impair : l'équation admettra la solution $x=\alpha$, $y=-\infty$. La droite $x=\alpha$ sera asymptote à deux branches de la courbe $Ay^m+By^n+\ldots=0$, du côté des ordonnées négatives; et ces deux branches seront situées de différents côtés de l'asymptote.

C'est ce qui résultera des observations suivantes.

Si l'on donne à y une valeur négative, et à x des valeurs comprises entre $\alpha\pm h$ et α, les deux termes Ay^m, By^n, auront toujours des signes contraires. Car, depuis $x=\alpha\pm h$ jusqu'à $x=\alpha$, les coefficients A, B ont les mêmes signes que les nombres m', n', et les puissances y^m, y^n, sont affectées de signes contraires, lorsque y est négatif.

De plus, on peut remplacer y par un nombre négatif $-y'$, dont la valeur absolue soit assez grande pour que, en faisant varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$, le polynôme $By^n+Cy^p+\text{etc.}$, ait constamment le signe de son premier terme By^n; on satisfait à cette condition en donnant à y', une valeur au moins égale à $\frac{N}{b}+1$.

Enfin, en remplaçant y par y' dans le terme $-Ay^m$, et faisant varier x depuis $\alpha+h$, ou $\alpha-h$, jusqu'à α; le terme Ay'^m di-

minuera continuellement et deviendra moindre que toute quantité donnée. Pour des valeurs de h suffisamment petites, on aura toujours $Ay'^m < By'^n + Cy'^p$ + etc. (Voy. tome III, page 88).

Cela posé, substituons $-y'$ à y, et $\alpha + h$ à x, dans le premier membre de l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p$ + etc. $= 0$; et donnons à h une valeur assez petite pour que l'inégalité $Ay'^m < By'^n + Cy'^p$ + etc., soit satisfaite. Le premier membre de l'équation aura un signe contraire à celui de son premier terme. Puis, sans rien changer à cette valeur de h, faisons croître y, à partir de y', jusqu'à ce que le premier membre de l'équation prenne le signe de son premier terme Ay^m; dans l'intervalle de ces valeurs attribuées à y, le premier membre de l'équation se sera annulé, au moins une fois, puisqu'il a changé de signe. Ainsi, l'équation en y aura au moins une racine négative -6, dont la valeur absolue surpassera celle de $-y'$. Et, comme on peut d'ailleurs supposer y' aussi grand que l'on voudra, il est démontré que :

En remplaçant x dans l'équation proposé par $\alpha \pm h$ (h étant une quantité réelle suffisamment petite), cette équation $Ay^m + By^n$ + etc. $= 0$, aura au moins une racine réelle négative -6 dont la valeur absolue surpasse tout nombre donné y'. Si l'équation a plusieurs racines négatives satisfaisant à cette condition, je nommerai -6 la plus grande de toutes, en valeur absolue.

Il est possible que plusieurs valeurs différentes de h donnent $y = -6$: je prendrai pour h la plus petite de toutes. De sorte que $\alpha + h$, représentera parmi les valeurs de x correspondantes à $y = -6$, celle qui diffère le moins de α. Alors, si l'on fait diminuer h, le polynôme $A(-6)^m + B(-6)^n$ + etc., qui était annulé, reprendra immédiatement le signe du terme $B(-6)^n$, pour $h' < h$, quelque petite que soit la diminution de h (voy. tome III, page 90). Actuellement, sans rien changer à la valeur h', faisons croître la

valeur 6 de $-y$, jusqu'à ce que le premier membre de l'équation reprenne le signe de son premier terme Ay^m; par cette augmentation progressive de y, le premier membre de l'équation $Ay^m + By^n + \text{etc.} = 0$, s'annulera, au moins une fois; l'équation admettra donc, pour $h' < h$, une racine $-6'$ dont la valeur $6'$ sera plus grande que 6.

D'après cela, on voit que : en diminuant x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α, une des valeurs correspondantes de y variera depuis -6 jusqu'à $-\infty$. La variable y deviendra encore égal à $-\infty$, lorque x augmentera de $\alpha - h$ à α. Car le même raisonnement s'applique aux deux cas.

Ainsi, la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n + \text{etc.} = 0$, aura, du côté des ordonnées négatives, deux branches asymptotes à la droite $x = \alpha$, et situées de différents côtés de cette droite.

Si y est positif, et x compris entre $\alpha + h$, et $\alpha - h$, les deux termes Ay^m, By^n, conserveront le même signe; aucune valeur positive de y correspondante à $x = \alpha$, ne deviendra infinie réelle. C'est ce qu'on a déjà démontré (p. 44, 1°). La droite $x = \alpha$ ne sera donc pas asymptote à la courbe du côté des ordonnées positives.

3° Lorsque les nombres m', n', sont de signes contraires, et les exposants m, n, tous deux pairs ou impairs : la valeur α de x, donne pour y deux valeurs réellement infinies, l'une positive, l'autre négative. Dans ce cas, la droite $x = \alpha$, est asymptote à la fois à quatre branches de la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n + Cy^p + \text{et} = 0$. Deux de ces branches s'étendent indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses, et sont situées de différents côtés de la droite $x = \alpha$. Les deux autres, au-dessous de l'axe des x, sont encore situées de différents côtés de leur asymptote $x = \alpha$.

En effet, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha \pm h$ et α, les fonctions A, B, ont constamment des signes contraires,

puisque les nombres m', n', sont de signes contraires. D'ailleurs, les puissances y^m, y^n, dont les exposants sont pairs tous deux, ou bien impairs, ont constamment le même signe. Il en résulte que, les produits Ay^m, By^n, seront affectés de signes différents.

La démonstration donnée (pages 45...47, 2°), trouve donc, ici même, son application. En faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α, une des valeurs de y restera constamment réelle et positive, une autre valeur restera négative; et à la limite $x = \alpha$, elles deviendront infinies. Ainsi, l'équation admettra ces deux solutions :

$$x = \alpha, y = \infty, \text{ et } x = \alpha, \; y = -\infty.$$

On arrive à la même conclusion en supposant que x augmente continuellement depuis $\alpha - h$ jusqu'à α. Par conséquent, l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p +$ etc. $= 0$, donne quatre branches de courbe, qui ont pour asymptote la droite $x = \alpha$. Deux de ces branches sont déterminées, en attribuant à y des valeurs positives, correspondantes aux valeurs de x comprises entre $\alpha \pm h$ et α; et les autres, en donnant à l'ordonnée y des valeurs négatives correspondantes à celles de l'abscisse, comprises entre les mêmes limites $\alpha \pm h$ et α.

4° Si l'on suppose, enfin, que les deux nombres m', n', ayant encore des signes contraires, les exposants m, n, soient l'un pair, et l'autre impair : l'équation proposée admettra la solution $x = \alpha$, $y = + \infty$; mais aucune valeur négative de y correspondante à $x = \alpha$, ne deviendra infinie. La droite $x = \alpha$, sera asymptote à deux branches de la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n + Cy^p +$ etc. $= 0$, et situées, au-dessus de l'axe des abscisses, de différents côtés de $x = \alpha$. Aucune branche de la courbe, ne sera au-dessous de l'axe des x, asymptote à la droite $x = \alpha$.

Car, en faisant varier x depuis $\alpha \pm h$, jusqu'à α, et donnant à y des valeurs positives; les termes Ay^m, By^n ont des signes contraires, donc l'équation admet la solution $x=\alpha$, $y=+\infty$ (pages 45, 47, 2°). D'ailleurs, les valeurs négatives de y donnent le même signe aux termes Ay^m, By^n; donc, aucune valeur négative de y correspondante à $x=\alpha$, ne peut devenir infinie réelle.

On obtient d'ailleurs la solution $x=\alpha$, $y=+\infty$, en faisant varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à α, ou bien de $\alpha-h$ jusqu'à α. Il s'ensuit que deux branches de la courbe, situées de différents côtés de la droite $x=\alpha$, sont asymptotes à cette droite, dans le sens des ordonnées positives. Aucune branche ne peut être, du côté des ordonnées négatives, asymptote à $x=\alpha$, puisque l'équation de la courbe n'admet pas la solution réelle $x=\alpha$, $y=-\infty$.

10. Dans la discussion précédente, nous avons supposé que la racine α, multiple d'ordre pair de $A=0$, substituée à x dans le terme By^n de l'équation proposée, ne réduisait pas à zéro, le coefficient B de ce terme. La substitution de α à x, peut annuler B et quelques-uns des coefficients C, D, des termes suivant Bx^n, mais tous les coefficients ne peuvent être à la fois réductibles à zéro, puisqu'ils ont été débarrassés de leurs facteurs communs en x. Je désignerai par $A'x^r$ le premier des termes dont le coefficient n'est pas annulé, et j'écrirai l'équation proposée sous la forme suivante :

$$Ay^m+By^n+Cy^p+\ldots+A'y^r+B'y^s+\ldots=0.$$

Les lettres sans accent : A, B, C, etc., représentent des fonctions entières de x qui admettent le facteur $x-\alpha$; la fonction B' peut aussi être divisible par $x-\alpha$.

Après avoir divisé A, B, C,..., par les plus hautes puissances de $(x-\alpha)$, qui entrent comme facteurs dans ces polynômes, je remplace x par α dans les quotients obtenus,

et je nomme m', n', p',..., les nombres résultant de cette substitution. Je représente aussi par r' la valeur que prend le coefficient A' lorsque $x = \alpha$. Enfin, je considérerai h comme une quantité réelle assez petite pour que l'équation $A' = 0$, et toutes celles que l'on forme en égalant à zéro les quotients obtenus en divisant A, B, C,... par les plus hautes puissances de $x - \alpha$ qu'ils renferment, n'aient aucune racine comprise entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$. Pour des valeurs de x comprises entre ces deux limites $\alpha + h$ et $\alpha - h$, les fonctions A, A', auront les mêmes signes que les nombres m', r'. Les coefficients B, C..., conserveront aussi les signes des nombres n', p'..., lorsqu'ils contiendront $x - \alpha$ à des puissances paires. Ils prendront des signes contraires à ceux des nombres n', p', etc., quand les plus hautes puissances de $x - \alpha$ contenues dans ces coefficients étant impaires, on remplacera x par $\alpha - h$. Dans tous les cas, il sera facile de reconnaître si les termes Ay^m, By^n, etc., $A'y^r$, sont positifs ou négatifs, pour les valeurs substituées aux variables x et y.

Cela posé, lorsque en attribuant à x des valeurs comprises entre $\alpha \pm h$ et α, il sera possible de donner des signes contraires aux deux termes Ay^m, $A'y^r$; l'équation proposée admettra toujours pour l'inconnue y, une valeur infinie réelle, correspondante à $x = \alpha$, et le signe de la valeur infinie de y, sera celui des valeurs de y qui font prendre aux deux termes Ay^m, $A'y^r$ des signes différents. Ainsi, l'équation admettra les deux solutions $x = \alpha, y = +\infty$, et $x = \alpha$, $y = -\infty$, si les valeurs positives et négatives de y donnent aux termes Ay^m, $A'y^r$ des signes différents.

C'est ce qui résulte évidemment de la démonstration donnée (tome III, pages 87 et suiv.).

On a un exemple de ce cas particulier dans l'équation

$$(x-1)^4 y^6 + (x-1)^3 y^5 + (x-4) y^4 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Les nombres m', r', sont ici 1, — 3. En faisant varier x depuis 2 jusqu'à 1, ou de — 2 à 1, les termes $(x-1)^4 y^6$, $(x-4)y^4$, ont constamment des signes contraires, quelle que soit la valeur attribuée à y. L'équation (1) admet les deux solutions :

$$x=1\,,\ y=+\infty\,;\ \text{et}\ x=1\,,\ y=-\infty.$$

La parallèle $x=1$ à l'axe des y, est asymptote, à la fois, à quatre branches de la courbe représentée par l'équation proposée.

Lorsque Ay^m, $A'y^r$ ont constamment le même signe, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$, si aucun des termes intermédiaires, By^n, Cy^p..., ne peut prendre un signe contraire à celui des termes Ay^m, $A'y^r$ · l'équation proposée n'admettra pas la solution $x=\alpha, y=\infty$. Car la démonstration donnée (page 44, 1°) est alors applicable.

L'équation n'admettra pas non plus la solution $x=\alpha$, $y=\infty$, lors même que les termes intermédiaires By^n, Cy^p..., pourraient prendre des signes différents de celui de Ay^m, $A'y^r$, si les plus hautes puissances de $x-\alpha$ qui entrent dans les coefficients B, C... de ces termes sont supérieures à la puissance de $(x-\alpha)$ dans le coefficient A du premier terme de l'équation.

En effet, considérons, par exemple, l'équation

$$(x-1)^4y^6-(x-1)^5y^4-(x-1)^6y^3+(4-x)y^2+\text{etc.}=0. \quad (1)$$

En remplaçant x par $1+h$, cette équation devient :

$$h^4y^6-h^5y^4-h^6y^3+(3-h)y^2+\text{etc.}=0,$$

ou

$$h^4[y^6-hy^4-h^2y^3]+(3-h)y^2+\text{etc.}=0.$$

Et, on voit qu'en donnant à la quantité h une valeur positive ou négative moindre que l'unité, le polynôme $h^4y^6-h^5y^4-h^6y^3$ sera positif pour toutes les valeurs de y satisfaisant à

l'inégalité $y^6 - y^4 - y^3 > 0$. Ainsi, en faisant varier h depuis 1 jusqu'à -1, et donnant à y des valeurs suffisamment grandes, le premier membre de l'équation (1) restera constamment positif; donc cette équation ne peut admettre la solution réelle $x=1, y=\infty$. Et, par conséquent, la droite $x = 1$, ne peut être asymptote à la courbe que l'équation (1) représente. G.

(*La fin prochainement.*)

NOTE SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

Questions d'examen.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

—

Quand on cherche le cosinus de $\frac{a}{n}$, connaissant $\cos a$, on est conduit à résoudre une équation du $n^{ième}$ degré, qui manque du deuxième terme, ce qui annonce que la somme des racines de l'équation est nulle; on propose de vérifier cette circonstance par la trigonométrie.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, les racines en question; on sait que les arcs auxquels correspondent ces cosinus sont

$$\frac{a}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{4\pi}{n},\ldots,\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n};$$

ils forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$. Par suite, d'après la formule de Thomas Simpson, nous avons entre leurs cosinus, les relations qui suivent :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x_3 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_2 - x_1, \\ x_4 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_3 - x_2, \\ x_5 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_4 - x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_{n-1} - x_{n-2}. \end{cases}$$

Si on continue la progression, après l'arc $\frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n}$, viendra l'arc $\frac{a}{n}+\frac{2n\pi}{n}=\frac{a}{n}+2\pi$, dont le cosinus est le même que celui de $\frac{a}{n}$ désigné par x_1. L'arc qui suivra encore sera $\frac{a}{n}+2\pi+\frac{2\pi}{n}$, dont le cosinus est égal à celui de $\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n}$, désigné par x_2. D'après ces remarques nous pouvons encore écrire les deux égalités :

$$(\beta)\quad \begin{cases} \cos\left(\frac{a}{n}+\frac{2n\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_n - x_{n-1}, \\ \cos\left(\frac{a}{n}+2\pi+\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad x_2 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_1 - x_n. \end{cases}$$

Ajoutant toutes les égalités (α) et (β) membres à membres, nous aurons en appelant s la somme des cosinus considérés :

$$s = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,s - s,$$

ou

$$2s = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,s,$$

ou enfin

$$2s\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Or $\cos\frac{2\pi}{n}$ ne peut être égal à 1 ; il faudrait pour cela que n fût égal à 1 ; donc $s = 0$. Ce qu'il fallait prouver.

Quand on cherche $\sin\frac{a}{n}$, connaissant $\sin a$, on arrive quand n est impair à une équation du degré n, et quand n est pair à une équation du degré $2n$; l'une et l'autre de ces équations sont privées du deuxième terme : on propose aussi de vérifier cette circonstance par la trigonométrie.

D'après une discussion connue, les arcs auxquels appartiennent les sinus dont les valeurs sont les racines de l'équation, sont dans le premier cas les mêmes que ceux indiqués dans le cas du cosinus, savoir :

$$\frac{a}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n}\ \ldots\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

La démonstration précédente peut se répéter telle qu'elle est en changeant le mot de cosinus en sinus, quand on parle des racines de l'équation, puisque la formule de Thomas Simpson s'applique également aux sinus et aux cosinus ; ce qui se conçoit d'ailleurs parfaitement, puisque si des arcs forment une progression arithmétique, leurs compléments doivent évidemment en former une autre.

Dans le deuxième cas, nous avons pour correspondre aux racines de l'équation du degré $2n$, deux séries d'arcs formant deux progressions arithmétiques, savoir :

$$\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{4\pi}{n}\ \ldots\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n};$$

$$\frac{\pi}{n}-\frac{a}{n},\ \frac{3\pi}{n}-\frac{a}{n}\ \ldots\ \frac{(2n-1)\pi}{n}-\frac{a}{n}.$$

Appelons $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, les sinus des premiers ; $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, les sinus des seconds. La démonstration précédente prouve que $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0$, et $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$

$+y_n=0$. Donc la somme de tous ces sinus réunis est égale à 0.

Cette démonstration prouve en général que si n arcs quelconques, forment une progression arithmétique dont le premier terme est *quelconque*, et la raison $\frac{2\pi}{n}$, la somme des sinus, ou la somme des cosinus de ces arcs est nulle.

Ceci peut être regardé comme une vérification de ce théorème : la somme des projections des côtés d'un polygone régulier sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit est égale à 0.

(*La suite au prochain numéro*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

91. Le côté AB du triangle donné ABC est inscrit dans l'angle fixe MON, l'inclinaison du plan du triangle sur le plan MON est aussi donnée ; le lieu du point C dans l'espace est une ellipse dans laquelle la somme *algébrique* des axes est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB.

(Tm.)

92. A est l'aire d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, et B, l'aire du polygone semblable circonscrit ; B — A est équivalent à l'aire du polygone régulier semblable, inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté de B, ou bien encore au polygone régulier circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté de A.

(Du Faye.)

ANNONCES.

—

1. Bulletin polytechnique, revue des sciences exactes, de leurs applications et de leur enseignement, organe des intérêts et des besoins de l'instruction scientifique élémentaire et supérieure.

Par Auguste *Blum*, ancien élève de l'École polytechnique. Avec la collaboration de savants, d'ingénieurs, d'administrateurs, de publicistes et d'anciens élèves des écoles du gouvernement.

Au bureau du Bulletin polytechnique, rue Saint-Hyacinthe-Saint-Michel, n. 8, à Paris.

Le premier numéro a paru le 10 janvier. Nous en rendrons compte prochainement.

2. De l'éclairage au gaz. Développements sur la composition des gaz destinés à l'éclairage, sur la construction des fourneaux et des cheminées, sur la pose des tuyaux, sur les phénomènes de la lumière, etc.; par *E. Robert d'Hurcourt*, ancien élève de l'École polytechnique, ancien capitaine d'Artillerie.

Chez *Carilian-Gœury* et *Vᵉ Dalmont*, quai des Augustins, nᵒˢ 39, 41. Paris et 1845.

DÉMONSTRATION

De l'impossibilité de résoudre toutes les équations algébriques avec des radicaux.

PAR M. WANTZEL,
répétiteur à l'École polytechnique.

I.

Abel a entrepris de démontrer qu'une équation algébrique quelconque de degré supérieur au quatrième n'est pas résoluble par radicaux (*). Quoique sa démonstration soit exacte au fond, elle est présentée sous une forme trop compliquée et tellement vague, qu'elle n'a pas été généralement admise. Plusieurs années auparavant, Ruffini, géomètre italien, avait traité la même question d'une manière beaucoup plus vague encore, et avec des développements insuffisants, quoiqu'il soit revenu plusieurs fois sur le même sujet. En méditant les travaux de ces deux géomètres et à l'aide des principes que nous avons posés précédemment (**), nous sommes arrivé à une forme de démonstration qui paraît assez claire et assez précise pour lever tous les doutes sur cette partie importante de la théorie des équations.

Il faut d'abord bien poser la question. Résoudre une équation par radicaux, c'est exprimer les racines au moyen des coefficients par une fonction radicale d'une espèce détermi-

(*) *Journal de Crelle*, tome I, page 65; et *Bulletin* de Férussac, tome VI.
(**) *Nouvelles Annales*, tome II, page 117.

née, ou, ce qui est la même chose, ramener la résolution de l'équation proposée à celle d'une série d'équations binômes, dont les seconds termes dépendent successivement des coefficients et des racines des équations précédentes.

La question ainsi posée présente trois points de vue fort différents, soit qu'il s'agisse de résoudre une équation générale quels que soient les coefficients, soit qu'on s'occupe d'une équation déterminée pour savoir si elle est résoluble ou non par radicaux, soit enfin qu'on veuille obtenir les racines d'une équation par des extractions de racine effectuées sur des quantités réelles.

Quant au dernier cas, nous avons fait voir dans le mémoire précité (*) que même pour les équations du troisième degré on ne pouvait exprimer les racines de cette manière lorsqu'elles sont toutes réelles; on le peut toujours au contraire quand il y en a deux imaginaires. Nous reviendrons sur ce travail qui est demeuré inachevé. Le second cas est le plus difficile de tous : il paraît avoir été à peine entrevu par Abel et il n'a été attaqué avec quelque succès que dans un mémoire inédit de Gallois, qui sera publié prochainement. Nous ne considérerons ici que le premier point de vue : c'est aussi le seul qui ait été envisagé dans les mémoires d'Abel et de Ruffini.

II.

Il s'agit donc de démontrer seulement qu'on ne peut reproduire une racine d'une équation générale de degré supérieur au quatrième, en effectuant successivement un nombre limité d'opérations sur les coefficients ou sur des fonctions symétriques de toutes les racines. Puisque les coefficients sont supposés quelconques, les racines sont tout à fait arbi-

(*) Tome II, pag. 125 de ce Recueil.

traires, et la question se réduit à un principe de combinaison.

Soit $f(x)=0$ l'équation proposée, et $x_1, x_2, \ldots x_3, x_m$ ses m racines. Supposons qu'on puisse exprimer la racine x_1 par une fonction radicale d'espèce quelconque. Comme les principes que nous avons établis sur les radicaux numériques et sur leur classification s'appliquent entièrement aux radicaux algébriques, la valeur de x_1 pourra se mettre sous la forme (**)

$$x_1 = A + u + Bu^2 + \ldots + Mu^{n-1} \qquad (1)$$

dans laquelle $u = \sqrt[n]{a}$ ou $u^n = a$; a est une fonction radicale d'espèce inférieure à celle de x, et A, B... M peuvent être de même espèce, mais de degré moindre. On en déduira aussi que la valeur de x_1 est racine d'une équation irréductible du $n^{ième}$ degré, dont les coefficients sont des fonctions de même genre que A, B.... M. Toutes les racines de cette équation, obtenues en remplaçant u par les diverses valeurs de $\sqrt[n]{a}$, devront parconséquent satisfaire à l'équation proposée; et, en désignant par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots$ les racines n^e de l'unité, on aura n relations de la forme :

$$x_1 = A + u + Bu^2 + \ldots + Mu^{n-1}.$$
$$x_2 = A + \alpha u + B\alpha^2 u^2 + \ldots + M\alpha^{n-1} u^{n-1}$$
$$x_3 = A + \alpha^2 u + B\alpha^4 u^2 + \ldots + M\alpha^{2n-2} u^{n-1}, \text{ etc.}$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre, il vient :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = nA;$$

si on les ajoute encore après avoir multiplié respectivement par $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots$ on obtient :

$$x_1 + \alpha^{n-1} x_2 + \alpha^{n-2} x_3 + \ldots = un;$$

(*) Tome II, pag. 125 de ce Recueil.

en multipliant par α^n, α^{n-2}, α^{n-4}, on trouvera de même :

$$x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \alpha^{n-4} x_3 + \ldots = nBu^2 ;$$

et ainsi de suite. Ces résultats proviennent de deux propriétés des racines α, α^2,... α^n de l'unité : leur somme est égale à zéro et elles se reproduisent toutes par les puissances de chacune d'entre elles (excepté α^n ou 1), lorsque n est un nombre premier.

Ainsi *les quantités* u, A, B... M et a *qui entrent dans l'expression de* x, *sont égales à des fonctions rationnelles de plusieurs racines de l'équation proposée.*

Considérons maintenant une des quantités A, B... M et a, on pourra former une équation ayant pour racines les diverses valeurs de la fonction rationnelle qui la représente, au moyen des coefficients de l'équation $f(x) = 0$. Car soit, par exemple, $B = \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$; le produit

$$[B - \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)][B - \varphi(x_2, x_1, x_3 \ldots] [B - \varphi(x_1, x_3, x_2 \ldots)] \ldots$$

obtenu en disposant les racines x_1, x_2, x_3, x_m... de toutes les manières possible sera une fonction symétrique de toutes ces racines ; en sorte que B sera donné par une équation $F(B) = 0$ de même forme que la proposée.

Si l'on ordonne la quantité B par rapport à l'un des radicaux de plus haute espèce qu'elle renferme, on aura une expression semblable à celle de x_1

$$B = A' + v + B' v^2 + \ldots + M' v^{p-1}, \text{ avec } v^p = b,$$

d'où l'on déduira par le même raisonnement que les quantités v, A', B'... M' et b sont fonctions rationnelles des racines de l'équation $F(B) = 0$, et que par conséquent elles s'expriment aussi rationnellement en fonction des racines de l'équation proposée.

En opérant de même sur chacune des quantités A', B'...

M′ et b, on arriverait à la même conclusion, relativement aux quantités radicales dont elles dépendent ; et, ainsi de suite, jusqu'aux derniers radicaux qui portent sur des expressions rationnelles par rapport aux coefficients de l'équation $f(x) = 0$.

Donc *si une équation est résoluble par radicaux, chaque radical simple ou composé qui entre dans la valeur de l'inconnue est égal à une fonction rationnelle des racines de cette équation.*

Les fonctions rationnelles des racines qui représentent les divers radicaux peuvent renfermer toutes ces racines ou seulement un certain nombre ; il est toujours permis de les supposer entières (*) pour en concevoir plus facilement les combinaisons.

Il est à remarquer que la démonstration précédente s'applique quel que soit le point de vue sous lequel on envisage la question de la résolution par radicaux.

III.

Étudions maintenant les propriétés de ces fonctions rationnelles des racines qui sont égales aux différents radicaux contenus dans la valeur (1) de x_1. Si l'équation $f(x) = 0$ est satisfaite par cette valeur, quels que soient ses coefficients, on doit reproduire identiquement x_1, en substituant dans (1) la fonction rationnelle correspondante à chaque radical,

---

(*) Toute fonction fractionnaire d'une racine de l'équation $f(x) = 0$, peut être remplacée par une fonction entière de cette racine. En effet, si l'on multiplie les deux termes de $\frac{F(x_1)}{\varphi(x_1)}$ par $\varphi(x_2)\,\varphi(x_3)$... le dénominateur deviendra une fonction symétrique K ; quant au numérateur $F(x_1) \times \frac{K}{\varphi(x_1)}$, il sera une fonction entière de x_1, puisque $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$... sont racines d'une certaine équation $\varphi^m + A\varphi^{m-1} ... + H\varphi + K = 0$, d'où l'on tire $\frac{K}{\varphi} = \varphi^{m-1} + A\varphi^{m-2} + ... + H$. La même démonstration s'applique à une fonction de plusieurs racines.

puisque les racines de l'équation sont alors entièrement arbitraires. De même, toute relation entre les racines devra être identique et ne cessera pas d'exister, si l'on y remplace ces racines les unes par les autres d'une manière quelconque.

Désignons par y le premier radical qui entre dans la valeur de x_1, en suivant l'ordre du calcul, et soit $y^n = p$; p dépendra immédiatement des coefficients de $f(x) = 0$, et pourra s'exprimer par une fonction symétrique des racines $F(x_1, x_2, x_3 \ldots)$; y sera une fonction rationnelle $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ des mêmes racines.

Comme la fonction φ n'est pas symétrique, sans quoi la racine n^e de p s'extrairait exactement, elle doit changer lorsqu'on permute deux racines : x_1, x_2, par exemple; mais la relation $\varphi^n = F$ sera toujours satisfaite. D'ailleurs la fonction F étant invariable par cette permutation, les valeurs de φ sont des racines de l'équation $y^n = p$, et l'on a :

$$\varphi(x_2, x_1, x_3 \ldots) = \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots);$$

si l'on remplace de part et d'autre x_1 par x_2, et réciproquement, il vient :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots) = \alpha\varphi(x_2, x_1, x_3 \ldots);$$

d'où, en multipliant par ordre : $\alpha^2 = 1$.

Ce résultat prouve que le nombre n, supposé premier, est nécessairement égal à 2. Donc, *le premier radical qui se présente dans la valeur de l'inconnue, doit être du second degré.* C'est ce qui arrive en effet pour les équations qu'on sait résoudre.

Si dans la fonction φ on effectue une permutation de trois lettres, en remplaçant x_1, x_2, x_3, respectivement par x_2, x_3, x_1, elle ne changera pas de valeur. En effet, on aura d'abord :

$$\varphi(x_2, x_3, x \;, x_4 \ldots) = \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots);$$

puis en répétant des deux côtés la même substitution :

$$\varphi(x_3, x_1, x_2, x_4 \ldots) = \alpha\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4 \ldots),$$

et

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) = \alpha\varphi(x_3, x_1, x_2, x_4 \ldots),$$

d'où, en multipliant, $\alpha^3 = 1$; comme d'ailleurs α est une racine carrée de l'unité, il faut que α soit égal à 1, ou que les valeurs de φ soient égales.

On verrait de même que φ est invariable par les permutations de cinq lettres ou d'un nombre premier quelconque. Dans ces permutations on suppose qu'aucune lettre du groupe considéré ne conserve la même place : c'est ce qu'on appelle, d'après M. Cauchy, des permutations circulaires de 3, 5... lettres.

Continuons la série des opérations indiquées par la valeur (1) de x_1.

On combinera le premier radical avec les coefficients de $f(x) = 0$, ou la fonction φ avec des fonctions symétriques des racines, à l'aide des premières opérations de l'algèbre, et l'on obtiendra toujours une fonction des racines invariable par les permutations de trois lettres. Les radicaux subséquents pourront donner encore des fonctions du même genre, s'ils sont du second degré. Supposons qu'on soit arrivé à un radical, pour lequel la fonction rationnelle équivalente ne soit pas invariable par ces permutations. Désignons-le toujours par $y = \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$; dans l'équation $y^n = p$, nous ferons encore $p = F(x_1, x_2, x_3 \ldots)$; cette fonction ne sera plus symétrique, mais seulement invariable par les permutations de trois lettres. Si l'on remplace x_1, x_2, x_3 par x_2, x_3, x_1 dans φ, la relation $\varphi^n = F$ subsistera toujours, et, puisque F ne change pas par cette substitution, il viendra :

$$\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4 \ldots) = \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots);$$

d'où l'on conclura, comme ci-dessus, $\alpha^3 = 1$. Ainsi n sera égal à 3.

Si le nombre des quantités x_1, x_2, x_3... est supérieur à quatre, ou si l'équation $f(x) = 0$ est d'un degré plus élevé que le quatrième, on pourra effectuer dans φ une permutation circulaire de cinq lettres, en remplaçant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, par x_2, x_3, x_4, x_5, x_1; la fonction F ne changera pas, et l'on aura :

$$\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 \ldots) = \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots);$$

puis en répétant de part et d'autre la même substitution :

$$\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2 \ldots) = \alpha\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 \ldots) \text{ etc.}$$

Par la multiplication, on obtient $\alpha^5 = 1$; ce qui entraîne $\alpha = 1$, puisque α est une racine cubique de l'unité. Ainsi, la fonction φ est invariable par les permutations de cinq lettres. D'ailleurs elle ne changerait pas davantage, si l'on remplaçait x_3, x_2, x_5, x_1, x_4 par x_2, x_5, x_1, x_4, x_3; en sorte que l'on a :

$$\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2 \ldots) = \varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 \ldots);$$

mais on avait déjà :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots) = \varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2 \ldots);$$

donc

$$\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots).$$

C'est-à-dire que la fonction φ doit être invariable par les permutations de trois lettres.

Ainsi *tous les radicaux renfermés dans la racine d'une équation générale du degré supérieur au quatrième devraient être des fonctions rationnelles invariables par les permutations de trois racines.* En substituant ces fonctions dans l'expression (1), on arrive à une égalité de la forme :

$$x_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots),$$

qui doit être identique ; ce qui est impossible, puisque le second membre reste invariable quand on remplace x_1,

x_2, x_3 par x_2, x_3, x_1, tandis que le premier change évidemment.

Donc, *il est impossible de résoudre par radicaux, une équation générale du cinquième degré ou de degré supérieur.*

La démonstration précédente fait voir en même temps que pour les équations du troisième et du quatrième degré, le premier radical, dans l'ordre des opérations, doit être un radical carré, et le second un radical cubique; ces circonstances se présentent en effet dans les formules données par Lagrange et les autres géomètres.

Les résultats que nous venons d'indiquer seront aperçus avec plus de facilité, si nous ajoutons une propriété remarquable des fonctions rationnelles considérées ci-dessus : c'est que *toute fonction invariable par les permutations de trois lettres ne peut avoir plus de deux valeurs.* D'abord une fonction de ce genre est invariable par les permutations de cinq lettres; car si

$$\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots),$$

on aura aussi en remplaçant x_1, x_4, x_3 par x_4, x_5, x_1

$$\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 \ldots) = \varphi(x_1, x_2; x_3, x_4, x_5 \ldots).$$

On verrait de même que la fonction φ ne change pas par les permutations de 7, 9... lettres. Les diverses valeurs de cette fonction s'obtiendront par conséquent en permutant deux lettres, puis deux autres lettres et ainsi de suite. Supposons que $\varphi(x_2, x_1, x_3, x_4 \ldots)$ et $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots)$ soient deux valeurs différentes je dis que toute permutation de deux lettres $\varphi(x_1, x_2, x_4, x_3 \ldots)$ reproduira l'une de ces valeurs. En effet il vient en remplaçant x_1, x_2, x_4 par x_2, x_4, x_1 : $\varphi(x_2, x_4, x_1, x_3 \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_4, x_3 \ldots)$, tandis que l'on trouve $\varphi(x_2, x_1, x_3, x_4 \ldots) = \varphi(x_2, x_4, x_1, x_3 \ldots)$, par la substitution de x_1, x_3, x_4 au lieu de x_4, x_1, x_3; d'où l'on conclura : $\varphi(x_1, x_2, x_4, x_3 \ldots = \varphi(x_2, x_1, x_3, x_4 \ldots)$.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la faculté de Bordeaux.

—

Proposition I. La série $u_1, u_2, u_3 \dots u_n, \dots$ (1), de nombres positifs et décroissants est de même espèce (convergente ou divergente) que la série $u_1, ku_k, k^2u_{k^2}, \dots k^n u_{k^n}, \dots$ (2), que l'on forme en multipliant chaque terme de la première par son indice, et prenant dans la série ainsi formée, les termes où les indices sont en progression géométrique.

Démonstration. Soit $S=u_1+u_2+u_3+\dots$; en décomposant cette somme en d'autres, on a :

$$u_1+u_2+\dots+u_{k-1}<(k-1)u_1 \text{ et } >(k-1)u_k=\frac{k-1}{k}.ku_k,$$

de même

$$u_k+\dots\ u_{k^2-1}<(k-1)ku_k \text{ et } >\frac{k-1}{k}.k^2u_{k^2},$$

$$u_{k^2}+\dots\ u_{k^3-1}<(k-1)k^2u_{k^2} \text{ et } >\frac{k-1}{k}.k^3u_{k^3}, \text{ etc.}$$

De là

$$S<(k-1)[u_1+ku_k+k^2u_{k^2}+\dots] \text{ et } >\frac{k-1}{k}[ku_k+k^2u_{k^2}+\dots].$$

Les sommes S et $S_1=u_1+ku_k+k^2u_{k^2}+\dots$ sont donc ensemble finies ou infinies, ce qui prouve le théorème. Pour $k=2$, on a un théorème donné par M. Cauchy dans son analyse algébrique.

Proposition II. Les séries suivantes (A), où ln indique le logarithme de n pour une base quelconque, et α un nombre

réel positif ou négatif, restent de même espèce quand on y remplace n par an, a étant un nombre réel positif,

$$\left.\begin{array}{ll} 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\cdots & +\frac{1}{n^\alpha}\cdots \\ 1+\frac{1}{2(l2)^\alpha}+\frac{1}{3(l3)^\alpha}\cdots & +\frac{1}{n(ln)^\alpha}\cdots \\ 1+\frac{1}{2l2(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3l3(ll3)^\alpha}\cdots & +\frac{1}{nln(lln)^\alpha}\cdots \\ 1+\frac{1}{2l2ll3(lll2)^\alpha}\cdots & +\frac{1}{nln.lln.(llln)^\alpha}\cdots \end{array}\right\} \quad (A)$$

Démonstration Représentons ces séries par S, S', S'', S'''... et par S_a, S'_a, S''_a, S'''_a,... quand on y change n en an, on a d'abord $S_a = \frac{1}{a^\alpha} S$, ainsi S et S_a sont de même espèce.

En supposant $a > 1$, et prenant n de manière à obtenir $lan < aln$ $\left(\text{d'où } ln > \frac{\log a}{a-1}\right)$. Si l'on regarde le terme répondant à cet indice comme le premier de la série, on aura $S_a < S$ et $S'_a > \frac{1}{a^{1+\alpha}} S'$, donc S' et S'_a sont de même espèce.

Pareillement, n étant pris de manière à avoir $llan < laln < alln$, on trouve $S''_a < S''$ et $S''_a > \frac{1}{a^{2+\alpha}} S''$, ainsi S'' et S''_a sont de même espèce, et ainsi de suite.

En supposant $a < 1$, ou en posant $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$, à cause de $l\frac{n}{b} > \frac{1}{b} ln$ $\left[\text{d'où } \left(1-\frac{1}{b}\right) ln > lb\right]$, on verra que les inégalités auront lieu en sens contraire, et la conclusion restera la même.

Proposition III. Les séries (A) sont toutes convergentes pour $\alpha > 1$ et divergentes pour $\alpha = 1$ ou < 1.

Démonstration. Si l'on applique à ces séries la proposition I, la série ku_k, $k^2u_{k^2}$, etc.; deviendra

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{k^{\alpha-1}}+\frac{1}{k^{2(\alpha-1)}}+\frac{1}{k^{3(\alpha-1)}}\cdots+\frac{1}{k^{n(\alpha-1)}}\cdots\\
\frac{1}{(lk)^\alpha}+\frac{1}{(2lk)^\alpha}+\frac{1}{(3lk)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(nlk)^\alpha}\cdots\\
\frac{1}{lk.(lk)^\alpha}+\frac{1}{2lkl(2lk)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{nlk,l(nlk)^\alpha}\cdots\\
\frac{1}{lk.llk.(lllk)^\alpha}+\frac{1}{2lk.ll(2k).lll(2k)^\alpha}+\frac{1}{nlk.l(nlk)[ll(nlk)]^\alpha}\cdots\\
\text{etc.}
\end{array}\right\}\ (B)$$

On remarquera que la première série (B) est une progression géométrique, elle est donc convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha = 1$ ou < 1, il en sera donc de même de la première série (A). La deuxième série (B) n'est que la première série (A), où l'on aurait remplacé n par nlk, donc la deuxième série (B), et par suite la deuxième série (A), sont convergentes ou divergentes, dans les mêmes cas que la première série (A); la troisième série (B) revenant à la deuxième série (A), où n est remplacé par nlk, il s'ensuit que la troisième série (B), et par suite la troisième série (A) seront convergentes ou divergentes dans les mêmes cas que la deuxième série (A), et par suite que la première série (A), et ainsi de suite.

Proposition IV. Si au-dessus d'une certaine valeur de n, les expressions

$$\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{ln},\ \frac{l\left(\frac{1}{nu_n}\right)}{lln},\ \frac{l\left(\frac{1}{nln.u_n}\right)}{llln},\ \frac{l\left(\frac{1}{nlnlln.u_n}\right)}{lllln},\ \text{etc.},\quad (C)$$

sont < 1, la série $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$ sera divergente, au contraire si au delà de certaines valeurs de n les expressions (C) surpassent $1+\delta$, δ étant une quantité finie, la série sera convergente (*).

(*) On doit à M. O. Bonnet des démonstrations analogues. (*Journ. de Mathématiques*, VIII, 73.) Tm.

Démonstration. Posez $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, il en résulte $\alpha = \frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{ln}$, la série u_n, u_{n+1}, u_{n+2}... devenant $\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha'}} + \frac{1}{(n+2)^{\alpha''}}\dots$ si $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sont <1, la série surpassant $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\dots$ sera divergente. Au contraire si $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sont $> 1 + \delta$, la somme de la série sera moindre que

$$\frac{1}{n^{1+\delta}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\delta}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\delta}}\dots$$

quantité finie. La série sera donc convergente. Cette règle est de M. Cauchy et les autres sont de M. Bertrand ; elles se démontrent de même, on les emploiera quand celle de M. Cauchy est en défaut, car pour certaines séries $\delta = 0$, et alors on ne peut conclure la convergence. M. Bertrand a démontré la proposition III, par la considération des intégrales définies. Pour plus de détails, voyez son mémoire (*Journal de Mathématiques*, t. VII, p. 55), il s'y trouve une autre série de règles de convergence.

La règle de M. Cauchy permet de vérifier la proposition suivante qui est importante.

Propositon V. Dans une série renfermant des termes négatifs, si on change l'ordre des termes, on pourra 1° changer la somme sans détruire la convergence ; 2° détruire la convergence, c'est-à-dire, rendre la série divergente, de convergente qu'elle était.

1° Les séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2},$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2},$$

sont toutes deux convergentes, car dans la première, les

termes vont en décroissant, et il en sera de même de la seconde en remplaçant $1+\frac{1}{3}$ par $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ par $\frac{12}{35}$, etc.

D'ailleurs si l'on prend pour termes généraux

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2n+1\,.\,2n+2};\quad \frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-$$
$$-\frac{1}{2n+2}=\frac{8n+5}{(4n+1)\,(4n+3)\,(2n+2)},$$

chaque terme de la deuxième série, surpassant le terme correspondant de la première, on devra en conclure que la somme de la première série, est moindre que celle de la deuxième.

2° La série $1-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{4}}+\ldots$ est convergente; mais si au lieu de prendre les termes négatifs de 2 en 2, on les prend comme plus haut, de 3 en 3, la série

$$1+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{1}{4}},\ldots$$
$$\sqrt{\frac{1}{4n+1}}+\sqrt{\frac{1}{4n+5}}-\sqrt{\frac{1}{2n+2}},$$

sera divergente. La règle de M. Cauchy donne, en supposant n fort grand,

$$\sqrt{\frac{1}{4n+1}}+\sqrt{\frac{1}{4n+3}}-\sqrt{\frac{1}{2n+2}}=\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{n}},$$

et

$$\frac{l.\dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}{ln}=\frac{1}{2}+\frac{l\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)}{ln}<1.$$

Ces exemples sont pris d'un mémoire de M. Dirichlet, où il établit que toute progression arithmétique renferme une infinité de nombres premiers, quand le premier terme et la raison sont premiers entre eux.

OBSERVATIONS

sur le théorème de M. Lamé, relativement au plus grand commun diviseur, et nouvelle démonstration de ce théorème.

PAR E. FINCK,
Docteur ès sciences, professeur de mathématiques à Strasbourg.

—

J'ai donné dans les *Nouvelles Annales*, un théorème pour déterminer une limite du nombre des opérations de la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Ce théorème a trouvé place dans la seconde partie de mon arithmétique, pages 57 et 58. J'en rappellerai l'énoncé : *si* B *est le plus petit des deux nombres, et qu'on cherche le plus petit nombre entier* n, *qui rend* $2^n > \frac{B+1}{2}$, 2n *sera une limite du nombre des opérations*. On peut conclure de là, qu'il suffit que $n+1$ soit $> \frac{\log (B+1)}{\log 2}$, et, si c est le nombre des chiffres de B, il suffit que $n+1 > \frac{c}{0,3}$, car $\log 2 > 0,3$. De là pour $2n$, la limite $\frac{2c}{0,3} - 2$ ou $\frac{20}{3}c - 2$.

M. Lamé donne la limite plus simple $5c$, et il se sert à cet effet de la série 1, 2, 3, 5, 8..., dont les premiers termes sont 1, 2, chacun des autres étant la somme des deux précédents. J'ai considéré dans mon arithmétique, page 128, la même série dans un but analogue. Ici je la remplacerai par une autre; mais il faut reprendre les choses de plus haut, et d'abord, je dis que si B est égal au $n^{ième}$ terme de la série

$$1, 2, 3, 5, 8, \text{etc.} \qquad (1)$$

il n'y aura jamais plus de n opérations, et si B est $<$ que ce $n^{ième}$ terme, il y aura moins de n opérations.

En effet, soient R_1, R_2... les restes; φ_1, φ_2... les quotients. Il vient:

$$\left.\begin{array}{l} A = B\varphi_1 + R_1 \\ B = R_1\varphi_2 + R_2, \text{ etc.} \end{array}\right\} (2).$$

Remarquons que si on prend dans (1) deux termes consécutifs, pour en chercher le plus grand commun diviseur, les restes seront précisément les termes précédents de (1), et le nombre des opérations sera le rang du plus petit des deux termes, dont on chercherait le plus grand commun diviseur. D'ailleurs, les quotients et le dernier diviseur auraient leurs valeurs minima, savoir : 2 pour le dernier quotient, et 1 pour tous les autres et le dernier diviseur. Par conséquent, si A et B donnent lieu à n opérations, il s'ensuit que B $\overline{>}$, au $n^{ième}$ terme de (1). En effet, si les quotients et le dernier diviseur ont leurs valeurs minima, les nombres R_{n-1}, R_{n-2},... R_1, B seront les n premiers termes de (1), et auront aussi chacun sa plus petite valeur. Donc, dans tout autre cas, B sera $>$ le terme de rang n.

Donc si B $=$ le terme de rang n, il n'y a pas plus de n opérations, et à fortiori si B est $<$ que ce terme. La détermination du maximum du nombre des opérations revient donc à celle du rang du terme qui dans (1) est égal, ou immédiatement supérieur à B.

On y parviendrait au moyen du terme général de (1), traitée comme une série récurrente : mais ce terme n'étant pas maniable, je remplacerai la série (1) par une autre. Cette série (1) se rapporte à la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$

dont les réduites sont

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \text{ etc.} \qquad (3)$$

Parmi ces réduites, j'en prends une qui soit de rang impair : $\frac{8}{5}$, ainsi que chacune des suivantes, convient : je dirai tout à l'heure pourquoi $\frac{3}{2}$ ne convient pas. Je forme la série géométrique

$$1, \frac{8}{5}, \left(\frac{8}{5}\right)^2, \left(\frac{8}{5}\right)^3, \ldots \qquad (4)$$

sauf le premier terme, chacun des autres est $<$ que son correspondant pris dans (1); on peut s'en convaincre pour le deuxième et le troisième; pour les suivants, dans (1) chacun se déduit du précédent au moyen d'un multiplicateur égal à l'une des réduites (3), à partir de $\frac{5}{3}$; aucune de ces réduites n'est moindre que $\frac{8}{5}$ raison de la série (4); donc, etc.

Il s'ensuit que si B $\overline{<}$ que le $n^{\text{ième}}$ terme de (4), B est $<$ que le $n^{\text{ième}}$ terme de (1). Donc, si B $\overline{<}$ que $\left(\frac{8}{5}\right)^x$, qui est le terme de rang $x+1$ dans (4), B est $<$ que le terme de rang $x+1$ dans (1), et il y aura au plus x opérations; mais B sera $\overline{<} \left(\frac{8}{5}\right)^x$, si x est un nombre entier au moins égal à $\frac{\log B}{\log 8 - \log 5} = \frac{\log B\ldots}{0{,}204\ldots.}$. Soit c le nombre des chiffres de B; log. B est ainsi $<c$; il s'ensuit, que le maximum du nombre des opérations est le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{c}{0{,}204}$, nombre entier qui ne surpasse pas $\frac{c}{0{,}2}$ ou $5c$.

J'ajoute que la formule $\frac{\log B}{0{,}204}$ donnera souvent une limite

moindre ; c'est ainsi que si B=15 3, elle donne $\frac{2,184}{0,204}$ ou 11, au lieu de 15.

J'ai dit que la réduite $\frac{3}{2}$ ne convient pas pour raison de la série auxiliaire; cela tient à ce que $\log\frac{3}{2}=0,176$ et la limite serait $\frac{c}{0,176}\left(\text{ou } \frac{\log B}{0,176}\right)$, qui conduirait à 6c.

Chacune des réduites de rang impair qui suivent $\frac{8}{5}$ donne un log. plus grand que 0,204, mais on y gagnerait peu de chose; car ces réduites sont toutes moindres que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, valeur de la fraction continue citée; or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a pour log. une quantité qui reste au-dessous de 0,209, de sorte que le dénominateur de log. B, ne peut s'élever jusqu'à 0,209.

Si on emploie des quotients excédants, chaque reste est moindre que la moitié du précédent, diminué préalablement d'une unité, et ces restes successifs ont pour maxima

$$\frac{B-1}{2}, \quad \frac{B-1-2}{2^2}, \quad \frac{B-1-2-2^2}{2^3}, \ldots \quad \frac{B-1-2-\ldots-2^{n-1}}{2^n} =$$

$$= \frac{B-2^n+1}{2^n}.$$

Si donc ce dernier est <2, l'opération est terminé à la $n^{ième}$ division ; de là

$$B-2^n+1<2^{n+1} \text{ ou } B+1<2^n.3,$$

et

$$2^n>\frac{B+1}{3}, \text{ ou } n>\frac{l.(B+1)-l.3}{l.2}.$$

On peut donc prendre ce nombre pour limite, ou si l'on veut $\frac{l.(B+1)}{l.2}-1$, ou encore $\frac{10}{3}\,l.\ (B+1)-1$, nombre plus simple que la limite donnée par M. Binet. (*Compte rendu*, n° 19 du 2me semestre 1844.)

NOTE

Sur le nombre qui indique combien il y a d'entiers inférieurs et premiers à un nombre donné.

PAR M. E. PROUHET,
professeur au Collége royal d'Auch.

---

1. Le nombre qui indique combien il y a d'entiers inférieurs et premiers à un nombre donné, jouit de plusieurs propriétés importantes. Mais, comme chaque fois qu'on en parle, on est obligé de le désigner par une longue périphrase, ces propriétés deviennent d'un énoncé fastidieux et d'une démonstration prolixe. Afin d'éviter cet inconvénient, nous proposerons de désigner ce nombre par un nom particulier et de choisir pour cet objet le mot *indicateur*, qui n'a encore reçu aucun emploi en mathématiques. Dans le courant de cet article, le symbole i (N) servira à représenter l'indicateur d'un entier N (*).

I.

Nous allons d'abord nous proposer de trouver l'indicateur d'un nombre N, décomposé en ses facteur premiers. Les deux lemmes suivants faciliteront beaucoup cette recherche.

2. LEMME I. *Si a et b sont deux nombres premiers entre eux ; α un nombre inférieur et premier à a ; β un nombre inférieur et premier à b ; il n'existe qu'un seul nombre $z < ab$, qui soit à la fois $\dot{a}+\alpha$ et $\dot{b}+\beta$.*

Démonstration. La recherche du nombre z revient à la résolution de l'équation indéterminée

$$ax+\alpha = by+\beta,$$

laquelle est, comme on sait, toujours possible quand a et b

(*) Ce symbole est le φ de M. Gauss (Disq., § 38). Tm.

sont premiers entre eux. De plus, si on trouve un nombre remplissant les deux conditions, si on en retranche le plus grand multiple de ab qui y est contenu, le reste plus petit que ab, les remplira encore. Ainsi on voit qu'il existe un nombre $z < ab$ et à la fois $\dot{a} + \alpha$ et $\dot{b} + \beta$.

Je dis maintenant qu'il n'en existe qu'un, car s'il y en avait un autre z' on aurait :

$$z - z' = \dot{a} = \dot{b} = (\dot{\overline{ab}}).$$

ce qui est impossible puisque $z - z'$ est $< ab$. Donc, etc.

3. Lemme II. *L'indicateur du produit de plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, est égal au produit des indicateurs de ces nombres* (*).

Démonstration. Soient d'abord deux nombres a et b premiers entre eux. Désignons par

(1) $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 \ldots \alpha_{i(a)},$

les nombres inférieurs et premiers à a et par

(2) $\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3 \ldots \beta_{i(b)},$

les nombres inférieurs et premiers à b.

Tout nombre premier avec ab doit, si on le divise par a, donner pour reste un des termes de la suite (1), et si on le divise par b, donner pour reste un des termes de la suite (2). Mais parmi les nombres plus petits que ab, il n'y en a qu'un qui soit à la fois $\dot{a} + \alpha_1$ et $\dot{b} + \beta_1$ un seul à la fois $\dot{a} + \alpha_2$ et $\dot{b} + \beta_2$, etc.

Donc il y aura autant d'entiers inférieurs et premiers à ab que l'on pourra fournir de combinaisons avec les termes des deux suites, en prenant toujours un de la première et un de la seconde, c'est-à-dire $i(a)$, $i(b)$. Donc

$$i(ab) = i(a)\, i(b);$$

si maintenant c désigne un nombre premier avec a et b, ab étant premier avec c, on aura :

(*) Disq., § 38, III.

$$i\,(abc) = i\,(ab)\ \ i\,(c)\,,$$

donc

$$i\,(abc) = i\,(a)\,i\,(b)\,i\,(c).$$

Ainsi le théorème est vrai pour le cas de trois facteurs. On l'étendrait successivement au cas de 4, 5,....n facteurs. Donc il est général.

4. Problème. *Trouver l'indicateur d'un nombre donné N.*

Solution. Supposons d'abord $N = \alpha^m$, α étant un nombre premier. Parmi les α^m nombres

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\ldots\alpha^m,$$

il n'y a que les suivants

$$\alpha,\ 2\alpha\,,\ 3\alpha\,,\ldots.\alpha^{m-1}.\ \alpha,$$

au nombre de α^{m-1} qui ne soient pas premiers avec α^m. Donc on aura :

$$i\,(\alpha^m) = \alpha^m - \alpha^{m-1},$$

ou bien

$$(3)\qquad i\,(\alpha^m) = \alpha^{m-1}\,(\alpha - 1).$$

Soit maintenant

$$N = \alpha^m\,\beta^n\ldots.\lambda^r$$

α, β,...λ, étant des nombres premiers inégaux, on aura d'après le lemme II :

$$i\,(N) = i\,(\alpha^m)\ i\,(\beta^n)\,i\,(\gamma^p)\ldots.\ i\,(\lambda^r),$$

et d'après la formule (3) :

$$i\,(N) = \alpha^{m-1}\,(\alpha - 1)\beta^{n-1}\,(\beta - 1)\ldots.\ \lambda^{r-1}\,(\lambda - 1)\,;$$

formule qu'on peut encore écrire ainsi :

$$i\,(N) = N\left((1 - \frac{1}{\alpha}\right)\ \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\ldots..\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).\qquad (*)$$

(*) Voir, tome I, p. 467. La première démonstration de ce théorème est due à Euler (Comm. Petrop. VIII, p. 74). Tm.

II.

5. Problème. ***Étant donnés les indicateurs de plusieurs nombres, trouver l'indicateur de leur produit.***

Solution. Soient a et b deux entiers quelconques ; α, α', α'',... les facteurs premiers inégaux communs à a et b ; a_1 et b_1 deux nombres non divisibles par aucun des nombres premiers α, α', α''.... Posons :

$$a = \alpha^{m}\alpha'^{m'}\alpha''^{m''} \ldots a_1$$
$$b = \alpha^{n}\alpha'^{n'}\alpha''^{n''} \ldots b_1$$

on aura, d'après ce qui précède :

$$i\,(a) = \alpha^{m-1}\,(\alpha-1)\,\alpha'^{m'-1}\,(\alpha'-1)\ldots i\,(a_1)$$
$$i\,(b) = \alpha^{n-1}\,(\alpha-1)\,\alpha'^{n'-1}\,(\alpha'-1)\ldots i\,(b_1)$$
$$i\,(a)\,i\,(b) = \alpha^{m+n-2}\,(\alpha-1)^2\,\alpha'^{m'+n'-2}\,(\alpha'-1)^2\ldots i\,(a_1)\,i\,(b_1)$$
$$i\,(ab) = \alpha^{m+n-1}\,(\alpha-1)\,\alpha'^{m'+n'-1}\,(\alpha'-1)\ldots i\,(a_1)\,i\,(b_1).$$

Donc

$$i\,(ab) = i\,(a)\,i\,(b)\,\frac{\alpha\alpha'\alpha''\ldots}{(\alpha-1)\,(\alpha'-1\,(\alpha''-1)\ldots},$$

ou bien si on pose $\delta = \alpha\alpha'\alpha''\ldots$ d'où $(\alpha-1)\,(\alpha'-1)\ldots = i\,(\delta)$, on aura plus simplement :

$$i\,(ab) = i\,(a)\,i\,(b)\,\frac{\delta}{i\,(\delta)}.$$

Soit maintenant un troisième nombre c et δ' le produit des facteurs premiers communs à ab et c. Nous aurons d'après la dernière formule :

$$i\,(abc) = i\,(ab)\,i\,(c)\,\frac{\delta'}{i\,(\delta')},$$

ou bien

$$i\,(abc) = i\,(a)\,i\,(b)\,i\,(c)\,\frac{\delta\delta'}{i\,(\delta)\,i\,(\delta')}.$$

On voit facilement que les facteurs premiers qui divisent a et c sans diviser b, ou b et c sans diviser a, ou a et b sans

diviser c, entrent une seule fois dans le produit $\delta\delta'$, et qu'il en est de même de leurs indicateurs dans le produit $i(\delta)\, i(\delta')$. Quant aux facteurs premiers communs aux trois nombres, et par conséquent à δ, ils doivent entrer à la deuxième puissance $\delta\delta'$, et leurs indicateurs aussi dans $i(\delta)\, i(\delta')$. Donc si on appelle

δ_2 le produit de 2 facteurs premiers communs à deux des nombres a, b, c;

δ_3 le produit des facteurs premiers communs aux trois nombres,

on aura :

$$i(abc) = i(a)\, i(b)\, i(c)\, \frac{\delta_2}{i(\delta_2)} \cdot \frac{\delta_3^2}{i(\delta_3)^2}.$$

En continuant à raisonner de la même manière, on voit que si $a, b, c \ldots l$ sont n nombres entiers quelconques, $\delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ les produits des facteurs premiers inégaux communs respectivement à $2, 3, \ldots n$ des nombres proposés, on aura :

$$i(abc..l) = i(a)\, i(b)\, i(c) \ldots i(b)\, \frac{\delta_2}{i(\delta_2)} \cdot \frac{\delta_3^2}{i(\delta_3)^2}\, \frac{\delta_4^3}{i(\delta_4)^3} \cdots \frac{\delta_n^{n-1}}{i(\delta_n)^{n-1}},$$

formule qui résout le problème proposé.

6. *Corollaire.* Soit $N = A^m$ et a le produit des facteurs premiers inégaux de A. Si on considère A^m comme le produit de facteurs égaux à A, on aura $\delta_m = am$ et la formule générale donnera :

$$i(A^m) = i(A)^m \cdot \frac{a^{m-1}}{i(a)^{m-1}},$$

ou, à cause de $i(A) = \frac{A}{a}\, i(a)$,

$$(A^m) = \frac{A^m\, i(a)}{a}.$$

Quand $a = A$, c'est-à-dire lorsque les facteurs premiers de

de A n'y entrent qu'à la première puissance, on a plus simplement :

$$i\,(\mathrm{A}^m) = \mathrm{A}^{m-1}\,i\,(\mathrm{A}).$$

III.

7. Théorème. *La somme des indicateurs de tous les diviseurs d'un nombre est égale à ce nombre* (*).

Démonstration. Soit

$$\mathrm{N} = \alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots \lambda^r$$

un entier décomposé en ses facteurs premiers. Tout diviseur de N sera de la forme

$$d = \alpha^x \beta^y \gamma^z \ldots \lambda^v,$$

d'où

$$i\,(d) = \alpha^{x-1}\,(\alpha-1)\;\beta^{y-1}\,(\beta-1)\,\gamma^{z-1}\,(\gamma-1)\ldots\,\lambda^{v-1}\,(\lambda-1).$$

Pour avoir les indicateurs de tous les diviseurs de N, il faudra faire varier dans cette expression x de 0 à m, y de 0 à n, etc. En ayant soin de supprimer le facteur $(\alpha-1)$ quand $x=0$; le facteur $(\beta-1)$ quand $y=0$, etc. Or un peu d'attention suffit pour faire voir que tous ces indicateurs seront les différents termes du produit

$$[(1+(\alpha-1)+\alpha\,(\alpha-1)+\alpha^2\,(\alpha-1)+\ldots+\alpha^{m-1}\,(\alpha-1)]\times$$
$$[(1+(\beta-1)+\beta\,(\beta-1)+\beta^2(\beta-1)+\ldots+\beta^{n-1}\,(\beta-1)\ldots]$$
$$[\ldots(1+(\lambda-1)+\lambda\,(\lambda-1)+\lambda^2\,(\lambda-1)+\ldots+\lambda^{r-1}\,(\lambda-1)].$$

Mais le premier facteur de ce produit $= \alpha^m$, le second $= \beta^n$,.... le dernier égale λ^r. Donc

$$\Sigma i\,(d) = \alpha^m \beta^n \ldots \lambda^r = \mathrm{N},$$

C. Q. F. D.

IV.

8. Voici encore quelques théorèmes dans lesquels l'indicateur joue un rôle important.

(*) Disq., § 39. Tm.

Deux nombres a *et* p *étant premiers entre eux, on a toujours* $a^{i(p)} - 1 = \dot{p}$. On en déduit comme corollaire ce célèbre théorème de Fermat : *si* p *est premier* $a^{p-1} - 1 = \dot{p}$.

Si p *est un nombre premier et* n *un diviseur de* $p^{m-1}(p-1)$ *ou de* $i(p^m)$, *on trouvera toujours* $i(n)$ *nombres inférieurs à* p^m, *dont les puissances divisées par* p^m *donnent* n *résidus différents.*

Nous nous proposons de revenir sur ce dernier théorème dans un prochain article, qui aura pour objet l'étude des périodes de résidus, obtenus en divisant les puissances d'un nombre *a* par un nombre *p* premier avec *a*.

THÉORÈME SUR LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

PAR O. R.

—

Soit A un nombre de $p+1$ chiffres, n un facteur quelconque par lequel on multiplie le chiffre des unités de A, si l'on ajoute à ce produit le chiffre des dizaines, qu'on multiplie le résultat par n, qu'on ajoute à ce second produit le chiffre des centaines, etc.; qu'on répète la même opération jusqu'au chiffre de l'ordre le plus élevé de A, et qu'on désigne par R, le dernier résultat de ces opérations, la divisibilité de A par un diviseur quelconque de $10n-1$ dépendra de R.

Si, au lieu de procéder uniquement par l'addition, on emploie alternativement la soustraction et l'addition, retranchant du premier produit le chiffre des dizaines, ajoutant au second les chiffres des centaines, retranchant du troisième le chiffre des mille, etc., la divisibilité du dernier résultat obtenu R, par un diviseur de $10n+1$, sera la même que celle de A.

Dans les deux modes de vérification, on simplifiera le calcul, en élaguant successivement tous les multiples du diviseur essayé, à mesure qu'ils seraient compris dans les résultats successifs.

Si l'on considère la fraction $\frac{R}{n^p}$, et qu'on désigne par ρ le nombre qu'il en faut retrancher pour que son numérateur $R - \rho n^p$ soit divisible par le diviseur qu'on a en vue, ρ sera aussi le reste de la division de A par ce diviseur.

La démonstration de ce théorème est très-simple, car on a évidemment :

$R = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + a_3 n^{p-3} + \ldots + a_p$; a_0, a_1, a_2, a_p, désignant les chiffres de A, de manière que

$$A = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1}, \ldots a_1 . 10 + a_0,$$

d'où l'on tire :

$$n^p (A - \rho) = (\overline{10n}^p - 1)\, a_p + na_{p-1} (\overline{10n}^{p-1} - 1) +$$
$$+ n^2 a_{p-2} (\overline{10n}^{p-2} - 1) \ldots\ldots + R - \rho n^p.$$

Si l'on considère les diviseurs de $10n - 1$; pour ceux de $10n + 1$, on a :

$$R = a_0 n^p - a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} \ldots\ldots \pm a_p,$$

et $n^p (A - \rho) = (\overline{10n}^p \mp 1)\, a_p + na_{p-1} (\overline{10n}^{p-1} \pm 1)$, etc.

Le théorème énoncé résulte de la considération de ces relations.

Exemples : Diviseurs de $10n - 1$ et de $10n + 1$, qu'on peut vérifier par la méthode que nous venons d'exposer.

$n = 1$ donne	3, 9 pour diviseur de $10n - 1$, et	11 pour diviseur de $10n + 1$
$n = 2$	19	3, 7, 21
$n = 3$	29	31
$n = 4$	3, 13, 39	41
$n = 5$	7, 49	3, 17, 51
$n = 6$	59	61
$n = 7$	3, 23, 69	71
$n = 8$	79	3, 9, 27, 81
$n = 9$	89	91
$n = 10$	3, 9, 11, 99	101
$n = 11$	7, 17. 119	131

NOTE

SUR LA THÉORIE DES ÉPICYCLOIDES.

PAR UN ABONNÉ.

Tout ce qu'on a pu trouver sur la rectification et sur la quadrature des Épicycloïdes, me paraît renfermé dans deux théorèmes qui s'appliquent aux roulettes en général. (On appelle *Épicycloïde* la courbe engendrée par un point quelconque du plan d'un cercle roulant sur un autre cercle ; — *Roulette*, la courbe engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe roulant sur une autre courbe.) — Voici ces deux théorèmes :

Si un arc de courbe roule sans glissement, d'abord sur la convexité, puis dans la concavité d'une autre courbe, de sorte que, dans ces deux roulements, les mêmes points de la courbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points de la courbe fixe :

1er Théorème : *La somme ou la différence des deux arcs décrits par un point quelconque du plan de la courbe mobile sera indépendante de la nature de la courbe fixe : — la somme, si le rayon de courbure de la courbe fixe est, en chacun des points de contact, plus grand que celui de la courbe mobile ; la différence, dans le cas contraire.*

2me Théorème. *Si on considère, dans chacun de ces deux roulements, l'aire du quadrilatère mixtiligne, limité par l'arc de la courbe fixe, l'arc de la roulette décrite, et les deux lignes droites qui joignent les premières et dernières extrémités de ces*

arcs ; la somme des deux quadrilatères sera une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la nature de la courbe fixe (au lieu de la somme entendez la différence, dans la même circonstance que ci-dessus).

Pour s'assurer de la vérité de ces théorèmes, il suffit de considérer : 1° que l'arc de roulette se forme en multipliant la normale, qui va du point décrivant au point de contact des courbes directrices, par la somme des angles de contingence, lorsque le roulement est sur convexité ; et par la différence de ces mêmes angles, quand le roulement se fait en concavité. — 2° : Que l'aire de la roulette se forme en ajoutant à chaque instant, au petit secteur curviligne qui a son sommet au point décrivant et pour base le petit arc de courbe mobile, cet autre secteur dont on vient d'exprimer l'arc, et dont le sommet, ou centre, est au point actuel de contact ; de sorte que le quadrilatère mixtiligne de la roulette, surpasse l'aire du secteur fini de la courbe mobile d'une certaine quantité qui est la somme de tous les petits secteurs engendrés par le roulement.

II. Il résulte de ces théorèmes généraux, que si on connait la longueur et l'aire des deux roulettes que décrit un point du plan d'une courbe roulant sur une courbe fixe particulière, on connaîtra les longueurs et aires de toutes les doubles roulettes, décrites par le même point, quand la courbe fixe est quelconque.

III. Il convient de remarquer par rapport à la courbe fixe, trois cas principaux :

1° Si la ligne fixe est une droite, il n'y a pas de différence entre sa concavité et sa convexité ; ainsi la longueur et l'aire de la roulette sur une droite est toujours moitié de la somme (ou différence) des longueurs et aires des deux roulettes décrites sur concavité et convexité d'une courbe quelconque.

2° Si l'on prend pour courbe fixe une courbe identique à la courbe mobile, en ayant soin que ces deux courbes se

touchent dans le roulement par leurs points semblables, il n'y aura pas de roulement possible en concavité ; il n'y aura pas, veux-je dire, de *roulette intérieure* ; ainsi l'arc de la *roulette extérieure* sera alors précisément le double de l'arc de roulette sur une droite. Et, dans le même cas, l'aire de la roulette extérieure surpassera le secteur fini de la courbe mobile (*) d'une quantité double de l'excès qu'il a sur ce même secteur quand la ligne fixe est une droite.

3° Si on suppose qu'aux points correspondants de la courbe fixe et de la courbe mobile, les deux rayons de courbure ont constamment le même rapport, comme cela arrive manifestement dans le cas des Épicycloïdes, alors les angles de contingence ayant toujours entre eux aussi un même rapport ; il s'ensuit que la somme (ou différence) constante des deux arcs finis de roulettes, se trouvera partagée, entre la roulette extérieure et la roulette intérieure, dans le rapport de la somme des rayons de courbure à leur différence ; les excès de chaque aire de ces deux roulettes, sur le secteur fini de la courbe mobile, excès dont la somme (ou la différence) est constante ; ces excès, dis-je, dans la même circonstance, se partageront aussi entre la roulette extérieure et la roulette intérieure, dans ce même rapport de la somme des rayons de courbure à leur différence.

Ces principes généraux étant bien compris, nous allons faire la rectification et la quadrature (indéfinies) de toutes les épicycloïdes, que nous distinguerons, comme on l'a toujours fait, en *épicycloïdes ordinaires*, *épic. allongées et épic. accourcies*.

IV. *Rectification et aire des épicycloïdes ordinaires.*

On doit à Cardan le cas particulier d'une épicycloïde ordi-

(*) Je veux dire le secteur de la courbe mobile qui a son sommet au point décrivant ; et dont les deux rayons vecteurs vont aux extrémités de l'arc qui s'est enroulé sur la courbe fixe.

naire se réduisant à une ligne droite; c'est l'*épicycloïde intérieure* produite par le point d'une circonférence roulant dans la concavité d'une circonférence de rayon double : théorème très-curieux qui se démontre par la géométrie la plus simple, et qui offre à l'art des machines une très-belle transformation du mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne alternatif.

Dans ce théorème de Cardan, l'épicycloïde intérieure a pour longueur totale le diamètre du cercle fixe; en même temps l'aire totale de cette épicycloïde est la moitié du cercle fixe, ou le double du cercle roulant.

Ensuite, si on faisait tourner extérieurement le petit cercle sur le grand, on aurait, en vertu de la troisième remarque ci-dessus, une longueur totale égale à *six fois* le diamètre du cercle roulant; et l'aire de cette roulette extérieure (limitée à l'épicycloïde et au cercle fixe) serait égale à *quatre fois* l'aire du cercle roulant, puisque son excès sur l'aire de cercle roulant doit être égal à trois fois l'excès qui est relatif à la roulette intérieure.

Donc si on fait rouler un cercle sur une courbe quelconque, d'abord dans la concavité, ensuite dans la convexité, en partant de la même origine, de manière que les deux roulettes se réunissant après le déroulement total de la circonférence mobile, offrent une courbe fermée, la LONGUEUR totale de cette courbe fermée sera de *huit fois le diamètre du cercle générateur*, et son AIRE sera *six fois l'aire du cercle générateur*.

La *cycloïde ordinaire* a donc pour longueur *quatre fois le diamètre du cercle générateur*; et son aire est à celle de ce même cercle dans le rapport de *trois à un*.

D'ailleurs on aura par ce qui précède les longueurs et les aires totales de toutes les épicycloïdes, puisque connaissant le rapport entre le rayon du cercle fixe et celui du cercle mobile, on saura comment se partagent entre l'épicycloïde

intérieure et l'extérieure, la longueur et l'aire des deux courbes réunies.

Mais ce ne serait que la rectification et la quadrature *définies*. Le théorème de Cardan peut donner davantage; c'est-à-dire peut donner la rectification et la quadrature *indéfinies*.

En effet, la longueur de l'épicycloïde droite de Cardan à partir de l'origine où le point décrivant est sur le cercle fixe, cette longueur est manifestement égale à *deux fois le sinus verse de la moitié de l'arc générateur*;... et il est également facile de voir que le demi-segment du cercle fixe qui forme à chaque instant l'aire de l'épicycloïde intérieure, est *le double du segment du cercle roulant*.

D'où on conclura que la somme des arcs des deux épicycloïdes (intérieure et extérieure), décrites sur une courbe fixe quelconque; ces arcs comptés à partir de l'origine commune où le point décrivant est sur la courbe fixe, cette somme est toujours égale à *huit fois le sinus verse de la moitié de l'arc générateur*. En même temps les portions correspondantes de l'aire de ces deux épicycloïdes valent ensemble *six fois le segment du cercle générateur*.

On voit qu'en particulier on est, par ce qui précède, en possession de la rectification et de la quadrature indéfinies de la cycloïde ordinaire. Je passe aux autres épicycloïdes.

V. *Rectification et quadrature des épicycloïdes allongées ou accourcies*. Au moyen de ce qu'une ellipse est toujours épicycloïde accourcie (ou allongée) d'un cercle dont le rayon est égal à la somme (ou à la différence) de ses demi-axes, tournant intérieurement dans un cercle de rayon double, on voit que tous les arcs de cycloïde (ou d'épicycloïde) allongée ou accourcie, sont comparables à certains arcs d'une ellipse déterminée. De plus, les aires correspondantes de ces épicycloïdes se trouveront comparées à des quadrilatères

limités par deux droites, un arc de cercle et un arc d'ellipse; mais je laisse au lecteur de voir par lui-même le détail de la chose.

J'observerai seulement que si un cercle tourne extérieurement sur un cercle égal, un point quelconque de son plan décrit une courbe du genre de celles que M. Quételet appelle caustiques secondaires. (La développée de cette courbe serait la caustique par réflexion du point qui correspond dans le cercle fixe, au point décrivant mobile.) Cette courbe est algébrique à cause de l'égalité des deux cercles; c'est une courbe du quatrième degré. On aura d'après ce qui précède, sa longueur totale; elle sera égale à quatre fois le contour de l'ellipse ayant pour axes les deux segments du diamètre passant par le point décrivant; son aire totale sera également facile à calculer à l'aide des principes précédents et dépendra de l'aire de cette même ellipse. Ce résultat paraîtra d'autant plus remarquable, si on fait attention à la propriété de cette caustique secondaire remarquée par M. Sturm, qui est que la différence des distances de chacun de ses points au point lumineux et à son conjugué harmonique dans le cercle, ces deux distances multipliées respectivement par un certain coefficient constant, donne une somme invariable (*Annales de Mathémat.*, t. XV, p. 205, Gergonne); circonstance qui établit une analogie remarquable et très-étroite, entre la construction de cette courbe et celle des sections coniques.

Pascal, dans son fameux défi sur la roulette, a fait voir le premier que la longueur des cycloïdes allongées ou accourcies, dépend de la rectification de l'ellipse. Nicolle a montré la même chose pour les épicycloïdes (allongées ou accourcies) dans les mémoires de l'Académie des sciences pour 1708. Pascal avait aussi tiré de sa méthode, la détermination des deux cycloïdes allongées et accourcies qui ont des longueurs égales; ce qu'on peut aussi demander pour les épi-

cycloïdes et ce qu'on fera facilement avec ce qui précède. Pascal emploie une marche équivalente au calcul intégral, qui est aussi le procédé de Nicolle ; je ne crois pas que cette théorie ait été jamais présentée dans les termes auxquels elle se trouve actuellement réduite. Aussi m'a-t-il paru intéressant de montrer comment de simples considérations intuitives pouvaient mettre les élèves en possession de tous ces beaux résultats.

J'ajouterai comme application des théorèmes généraux que lorsqu'une section conique roule sur elle-même, chacun de ses foyers décrit un arc de cercle ; il suit de là que les diverses roulettes décrites par le foyer d'une conique, dépendent pour leur rectification et leur quadrature du problème de la quadrature du cercle.

Je termine enfin en proposant aux lecteurs des Annales, d'examiner si cette théorie peut s'appliquer aux roulettes sphériques, et surtout s'il y a quelque épycicloïde sphérique qui soit un arc de grand cercle, ce qui ferait l'analogue du beau théorème de Cardan.

NOTE

Sur le problème des lumières, et sur un paradoxe de statique.

PAR M. QUILLET.

Le problème des lumières donne lieu, dans le cas où le point cherché doit être situé sur la courbe représentée par l'équation bifocale $\varphi(z,z')=0$, à une singularité d'analyse remarquée par M. Terquem, dans une de ses intéressantes notices (note IV de la page 118, du troisième volume des *Annales*).

La discussion analytique de ce problème peut être utile, en

ce sens, qu'elle comprend presque tous les cas qui peuvent se présenter dans la recherche des valeurs maxima ou minima d'une fonction d'une seule variable entre les limites, pour lesquelles elle demeure continue. Le choix de la variable indépendante n'est pas ici purement arbitraire, et il y a une certaine liaison, que le calcul fait connaître, entre ce problème général, et celui que M. Gerono a traité. Nous examinerons, à cette occasion, dans le second paragraphe de cet article, un paradoxe de statique que l'on rencontre dans la recherche des positions d'équilibre d'une ellipse donnée, considérée comme une ligne matérielle, inflexible, uniformément pesante, et inscrite dant un angle droit, dont le plan est vertical, lorsqu'on fait abstraction du frottement de l'ellipse sur les côtés.

§ Ier.

Une ellipse donnée, dont le périmètre est sans pouvoir réflecteur, est située dans le vide, et éclairée par deux corps lumineux très-petits, par rapport à ses dimensions, et placés à ses foyers. Les intensités des deux lumières à l'unité de distance, et dans toutes les directions autour de chacune d'elles, étant respectivement représentées par (a) et par (b), qui seront des constantes données, déterminer sur le périmètre de cette ellipse, les points pour lesquels l'intensité de la lumière reçue, est un maximum, ou bien un minimum.

Si les dimensions des deux corps lumineux, autour des foyers, devenaient sensibles, par rapport à celles de l'ellipse, et que ces deux corps fussent des solides incandescents, il ne suffirait pas de les supposer sphériques, et également lumineux dans toute l'étendue de leur surface, pour être en droit de les traiter, dans le calcul, comme des points lumineux. En effet, le théorème de l'action, suivant la raison in-

verse du carré de la distance, d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur donné, suppose que l'on considère la totalité des points de cette couche, ce qu'on ne pourrait faire ici, d'après les hypothèses admises.

Les deux équations du problème, entre les deux variables z et z' qui représenteront les rayons vecteurs, et la fonction I qui mesurera l'intensité de la lumière reçue en un point quelconque de l'ellipse, seront :

$$z + z' = 2A \qquad (1)$$

$$I = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z'^2} \qquad (2)$$

(a) et (b) désignant les intensités des deux lumières qui occupent respectivement les foyers gauche et droit de l'ellipse, pour fixer les idées, nous supposerons $a > b$, la fonction I sera toujours continue entre les limites qui comprennent les valeurs possibles de z et de z', et pourra à volonté d'après l'équation (1), être considérée comme une fonction de z ou de z' seul.

On sait aussi :

1° Que lorsqu'une fonction réelle continue et explicite d'une seule variable indépendante, passe, pour une valeur particulière de cette variable, par une valeur maximum ou minimum, cette même valeur de la variable indépendante, doit rendre sa première dérivée par rapport à cette variable, nulle, infinie, ou discontinue.

2° Que pour s'assurer, dans le premier cas, s'il y a maximum ou minimum, il faut examiner si cette même valeur de la variable, donne une valeur finie et déterminée à la première des dérivées consécutives, qui cesse de s'évanouir. Cette dérivée doit être d'ordre pair, et dans ce cas, il y a maximum ou minimum pour la fonction primitive, selon que la valeur de cette dernière dérivée, est négative ou positive.

3° Que dans les deux derniers cas et même dans le précédent, si la première des dérivées consécutives qui cesse de s'évanouir prenait une valeur infinie, il est nécessaire pour décider s'il y a maximum ou minimum, et pour les distinguer, de soumettre la fonction I à une discussion spéciale.

1. Ceci étant admis, passons à l'examen du premier cas : les deux équations différentielles du problème seront :

$$dI = -\frac{2a}{z^3}dz - \frac{2b}{z'^3}dz' = 0, \qquad (3)$$

$$dz + dz' = 0, \qquad (4)$$

éliminons alternativement dz et dz' entre ces deux équations, les équations résultantes seront :

$$dz\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0, \qquad (5)$$

$$dz'\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right) = 0, \qquad (6)$$

et pourront remplacer l'équation (3).

La première manière de vérifier ces dernières, consiste à poser :

$$\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3} = 0,$$

d'où $\frac{z}{z'} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ en même temps que $z + z' = 2A$.

z, z' et I auront donc respectivement les valeurs suivantes

$$z = \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}, \quad z' = \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}},$$

$$I = \frac{a}{\left(\frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2} + \frac{b}{\left(\frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2},$$

les valeurs de z et de z' sont faciles à construire (voir les Ann. l. c.), et la détermination des points cherchés, s'effectue

immédiatement. Cette solution n'est pas toujours admissible, car le maximum de la valeur du rapport $\frac{z}{z'}$, dans une ellipse dont 2A et 2C sont respectivement le grand axe et l'excentricité, est $\frac{A+C}{A-C}$; il faut donc que l'on ait :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{A+C}{A-C},$$

et dans cette hypothèse, elle détermine sur le périmètre de l'ellipse, et du côté droit par rapport à la direction du petit axe, deux points symétriquement placés par rapport à l'autre axe, et pour lesquels l'intensité de la lumière est un minimum. En effet, pour obtenir l'expression de d^2I, différentions les équations (3) et (4), en prenant z ou z' pour variable indépendante, il en résultera :

$$\frac{d^2I}{dz^2} = \frac{d^2I}{dz'^2} = \frac{6a}{z^4} + \frac{6b}{z'^4};$$

le second membre étant positif, fini et différent de zéro, lorsqu'on y substitue les valeurs de z et de z' précédemment trouvées, et cette dérivée étant d'ordre pair, il s'ensuit qu'aux points correspondants, l'intensité de la lumière est un minimum.

2. Pour obtenir d'autres solutions, reprenons les deux expressions différentielles :

$$dz\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right), \qquad dz'\left(\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}\right),$$

et égalons dz ou dz' à zéro et à l'infini. Le facteur $\frac{a}{z^3} - \frac{b}{z'^3}$, ne devenant infini pour aucun point de l'ellipse, les équations différentielles seront ainsi satisfaites.

Il est d'ailleurs permis d'égaler dz ou dz' à zéro ou à l'infini, pourvu que z et z' soient considérées comme des fonctions d'une certaine variable indépendante. Comme il s'agit

d'une ellipse, et que les rayons vecteurs ont pour expressions :

$$z = A + \frac{Cx}{A}, \qquad z' = A - \frac{Cx}{A},$$

on ne pourra pas choisir l'abscisse pour variable indépendante, puisque l'on tire des valeurs de z et de z',

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C}{A}, \qquad \frac{dz'}{dx} = -\frac{C}{A},$$

valeurs finies et généralement différentes de zéro.

Nous choisirons pour variable indépendante l'ordonnée perpendiculaire au grand axe dont la direction passe par les points d'intersection, des deux circonférences décrites autour des foyers comme centres, respectivement avec les rayons z et z'.

3. Dans cette hypothèse, les équations (3), (4), (5), (6), deviendront :

$$\frac{dI}{dy} = -\frac{da}{z^2}\frac{dz}{dy} - \frac{db}{z'^2}\frac{dz'}{dy} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz'}{dy} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{dz}{dy}\left(\frac{a}{z^2} - \frac{b}{z'^2}\right) = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{dz'}{dy}\left(\frac{a}{z^2} - \frac{b}{z'^2}\right) = 0; \qquad (10)$$

en raison de la symétrie des formules par rapport à z et z', nous examinerons seulement les deux hypothèses :

$$\frac{dz}{dy} = 0, \qquad \frac{dz}{dy} = \infty,$$

l'expression de z en x et y étant

$$z = \sqrt{y^2 + (C + x)^2},$$

il en résulte

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y + (x + C)\dfrac{dx}{dy}}{z},$$

l'équation de l'ellipse donne :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{A^2 y}{B^2 x}.$$

Éliminons $\frac{dx}{dy}$ entre les deux équations précédentes, l'équation finale sera :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-Cy(A^2 + Cx)}{B^2 xz},$$

si donc on pose $\frac{dz}{dy} = 0$, les seules valeurs des coordonnées qui puissent convenir au problème, seront $y = 0$, d'où $x = \mp A$, l'hypothèse $\frac{dz}{dy} = \infty$, donnera $x = 0$, $y = \pm B$.

4 Les quatre points qui répondent à ces couples de coordonnées, sont les quatre sommets de la courbe ; mais il reste à examiner si, en ces points, l'intensité de la lumière est bien un maximum ou un minimum, et comme on peut le pressentir, la discussion dépendra principalement de la condition restrictive trouvée plus haut, savoir :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{A + C}{A - C} \quad \text{ou encore} \quad 2C > \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - 2A ;$$

cherchons d'abord pour le cas où $\frac{dz}{dy} = 0$, la valeur correspondante et le signe de la seconde dérivée $\frac{d^2 I}{dy^2}$ pour $y = 0$, $x = \pm A$, ou plutôt pour $z = A \mp C$, $z' = A \pm C$, les signes supérieurs se correspondant ainsi que les signes inférieurs. Des deux formules

$$\frac{dI}{dy} = \frac{dz}{dy}\left(-\frac{2a}{z^3} + \frac{2b}{z'^3}\right),$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz'}{dy} = 0,$$

on déduit

$$\frac{d^2 I}{dy^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}\left(-\frac{2a}{z^3} + \frac{2b}{z'^3}\right) + \frac{dz^2}{dy^2}\left(\frac{6a}{z^4} + \frac{6b}{z'^4}\right),$$

et de l'expression de $\frac{dz}{dy}$, savoir :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-Cy(Cx + A^2)}{B^2xz},$$

on peut aussi conclure :

$$\frac{d^2z}{dy^2} =$$

$$= \frac{-B^2xz\left(C^2x+A^2C+C^2y\frac{dx}{dy}\right)+Cy(Cx+A^2)\left(B^2x\frac{dz}{dy}+B^2z\frac{dx}{dy}\right)}{B^4x^2z^2}$$

Introduisons maintenant dans les expressions de $\frac{d^2I}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, les hypothèses particulières :

$y=0$, $x=\mp A$, $\frac{dz}{dy}=0$, $\frac{dx}{dy}=0$, $z=A\mp C$, $z'=A\pm C$,

$\frac{d^2z}{dy^2}$, se réduira à la quantité

$$\frac{-C(A^2\mp AC)}{\mp B^2(A\mp C)A} = \pm\frac{C}{B^2},$$

le signe supérieur répondant à l'extrémité gauche du grand axe, et le signe inférieur à l'autre extrémité, ce qui fait voir que $\frac{d^2z}{dy^2}$, est positif pour le premier sommet, et négatif pour le second.

Pour en conclure l'ordre des signes de $\frac{d^2I}{dy^2}$, remarquons auparavant que la partie $\frac{dz^2}{dy^2}\left(\frac{6a}{z^4}+\frac{6b}{z'^4}\right)$, disparaîtra toujours, il reste donc à déterminer les signes que prend le facteur

$$-\frac{a}{z^3}+\frac{b}{z'^3},$$

dans l'une et l'autre hypothèse.

Dans la première $z=A-C$, $z'=A+C$, le signe du facteur sera négatif, donc aussi $\frac{d^2I}{dy^2}$, prendra le signe moins,

sa valeur numérique correspondante sera finie, et différente de zéro, à moins que l'ellipse ne dégénère en une circonférence; donc au sommet gauche du grand axe, l'intensité de la lumière est un maximum.

Dans la seconde hypothèse, le signe du facteur $\frac{-a}{(A+C)^3}+\frac{b}{(A-C)^3}$, change selon les valeurs numériques de (a) (b) C,A. Ainsi, l'extrémité droite du grand axe, satisfait tantôt à la condition du maximum, tantôt à celle du minimum. Si $C=0$, le signe du facteur sera négatif, mais comme $\frac{d^2z}{dy^2}$ se réduira à zéro, $\frac{d^2I}{dy^2}$ deviendra aussi nulle. Dans ce cas, on voit à priori, que tous les points de la circonférence satisfont à la fois à la condition du maximum et du minimum, et toutes les dérivées successives de I, par rapport à y se réduisant à zéro pour $C=0$, le calcul ne pourrait lever l'ambiguïté qui est évidemment inhérente à la question.

5. Il y aura maximum d'intensité à l'extrémité droite du grand axe, lorsque l'inégalité

$$-\frac{a}{(A+C)^3}+\frac{b}{(A-C)^3}>0 \text{ ou } 2C>\frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-2A$$

sera vérifiée;

mais on en tire : $\frac{a}{b}>\frac{(A+C)^3}{(A-C)^3}$, et par suite, le rapport $\frac{z}{z'}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ déterminé lors de la première solution, sera inférieur à $\frac{A+C}{A-C}$.

Ce qui fait voir que dans ce cas, l'intensité de la lumière est un maximum a l'extrémité droite du grand axe, et un minimum aux points déjà déterminés sur le périmètre de l'ellipse.

On s'explique aisément, comment ces deux derniers cas se trouvent liés entre eux, car puisque la courbe est con-

tinue, et que le rayonnement de la lumière a lieu également dans tous les sens, autour de chacune des deux lumières, entre deux maxima d'intensité consécutifs inégaux, doit exister un minimum.

6. Mais voici encore une autre manière plus naturelle de s'assurer, que dans le cas dont nous nous occupons, les points situés hors de l'axe et sur le périmètre de l'ellipse, reçoivent moins de lumière que chacun des deux sommets du grand axe.

Les valeurs de z et de z', savoir :

$$z = \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}, \qquad z' = \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

sont ainsi que l'intensité correspondante I, indépendantes, de l'excentricité 2C ; de plus, le sommet le moins éclairé du grand axe, reçoit une quantité de lumière variable avec cette excentricité, et qui a pour expression :

$$\frac{a}{(A+C)^2} + \frac{b}{(A-C)^2},$$

ou plutôt

$$\frac{a}{\nu^2} + \frac{b}{(2A-\nu)^2},$$

en faisant $A+C=\nu$ d'où $A-C=2A-\nu$.

D'un autre côté, ν et $2A-\nu$, sont d'après la nature du problème, enfermées entre les limites 0, 2A.

Ainsi, en se reportant à la discussion du problème traité par M. Gerono pour le cas d'une ligne droite de longueur 2A, dont les extrémités sont occupées par deux lumières d'intensités (a) et (b), (voir le n° cité des *Annales*), on devra avoir l'inégalité

$$\frac{a}{(A+C)^2} + \frac{b}{(A-C)^2} > \frac{a}{\left(\dfrac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2} + \frac{b}{\left(\dfrac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)^2},$$

7. On peut même, d'après la condition de l'existence des points extérieurs au grand axe, fixer pour ν et $2A - \nu$ des limites correspondantes de variabilité.

Cette condition est :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{A+C}{A-C} \quad \text{ou encore} \quad 2C > \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

ou en remplaçant $A + C$ par ν et $A - C$ par $2A - \nu$,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} < \frac{\nu}{2A-\nu},$$

d'où l'on tire :

$$\nu < \frac{2A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}; \qquad 2A - \nu < \frac{2A\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}};$$

$$\nu < 2A, \qquad 2A - \nu > 0.$$

8. Il y aura au contraire minimum à l'extrémité droite du grand axe, lorsque l'inégalité

$$-\frac{a}{(A+C)^3} + \frac{b}{(A-C)^3} < 0, \quad \text{ou bien} \quad 2C < \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

sera satisfaite, c'est-à-dire toutes les fois que les points de minimum, extérieurs au grand axe, ne pourront pas exister.

Enfin dans le cas où l'on aurait précisément :

$$-\frac{a}{(A+C)^3} + \frac{b}{(A-C)^3} = 0 \quad \text{ou} \quad 2C = \frac{4A\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - 2A,$$

$\frac{d^2I}{dy^2}$ se réduirait à zéro, et l'on ne pourrait plus conclure s'il y a ou s'il n'y a pas minimum en ce point.

Pour lever la difficulté autrement que par de nouvelles différentiations, observons qu'en raison de la symétrie de la courbe par rapport à son grand axe, le point dont il s'agit doit nécessairement être un point de maximum ou de mi-

nimum d'intensité. Or, si en ce point l'intensité était un maximum, il en résulterait, comme ci-dessus, l'existence de points de minimum hors de l'axe ; ce qui serait contre l'hypothèse, donc c'est le minimum qui doit avoir lieu.

9. Il reste encore à examiner l'hypothèse $\frac{dI}{dy}=\infty$ ou plutôt $\frac{dz}{dy}=\infty$, en écartant pour le moment le cas où le facteur $\frac{a}{z^3}-\frac{b}{z'^3}$ deviendrait nul en même temps. Or cette hypothèse rend aussi infinies toutes les dérivées successives de I par rapport à y; il faudra donc discuter directement la fonction I dans le voisinage des valeurs particulières de z et de z', qui rendent $\frac{dz}{dy}$ infini ; ces valeurs étant toutes les deux égales à A, il s'ensuit que les points correspondants de l'ellipse sont les extrémités du petit axe.

Faisons dans I, $z=A+h$, $z'=A-h$, h désignant un accroissement réel positif ou négatif, aussi petit que l'on voudra, attribué au rayon vecteur z. Soit I_A la valeur de I, qui correspond à $z=A$, $z'=A$, et désignons par I′ la valeur de I pour $z=A+h$, $z'=A-h$, nous aurons :

$$I'-I_A=\frac{a}{(A+h)^2}+\frac{b}{(A-h)^2}-\frac{a+b}{A^2}.$$

Développons en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes de h, et par la formule du binôme de Newton, les deux facteurs

$$\frac{1}{(A+h)^2},\qquad \frac{1}{(A-h)^2},$$

les deux développements arrêtés aux termes en h^2 inclusivement, seront respectivement :

$$\frac{1}{A^2}-\frac{2h}{A^3}+\frac{3h^2}{A^4},\qquad \frac{1}{A^2}+\frac{2h}{A^3}+\frac{3h^2}{A^4},$$

par conséquent

$$I' - I_A = \frac{2h(b-a)}{A^3} + \frac{3h^2(a+b)}{A^4} + \text{etc.}$$

Pour de très-petites valeurs de h, le second membre se réduit sensiblement à son premier terme, ou si l'on veut, on peut donner à h une valeur numérique positive ou négative, assez petite, pour que le signe du second membre soit le même que celui de son premier terme, et cela quelle que soit la valeur du coefficient de h. Il n'y a donc, ainsi qu'on devait s'y attendre, ni maximum, ni minimum d'intensité aux extrémités du petit axe, lorsque (a) diffère de (b), puisqu'alors $I' - I_A$ change de signe avec h pour des valeurs de h suffisamment petites en valeur numérique, et aussi pour toutes les valeurs encore plus faibles.

Au contraire si $a = b$, auquel cas l'expression de $I' - I_A$ devient :

$$I' - I_A = \frac{6ah^2}{A^4} + \text{etc.},$$

on voit bien que les extrémités du petit axe satisferont à la condition du minimum, puisque le signe du second membre demeure positif pour des valeurs suffisamment petites, positives ou négatives réelles de h, et pour toutes valeurs numériquement inférieures.

Il est vrai que les conditions $a = b$, $z = A$, $z' = A$, $\frac{dz}{dy} = \infty$ prises ensemble donnent $\frac{dI}{dy} = 0 \times \infty$.

Mais il est inutile de revenir sur les calculs précédents, puisque cette dernière discussion est directe. On voit aussi, que dans l'hypothèse de $a = b$, les points donnés par la première solution coïncident avec les extrémités du petit axe.

Enfin, lorsque (a) diffère de (b), et que l'excentricité 2C se réduit à zéro, les deux lumières sont réunies au centre; mais il est assez remarquable que, comme plus haut, première solution

$$\frac{z'}{z} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

$$z + z' = 2A.$$

celle que l'on recherche le plus ordinairement dans les problèmes de ce genre, en posant $dI = 0$, ne satisfait pas du tout au problème, puisque dans le cercle le rapport $\frac{z}{c'}$ est égal à l'unité; nouvelle preuve de la nécessité de vérifier si les solutions données par l'algèbre, dans la résolution analytique des problèmes, conviennent aux questions proposées, dont les énoncés peuvent renfermer des restrictions (*).

10. Il y a bien des manières de généraliser le problème des lumières; par exemple, en faisant tourner l'ellipse autour de son grand axe, de manière à lui faire décrire une révolution complète, les points de minimum seront tous situés sur une parallèle de la surface, qui pourra se réduire à un point situé à l'extrémité la moins éclairée du grand axe. Si le centre de l'ellipse était occupé en même temps par une troisième lumière d'intensité (c), et sous les conditions spécifiées dans l'énoncé du problème général que nous venons de discuter, l'expression générale de I en z et z', serait rationnelle et ainsi composée :

$$I = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z'^2} + \frac{2c}{z^2 + z'^2 - 2C^2},$$

comme cela résulte de la théorie des triangles, et les rayons vecteurs z et z' dépendraient de l'excentricité. Au surplus, dans le problème précédent, la position des points extérieurs au grand axe pour lesquels l'intensité de la lumière est un minimum, dépend implicitement de l'excentricité.

Enfin, dans le cas où la série des centres lumineux donnerait lieu à une courbe plane brillante, le problème dépendrait évidemment de différentiations par rapport à des paramètres

(*) Un point attiré vers deux centres fixes présente une semblable restriction, voir Legendre, Fonct. elliptiques, I, § 384.

renfermés sous un signe d'intégration définie, relatif à la courbe rayonnante.

§ 2°.

Déterminer les positions d'équilibre d'une ellipse donnée de grandeur, que l'on considère comme une ligne matérielle, inflexible, uniformément pesante, et qui peut glisser sans frottement sur les côtés d'un angle droit fixe dont le plan est vertical, l'ellipse étant constamment appliquée sur le plan de l'angle.

1. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre stable ou instantané sont, comme on sait, que la direction de la verticale menée par le centre de gravité ou de figure de l'ellipse passe par le point de rencontre des deux normales aux points de contact, et que le poids de l'ellipse décomposé suivant les directions des deux normales fournisse deux composantes qui tendent à presser l'ellipse contre les côtés de l'angle. Il résulte tout d'abord, de cette dernière condition, que l'angle donné doit être entièrement situé au-dessus de l'horizontale menée dans son plan par son sommet.

La ligne droite qui réunit les points de contact, est traversée en son milieu par celle qui joint le sommet de l'angle au centre de l'ellipse. Cette dernière ligne est donc une diagonale du rectangle construit sur les normales, et dont un sommet coïncide avec le sommet de l'angle donné; on sait aussi que le centre de l'ellipse inscrite dans l'angle, doit être situé sur la circonférence de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, décrite du sommet de l'angle comme centre; donc, en général, cette diagonale du rectangle doit être verticale. Dès lors, il est facile de placer l'ellipse donnée dans les deux positions d'équilibre qu'elle peut prendre.

Supposons maintenant qu'on imprime à l'angle, dans son plan et autour de son sommet, un mouvement de rotation constamment dirigé dans le même sens; l'un des côtés se rapprochera de la verticale menée par le sommet de l'angle,

et si on arrête le mouvement lorsque le sinus de l'angle, compris entre ces deux lignes, sera devenu inférieur à $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, l'ellipse ne pourra plus être placée en équilibre dans l'angle donné.

2. La difficulté tient encore à l'omission de solutions particulières ; le problème comporte en général quatre solutions, car l'ellipse peut être naturellement placée en équilibre dans deux positions telles que les contacts aient lieu à ses sommets. Dans ces deux positions, la verticale du centre de gravité ne passe pas constamment par le sommet de l'angle pendant sa rotation, en sorte que l'équilibre absolu ou relatif (*) peut subsister tant que l'angle demeure entièrement situé au-dessus de l'horizontale menée dans son plan par son sommet.

3. La théorie du plan incliné présente une autre singularité qui peut au premier abord embarrasser les élèves. Lorsqu'un prisme droit rigide pesant et homogène, s'appuie par sa base sur un plan incliné, quelle que soit l'inclinaison du plan, quelle que soit aussi la longueur des arêtes longitudinales, il ne peut jamais chavirer, lors même que la verticale abaissée du centre de gravité du solide tomberait en dehors de sa base.

Si habituellement le prisme se renverse, pour une certaine inclinaison du plan ou pour une certaine longueur des arêtes qui lui sont perpendiculaires, cela tient uniquement, si le système est dans le vide, à l'effet du frottement de la base du prisme sur le plan, frottement dont la direction ne peut jamais passer par le centre de gravité, et dont on fait abstraction dans la statique des corps rigides.

(*) A cause de l'action de la force centrifuge, il serait mieux de supprimer le mot *relatif*, et d'ajouter au mot *positions* l'épithète *fixes*. Q.

THÉORIE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.) (*)

INTRODUCTION.

1. Le calcul, considéré sous le point de vue le plus général, est l'ensemble de toutes les opérations que nous pouvons exécuter sur les nombres.

2. Les plus simples de ces opérations n'exigent qu'un moment de réflexion, et deviennent plus ou moins familières à tous les hommes qui vivent en société. Mais notre intelligence ne pourrait suffire aux combinaisons qu'elles exigeraient dès qu'elles deviennent plus compliquées, sans l'heureuse invention des signes dont nous nous servons pour écrire toutes celles de nos pensées qui se rapportent à des nombres.

3. Outre l'avantage de les fixer ainsi sous nos yeux, pour n'avoir plus à craindre de les confondre ou de les oublier, nous sommes, à l'aide de ces signes, et de quelques règles simples et faciles à retenir, parvenus à pouvoir nous assurer de la justesse de ces opérations, sans être obligés de fatiguer notre esprit et notre mémoire des raisonnements qui, sans cela, nous auraient été nécessaires pour atteindre le même but.

4. C'est l'usage continuel que nous faisons de ces signes dans toutes nos opérations sur les nombres qui a fait donner plus particulièrement le nom de *calcul*, à l'art ingénieux dont nous venons de donner une légère notion, et dont cet ouvrage est destiné à développer toutes les ressources.

(*) Communiquée par le savant professeur, fils de l'illustre géomètre. Tm.

5. En analysant l'idée que nous avons d'un nombre, on s'aperçoit aisément que ce n'est que le résultat de la comparaison de deux grandeurs; développons avant d'aller plus loin la signification que nous donnons ici à ce dernier mot. D'après la définition adoptée par tous les mathématiciens, le nom de *grandeur* s'applique également à tout ce qu'on peut concevoir comme susceptible d'augmentation ou de diminution, dans les objets dont ils étaient environnés; la longueur, l'épaisseur, le poids d'un corps, sa vitesse s'il est en mouvement, la fortune d'un homme, l'étendue d'un champ, sont donc autant de grandeurs (*).

8. On ne peut acquérir une idée juste et précise d'un objet qu'en y distinguant autant de grandeurs différentes qu'il y a de manières de le concevoir, augmenté ou diminué, et en déterminant la valeur, c'est-à-dire le point précis d'augmentation ou de diminution de chacune de ces grandeurs. Il ne suffit pas, par exemple, de savoir qu'un corps a une certaine longueur, un certain poids, qu'il se meut avec une certaine vitesse, etc. Il faut encore savoir précisément quels sont cette longueur, ce poids, cette vitesse.

9. Le moyen le plus général et souvent le seul dont nous puissions nous servir pour déterminer ainsi les valeurs des différentes grandeurs sur lesquelles nous sommes dans le cas d'opérer, consiste à les comparer à une autre grandeur prise parmi celles qui nous sont plus familières ou qui se trouvent plus à notre portée, en cherchant par quelles opérations exécutées sur celle-ci, nous pourrions construire les grandeurs qu'il est question de déterminer. L'idée de cette sorte d'opération réduite au plus grand état de simplicité, est précisément ce qu'on appelle un *nombre;* on connaît qu'elle est réduite à cet état, quand on peut procéder à la construc-

(*) Les paragraphes 6 et 7 sont rayés dans le manuscrit.

tion sans recourir à aucune autre grandeur. Chaque idée numérique est désignée par un mot ou *nom de nombre*.

10. Nous ferons connaître ces noms. Le choix de la grandeur qu'on prend pour terme de comparaison n'est pas absolument arbitraire, il faut qu'il se trouve entre elle et celle qu'on lui compare, un certain degré de ressemblance qui existe par exemple entre une épaisseur et une longueur ou une hauteur, et non pas entre une longueur et un poids.

On a donné le nom d'*homogènes* aux grandeurs, qui peuvent être comparée immédiatement, et donner des nombres pour résultats de leur comparaison; les grandeurs *hétérogenes* sont celles qui se trouvent dans le cas contraire.

12. On voit par l'exemple que nous venons de donner, que des grandeurs désignées par des noms différents, et qu'on pourrait, sous ce point de vue, regarder comme n'étant pas de la même espèce, ne laissent pas souvent d'être homogènes, et qu'on donne au contraire un même nom à quelques grandeurs absolument hétérogènes, telles par exemple que celles qu'on réunit en géométrie sous le nom générique d'étendue. Il suffit d'être prévenu de ces irrégularités dans le langage usité pour éviter toute incertitude, relativement à l'homogénéité ou à l'hétérogénéité de deux grandeurs; la définition précédente suffit d'ailleurs pour se décider à cet égard dans le petit nombre de cas où le sentiment de l'évidence ne bannirait pas l'ombre du doute.

13. Les grandeurs dont nous venons de nous occuper, ne peuvent être considérées que comme des modifications de l'objet où nous les observons, et sans lequel elles ne pourraient exister; il y en a d'autres dont l'idée encore plus abstraite suppose la coexistence de plusieurs objets dont la comparaison seule peut nous donner l'idée de ces grandeurs. C'est ainsi qu'en voyant deux corps nous concevons quelque chose entre eux, qui peut être augmenté ou diminué, et

que nous appelons leur *distance* ; qu'en pensant à deux lignes qui se rencontrent, nous concevons qu'elles peuvent en se rencontrant toujours au même point, être approchées ou écartées l'une de l'autre, et nous avons l'idée de la grandeur qu'on appelle *angle*, etc. La grandeur de ce genre qu'on doit considérer avec plus de soin est celle que l'on appelle *inégalité* de deux grandeurs, et dont nous traiterons ci-après plus au long.

14. Pour déterminer les différentes grandeurs qu'on peut distinguer dans un corps, il faudra, d'après ce qui précède, comparer chacune à une grandeur homogène qui se trouve dans un corps que nous puissions soumettre à chaque instant à l'examen de tous nos sens. Les hommes qui se livrèrent les premiers à cette recherche, durent naturellement choisir dans leur propre corps, les grandeurs qui devaient leur servir de termes de comparaison pour y rapporter toutes les autres ; ils pouvaient comparer, par exemple, les longueurs à celle de leur bras ou de leur pied, les épaisseurs à celle de leur doigt, les poids à celui de leur corps ; mais ces grandeurs n'étant pas toujours les mêmes dans un même individu et éprouvant encore plus de variété quand on veut juger d'après soi des déterminations faites par une autre personne, on imagina bientôt d'établir des termes de comparaison plus fixes, et dont chacun pût aisément, dans l'ordre établi de la société, se procurer des modèles qui fussent les mêmes pour tous ; quelques-uns des noms qui servent à les désigner comme *aune*, *pied*, etc., conservent encore des traces étymologiques de leur première signification. Les nombres qui résultent de ces comparaisons, et qui déterminent toutes les grandeurs qu'on distingue dans un même objet, forment par leur réunion une description de cet objet aussi détaillée qu'on peut la faire sans le montrer, ou une figure qui le représente ; c'est ce qu'on obtient quand on peut dire, par

exemple, que sa longueur est de tant de toises, son poids de tant de livres, le prix qu'il a habituellement dans le commerce, de tant de francs, etc. Nous n'insisterons pas sur l'utilité de cette espèce de description d'un objet ; sans cela l'idée que nous acquérons de ceux qui sont soumis à l'examen de nos sens deviendrait si confuse, dès qu'ils seraient loin de nous, par la faiblesse de notre mémoire, qu'elle ne pourrait plus nous être d'aucune utilité dans toutes les opérations qui exigent de la précision ; il nous serait d'ailleurs impossible de communiquer cette idée sans le secours des mêmes nombres, en sorte que notre langage même ne peut s'en passer, et que nous sommes obligés d'y avoir recours, dès que nous voulons donner de la précision à ce que nous avons à dire relativement à quelque grandeur que ce soit. Il nous reste à dire un mot de la manière dont on détermine ces nombres dans chaque cas particulier.

(*La suite prochainement.*)

DÉMONSTRATION

d'un théorème connu sur les fractions continues périodiques.

PAR M. O. RODRIGUES.

—

THÉORÈME.

Toute expression de la forme $\frac{M+\sqrt{N}}{P}$ se développe en fraction continue périodique.

Soit $$\frac{M+\sqrt{N}}{P}=x=\lambda_0+\cfrac{1}{\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+\text{etc.}+\cfrac{1}{\lambda_s+\cfrac{1}{\lambda_{s+1}+\text{etc.}}}}}$$

en désignant par Y_q une fraction continue dont tous les quotients incomplets seraient ceux de x, à partir de λ_q, on aura généralement les égalités suivantes :

$$(1)\ Y_q = \lambda_q + \cfrac{1}{\lambda_{q+1} + \text{etc.}} \qquad (2)\ x = \frac{a_{q-1}\,Y_q + a_{q-2}}{b_{q-1}\,Y_q + b_{q-2}},$$

$\frac{a_{q-1}}{b_{q-1}}$ et $\frac{a_{q-2}}{b_{q-2}}$ étant deux réduites consécutives de x, s'arrétant à λ_{q-1}, λ_{q-2}, de sorte que

$$\frac{a_{q-2}}{b_{q-2}} = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \text{etc.} + \cfrac{1}{\lambda_{q-2}}}} \qquad \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \text{etc.} + \cfrac{1}{\lambda_{q-1}}}}$$

Comme les réduites de rang pair sont $< x$, la relation suivante aura lieu entre les termes des deux réduites consécutives :

$$a_{q-1}\,b_{q-2} - a_{q-2}\,b_{q-1} = (-1)^q.$$

De l'égalité (2) on déduit, en remplaçant x par sa valeur,

$$Y_q = \frac{b_{q-2}\sqrt{N} + M b_{q-2} - P a_{q-2}}{P a_{q-1} - M b_{q-1} - b_{q-1}\sqrt{N}};$$

d'où, en faisant disparaître le radical du dénominateur,

$$Y_q = \frac{P\sqrt{N}\left(a_{q-1}b_{q-2} - a_{q-2}b_{q-1}\right) + N b_{q-1} b_{q-2} - \left(P a_{q-1} - M b_{q-1}\right)\left(P a_{q-2} - M b_{q-2}\right)}{(P a_{q-1} - M\ \ _{q-1})^2 - N b^2_{q-1}}$$

Posons :

$$A_q = (-1)^q \left\{ N b_{q-1} b_{q-2} - (P a_{q-1} - M b_{q-1})(P a_{q-2} - M b_{q-2}) \right\},$$

$$B_q = (-1)^q \left\{ (P a_{q-1} - M b_{q-1})^2 - N b^2_{q-1} \right\};$$

on aura enfin :

$$Y_q = \frac{A_q + P\sqrt{N}}{B_q},$$

A_q et B_q étant entiers.

Mais on a toujours :

$$\frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} \gtrless x, \text{ suivant que } q \text{ est pair ou impair.}$$

En désignant par Z_q, V_q, V'_q, trois fractions de l'unité, on pourra donc écrire les égalités suivantes :

$$(3) \qquad \frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} - \frac{Z_q(-1)^q}{b^2_{q-1}},$$

$$\frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} - \frac{V_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}},$$

$$\frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-2}}{b_{q-2}} + \frac{V'_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}},$$

dans lesquelles $\qquad V_q + V'_q = 1,$

d'où l'on tire les relations suivantes :

$$Pa_{q-1} - Mb_{q-1} = b_{q-1}\sqrt{N} + \frac{PZ_q(-1)^q}{b_{q-1}},$$

$$Pa_{q-1} - Mb_{q-1} = b_{q-1}\sqrt{N} + \frac{PV_q(-1)^q}{b_{q-2}},$$

$$Pa_{q-2} - Mb_{q-2} = b_{q-2}\sqrt{N} - \frac{PV'_q(-1)^q}{b_{q-1}}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de A_q et de B_q, on trouve

$$A_q = P\left((V'_q - V_q)\sqrt{N} + \frac{PV_qV'_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}}\right) < P(\sqrt{N}+P),$$

$$B_q = PZ_q\left(2\sqrt{N} + \frac{PZ_q(-1)^q}{b^2_{q-1}}\right) < P(2\sqrt{N}+P).$$

Ces deux expressions font voir clairement que les nombres A_q et B_q sont nécessairement limités. La reproduction des valeurs de Y_q, à mesure que q augmente, est donc inévitable. Or, si l'on désigne par s la valeur de q qui donne

$Y_q = Y_s$, cette égalité impliquera nécessairement les suivantes :

$$(4) \qquad \lambda_q = \lambda_s,\ \lambda_{q+1} = \lambda_{s+1},\ \lambda_{q+2} = \lambda_{s+2},\ \text{etc.}$$

Il est donc ainsi démontré que toute expression de la forme $\frac{M+\sqrt{N}}{P}$ se développe en une fraction continue périodique (*V.* tome Ier, p. 1).

QUESTION D'AGRÉGATION.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS DE 1844.

PAR M. VIGNAL,
professeur de mathématiques.

—

Question de mécanique proposée au concours d'agrégation pour les sciences mathématiques de l'année 1844.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu à un point fixe et chargé de deux points matériels pesants, en supposant qu'à l'origine du mouvement, les deux points matériels n'aient pas de vitesse et qu'ils se trouvent avec le point de suspension sur une même ligne droite qui s'écarte très-peu de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

Prenons le point fixe F (*fig.* 13) pour origine, et la verticale menée par ce point pour axe des y; x et y étant les coordonnées de l'un des points m au bout d'un temps quel-

conque t; x', y', celles de l'autre point m', au bout du même temps; nous aurons d'après le principe de d'Alembert :

$$\text{(A)}\qquad -m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y-m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'+m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y'=0,$$

δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ représentant les accroissements quelconques des coordonnées x, y, x', y', compatibles avec les liaisons du système.

Appelons maintenant a et b les distances constantes Fm, mm', nous aurons comme équations de condition :

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$(x-x')^2+(y-y')^2=b^2,$$

et comme ces équations doivent être satisfaites pour tout déplacement vertical, on a aussi :

$$\text{(1)}\qquad x\delta x+y\delta y=0,$$

$$\text{(2)}\quad (x-x')\,\delta x+(y-y')\,\delta y+(x'-x)\,\delta x'+(y'-y)\,\delta y'=0;$$

celle-ci en vertu de l'équation (1) se réduit à

$$\text{(3)}\qquad -x'\delta x-y'\delta y+(x'-x)\delta x'+(y'-y)\delta y'=0.$$

Multiplions (1) et (3) par les facteurs indéterminées λ et μ, on aura en les ajoutant avec l'équation (A) :

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda x-\mu x'\right)\delta x+\left[m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda y-\mu y'\right]\delta y+$$
$$+\left[-m'\frac{d^2x'}{dt^2}+\mu(x'-x)\right]\delta x'+\left[m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+\mu(y-y')\right]\delta y'=0,$$

et comme cette équation doit être satisfaite, quelles que soient les variations δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$, il viendra :

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} &-m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda x-\mu x'=0,\\ &m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda y-\mu y'=0,\\ &-m'\frac{d^2x'}{dt^2}+\mu(x'-x)=0,\\ &m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+\mu(y'-y)=0.\end{aligned}\right.$$

Si on élimine λ et μ entre ces quatre équations, il en restera deux qui, jointes aux deux équations de condition, donneront, après l'intégration, les coordonnées des points à une époque quelconque. En différentiant une fois ces valeurs, on aura les composantes de la vitesse angulaire. Il est bien entendu que les constantes arbitraires qu'introduit l'intégration, se détermineront par les circonstances initiales du mouvement.

Considérons le cas où l'écart est très-petit.

Appelons θ et θ', les angles variables que forment avec la verticale les droites Fm et mm', nous aurons :

$$x = a \sin\theta = a\theta,$$
$$y = a \cos\theta = a,$$
$$x' = a\theta + b\theta',$$
$$y' = a + b,$$

en négligeant les puissances de θ et de θ' supérieures à la première.

Différentiant deux fois chaque équation, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = b\frac{d^2\theta'}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (B), on a :

$$(4)\qquad -ma\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda a\theta - \mu a\theta - \mu b\theta' = 0,$$
$$(5)\qquad mg + \lambda a - \mu a - \mu b = 0,$$
$$(6)\qquad -m'a\frac{d^2\theta}{dt^2} - m'b\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \mu b\theta' = 0,$$
$$(7)\qquad m'g + \mu b = 0.$$

Nous voyons qu'il faut éliminer les valeurs de λ et de μ entre ces quatre équations. Or les équations (5) et (7) donnent pour ces quantités des valeurs constantes; nous conserverons donc les lettres λ et μ dans (4) et (6) en les regardant comme des constantes connues. D'ailleurs ces équations (4) et (6) jointes aux équations de condition déterminent complétement le mouvement.

Comme l'intégration des équations (4) et (6) s'obtient par des méthodes connues, étant linéaires et à coefficients constants, nous ne la ferons pas ici.

Cherchons actuellement les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

Il faut pour cela que les équations (4) et (6) soient satisfaites, quel que soit le temps, par les valeurs de θ, θ', $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt^2}$, tirées des équations de mouvement de deux pendules simples qui auraient pour longueur l'un a, l'autre $a+b$.

Or on a pour le pendule simple de longueur a l'équation

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\theta,$$

ou bien $-a\frac{d^2\theta}{dt^2}=g\theta$, en remplaçant toujours $\sin\theta$ par l'angle θ.

Intégrant, on trouve :

$$a\frac{d\theta^2}{dt^2}=-g\theta^2+c,$$

et si la vitesse angulaire est nulle pour $\theta=\alpha$,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{g}{a}(\alpha^2-\theta^2),$$

ou

$$(8)\qquad \sqrt{\frac{g}{a}}\,t=\arccos\frac{\theta}{\alpha},$$

après une deuxième intégration. On aurait pour le pendule de longueur $a+b$,

$$\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = \text{arc}\cos\frac{\theta'}{\alpha}. \tag{9}$$

Les équations (8) et (9) résolues par rapport à θ et à θ', donnent :

$$\theta = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t,$$

$$\theta' = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t,$$

et en différentiant deux fois chacune de ces équations (*) :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t,$$

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\alpha\frac{g}{a+b}\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t.$$

Portant les valeurs de θ, θ', $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt^2}$, dans les équations (4) et (6), il vient :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} ma\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \lambda a\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t - \\ -\mu a\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t - \mu b\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = 0, \end{array}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} m'a\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + m'b\alpha\frac{g}{a+b}\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t + \\ \qquad + \mu b\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = 0; \end{array}\right.$$

réduisant et mettant en facteur commun $\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$, et $\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t$, on a :

(*) On déduit ces résultats directement de l'équation $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{a}\theta$. Tm.

$$(mg+\lambda a)\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t=(\mu a+\mu b)\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t,$$

$$m'g\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t=-\left(\frac{m'bg}{a+b}+\mu b\right)\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t.$$

Et si on prend les rapports de ces deux équations, on obtient enfin :

$$\frac{mg+\lambda a}{mg}=-\frac{(\mu a+\mu b)\,(a+b)}{m'bg+\mu b\,(a+b)}.$$

Telle est l'équation de condition pour que les points m et m' oscillent comme deux pendules simples.

QUADRATURE DE LA LOGARITHMIQUE $y=a^x$.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

Nous supposons a positif et >1. On sait que la courbe se compose d'une branche MAN (*fig.* 12) qui coupe l'axe des y au point A pour lequel $AO=1$, et qui a pour asymptote la partie négative de l'axe des x.

Supposons que nous voulions déterminer l'aire comprise entre OA et une ordonnée quelconque PQ.

Je partage l'abscisse QO en n parties égales à h; et par les points de division, j'élève des perpendiculaires, et je construis les rectangles représentés par la figure. Il est évident que plus h sera petit, plus la somme de ces rectangles s'approchera de la surface de la courbe, et qu'enfin à la limite pour $h=0$, cette somme représentera exactement la surface cherchée. Or, les ordonnées successives étant

$$y_1,\ y_2,\ y_3\ \ldots\ldots\ y_n,$$

on a $$y_1 = a^h,\ y_2 = a^{2h},\ \ldots\ldots\ y_n = a^{nh};$$
et la somme des aires est

$$S = h(a^h + a^{2h} + \ldots\ldots + a^{nh}),$$

ou $$S = \frac{h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1}.$$

Or $$nh = x;$$

donc $$S = (a^x - 1)\frac{h}{a^h - 1};$$

et en désignant par Σ l'aire de la courbe même, on a :

$$\Sigma = (a^x - 1) \times \lim \frac{h}{a^h - 1} \text{ pour } h = 0.$$

D'après un développement connu, on a la série

$$a^h = 1 + \frac{kh}{1} + \frac{k^2h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

dans laquelle $$k = \log a;$$

d'où $$\frac{a^h - 1}{h} = k + Ph,$$

$$\frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k + Ph};$$

et pour $h = 0$,

$$\lim \frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k} = \frac{1}{l.a};$$

donc $$\Sigma = \frac{a^x - 1}{l.a} = \frac{y - 1}{l.a}.$$

Nous ferons remarquer ici que les logarithmes sont pris dans le système népérien, dont la base est

$$e = 2,\ 71828\ 18284\ \ldots\ldots$$

Dans la partie négative de l'axe des x, y est < 1. On a donc :

$$\Sigma = \frac{1 - y}{l.a} = \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{l.a};$$

et à mesure que x croît, a^x croît aussi; pour $x=\infty$, on a $\Sigma=\frac{1}{l.a}$. Telle est la surface comprise entre la partie négative de l'asymptote et la courbe.

Cette formule $\Sigma=\frac{y-1}{l.a}$ peut recevoir une interprétation géométrique assez curieuse.

Dans cette courbe on sait que la sous-tangente est constante et égale à $\frac{1}{l.a}$. Posons donc $m=\frac{1}{l.a}$, et il vient :

$$\Sigma=(y-1)\,m.$$

Si donc on veut connaître la surface MAOP (*fig.* 12 *bis*), on mène en M la tangente; on construit sur la tangente et la sous-tangente le rectangle SP; par le point A on mène à l'axe des x la parallèle AR, et on a :

$$\text{rect. SR} = \text{surf. MAOP}.$$

En effet, $\quad \text{SR}=\text{MR}\,.\,\text{RT}=(\text{MP}-\text{AO})\,\text{PQ}$;

mais $\quad \text{MP}=y,\quad \text{AO}=1,\quad \text{PQ}=m$;

donc $\quad \text{SR}=(y-1)\,m.$

On aurait pu arriver directement à ces résultats par le calcul différentiel.

En effet, on a $\quad ds=y\,dx,$

$$y=a^x;$$

donc $\quad ds=a^x dx,$

$$\int ds=\frac{a^x}{l.a}+c.$$

Et comme pour $x=0$, $s=0$, on a :

$$\int_0^x ds=\frac{a^x-1}{l.a}=\frac{y-1}{l.a}.$$

De plus, la sous-tangente $m=\frac{y\,dx}{dy}$; mais

$$dy=a^x l.a\,dx,$$
$$=y\,l.a\,dx.$$

Donc $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y l.a},$$

et par suite, $$m = \frac{1}{l.a}.$$

Donc $$\Sigma = (y - 1)\, m,$$

comme nous l'avions trouvé d'une manière élémentaire.

NOTE SUR L'ÉLIMINATION.

PAR M. BOUILLON,
professeur d'hydrographie de la marine à Morlaix.

—

Je prends les équations :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & m.A = q.B + n.r \\ (2) & m'.B = q'.r + n'.r' \\ (3) & m''.r = q''.r' + n''.r'' \\ (4) & m'''.r' = q'''.r'' + n'''.\end{array}\right\}$$ dans l'algèbre de M. Bourdon, page 586, édition de 1837.

On démontre facilement que si la quantité m est première avec n', n'', n''', que m' soit première avec n'', n''' et que m'' soit première avec n''', on démontre, dis-je, très-facilement, que les valeurs de y données par l'équation $n.n'.n''.n''' = 0$, appartiennent au système $[A = 0, B = 0]$. La réciproque est également vraie, c'est-à-dire que les valeurs de y qui appartiennent au système $[A = 0, B = 0]$ sont comprises dans l'équation $n.n'.n''.n''' = 0$.

Supposons actuellement que m ne soit pas première avec n', n'', n''' que m' ne soit pas première avec n'', n''' et que m'' ne soit pas première avec n'''.

Soit α le p. g. c. d. de m et de n', on aura :

$$m = \alpha m_{,} \quad \text{et} \quad n' = \alpha n'_{,}.$$

soit β le p. g. c. d. de m_1 et de n'', on aura :

$$m_1 = \beta m_2 \quad \text{et} \quad n'' = \beta n_1'',$$

soit γ le p. g. c. d. de m_2 et de n''', on aura :

$$m_2 = \gamma m_3 \quad \text{et} \quad n''' = \gamma n_1''',$$

soit β' le p. g. c. d. de m' et de n'', on aura :

$$m' = \beta' m_1' \quad \text{et} \quad n_1'' = \beta' n_2'',$$

soit γ' le p. g. c. d. de m_1' et de n''', on aura :

$$m_1' = \gamma' m_2' \quad \text{et} \quad n''' = \gamma' n_2''',$$

soit γ'' le p. g. c. d. de m'' et de n_2''', on aura :

$$m'' = \gamma_1'' m_1'' \text{ et } n_2''' = \gamma'' n_3'''.$$

On déduit de là que

$$m = \alpha\beta\gamma . m_3, \quad m' = \beta'\gamma' . m_2' \quad \text{et} \quad m'' = \gamma'' m_1'',$$
$$n' = \alpha n_1', \quad n'' = \beta\beta' . n_2'' \quad \text{et} \quad n''' = \gamma\gamma'\gamma'' . n_3'''.$$

Ainsi les identités (1), (2), (3) et (4) deviennent

$$\alpha\beta\gamma . m_3 \,A = q.B + n.r,$$
$$\beta'\gamma' . m_2' . B = q'.r + \alpha n_1' r',$$
$$\gamma'' . m_1'' r = q''.r' + \beta\beta' . n_2'' r'',$$
$$m''' r' = q''' r'' + \gamma\gamma'\gamma'' . n_3''',$$

telles que les donne M. Bourdon. Mais alors il n'y a plus d'élimination à effectuer pour achever la démonstration ; car

m_3 est première avec n_1', n_2'' et n_3''',
m_2' est première avec n_2'' et n_3''',
et m_1'' est première avec n_3''',

On retombe sur le premier cas, et toutes les bonnes valeurs de y seront données par $n=0$, $n_1'=0$, $n_2''=0$, et $n_3'''=0$; ou par l'équation $nn_1'n_2''n_3'''=0$, et réciproquement.

De cette manière, on évite beaucoup d'éliminations dont le nombre augmente avec le nombre des identités (1), (2), (3), etc.

NOTE SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

(Fin, voir page 55.)

—

On sait que l'équation aux cosinus, dont il vient d'être question, s'obtient en cherchant préalablement $\cos na$ en fonction de $\cos a$, puis changeant a en $\frac{a}{n}$.

Sachant que $\cos na$ est une fonction entière de $\cos a$, on propose de démontrer à priori que cette fonction ne renferme que des puissances paires de $\cos a$, si n est pair, et seulement des puissances impaires de $\cos a$, si n est impair.

1er cas, n pair.

Quand on change a en $a+\pi$, $\cos na$ qui devient $\cos(na+n\pi)$ ne changeant pas plus de signe que de valeur absolue, il doit en être de même de chaque terme de la fonction qui le représente; or chaque facteur $\cos a$ devenu $\cos(a+\pi)$ change de signe; le nombre de ces facteurs dans chaque terme doit donc être pair. Ce qu'il fallait prouver.

2e cas, n impair.

Dans ce cas, $\cos na$ change seulement de signe en devenant $\cos(na+n\pi)$; il doit en être de même de chaque terme de la fonction; donc le nombre des facteurs $\cos a$ doit être impair dans ce terme.

Il résulte de là que dans l'équation de degré n qui donne $\cos\frac{a}{n}$ en fonction de $\cos a$, tous les termes sont de degré pair ou de degré impair, suivant que n est pair ou impair. Ceci

comprend comme cas particulier le principe dont l'énoncé commence cet article.

Quand on cherche $\cos na$ en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$, on trouve une fonction entière dont chaque terme contient toujours une puissance paire de $\sin a$ avec une puissance paire de $\cos a$, si n est pair, et une puissance impaire de $\cos a$, si n est impair. Expliquer cela à priori.

Quel que soit n, si on change a en $-a$, $\cos na$ et $\cos a$ ne changent pas, tandis que $\sin a$ change de signe. Donc, pour que la fonction qui représente $\cos na$ ne change pas, il est nécessaire que chaque terme contienne une puissance paire de $\sin a$.

Supposons maintenant qu'on change a en $a+\pi$; distinguons les cas de n pair et de n impair. Dans le premier cas, $\cos(na+n\pi)$ ne changeant pas de signe, chaque terme de la fonction doit conserver le sien; $\sin a$ et $\cos a$ changent de signes en devenant $\sin(a+\pi)$, $\cos(a+\pi)$; $\sin a$ ayant un exposant pair dans notre terme, sa puissance conserve le même signe qu'auparavant. Donc la puissance de $\cos a$ doit être paire.

Si n est impair, $\cos a$ changeant de signe, chaque terme de la fonction doit en changer; comme la puissance de $\sin a$ est toujours paire, celle de $\cos a$ dans ce terme doit être impaire.

On prouvera de la même manière que si on peut trouver pour $\sin na$ une fonction entière de $\sin a$ et $\cos a$, chaque terme de cette fonction devra comprendre dans tous les cas une puissance impaire de $\sin a$ avec une puissance paire du cosinus, si n est impair; et une puissance impaire du même, si n est pair. On se fonde d'abord sur ce que $\sin na$ et $\sin a$ changent de signe avec a, tandis que $\cos a$ n'en change pas, ce qui prouve que chaque terme de la fonction qui représente $\sin na$ doit renfermer, quel que soit n, une puissance impaire

de $\sin a$. Puis on observe que si on change a en $a+\pi$, $\sin a$ et $\cos a$ changent de signes, tandis que $\sin na$ en change seulement quand n est impair.

De cette dernière remarque il résulte que la substitution de $1-\sin^2 a$, au lieu de $\cos^2 a$, donnera de suite, quand n sera impair pour $\sin na$, une fonction rationnelle de $\sin a$ dont le degré ne sera pas plus élevé que le degré de la première fonction par rapport à $\sin a$ et $\cos a$.

Dans le cas de n pair, on pourra mettre préalablement $\cos a$ en facteur d'une fonction qui sera paire par rapport à $\cos a$. Après l'élimination des cosinus, il faudra élever au carré ; ce qui donne une fonction d'un degré double en $\sin a$.

NOTE

Sur le calcul des approximations.

PAR M. DUTERME,
élève du collége Rollin (classe de M. O. BONNET).

—

PROBLÈME. *Etant donnés deux nombres* a *et* b *entre lesquels on veut insérer* m *moyens géométriques, on demande avec quelle approximation, il faut prendre la raison* $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, *pour que tous ces moyens soient obtenus à moins de* δ.

Solution. Appelons q la valeur cherchée de la raison, que nous supposerons approchée à moins de ε, et soit $q+\alpha$ la valeur exacte de cette raison, de telle sorte que

$$(q+\alpha)^{m+1}=\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha<\varepsilon.$$

Les valeurs approchées des moyens seront

$$aq,\quad aq^2,\quad aq^3,\ldots\ aq^n,\ldots\ aq^m,$$

et les valeurs exactes

$$a(q+\alpha),\ a(q+\alpha)^2,\ a(q+\alpha)^3,\ldots\ a(q+\alpha)^n,\ldots\ a(q+\alpha)^m,$$

de manière que les erreurs commises auront pour valeurs respectives

$$a\alpha,\ a[(q+\alpha)^2-q^2],\ldots\ a[(q+\alpha)^n-q^n],\ldots\ a[(q+\alpha)^m-q^m].$$

Évaluons ces différences.

Posons en général :

$$(q+\alpha)^n-q^n=\text{A};$$

en multipliant par q et ajoutant ensuite $\alpha(q+\alpha)^n$ aux deux membres, il viendra :

$$(q+\alpha)^{n+1}-q^{n+1}=\text{A}q+\alpha(q+\alpha)^n.$$

Ce qui nous montre que connaissant la différence de deux mêmes puissances de $q+\alpha$ et de q, pour avoir la différence entre les deux puissances suivantes, il suffit de multiplier la première différence par q, et d'ajouter ensuite le produit de α par la puissance de $q+\alpha$, qui entrait dans la première différence.

De cette remarque nous déduisons successivement :

$$q+\alpha-q=\alpha,$$
$$(q+\alpha)^2-q^2=\alpha q+\alpha(q+\alpha),$$
$$(q+\alpha)^3-q^3=\alpha q^2+\alpha q(q+\alpha)+\alpha(q+\alpha)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(q+\alpha)^n-q^n=\alpha q^{n-1}+\alpha q^{n-2}(q+\alpha)+\ldots+\alpha(q+\alpha)^{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(q+\alpha)^m-q^m=\alpha q^{m-1}+\alpha q^{m-2}(q+\alpha)+\ldots+\alpha(q+\alpha)^{m-1}.$$

Ainsi la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée du moyen de rang n est

$$a\alpha[q^{n-1}+q^{n-2}(q+\alpha)+\ldots+(q+\alpha)^{n-1}].$$

Comme l'on peut toujours supposer q et $q+\alpha$ plus grands que 1 ou $b > a$ (*), on voit que cette différence va en augmentant avec n ; elle est donc la plus grande possible pour $n=m$; il suffit donc pour résoudre la question, de poser :

$$a\alpha\,[q^{m-1}+q^{m-2}(q+\alpha)+\ldots+(q+\alpha)^{m-1}]<\delta,$$

ou

$$m a\alpha\,(q+\alpha)^{m-1}<\delta \quad \text{ou} \quad m a\alpha\,(q+\alpha)^{m+1}=mb\alpha<mb\varepsilon<\delta,$$

d'où

$$\varepsilon<\frac{\delta}{mb}. \qquad \text{C.Q.F.T.}$$

NOTE

sur les fractions continues périodiques ;

PAR E. CATALAN.

—

Pour établir cette proposition : *toute fraction continue périodique est égale à l'une des racines d'une équation du second degré*, la plupart des auteurs emploient la démonstration suivante, que je reproduis textuellement d'après l'un d'eux :

« Soient a, b, c, ... les premiers quotients, qui forment la partie non périodique ; et soient p, q, les quotients suivants, qui reviennent périodiquement. Posons :

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}} \qquad y=p+\cfrac{1}{q+\cdots+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}$$

(*) En effet si b était $< a$ on insérerait les moyens entre b et a, ce qui conduirait aux mêmes résultats, et l'on aurait alors $q+\alpha > 1$.

Il est clair que dans ces deux expressions, on pourra remplacer par y la suite $p+$ etc. : de sorte qu'on aura

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{y}}},\qquad y=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{y}}}.$$

Dans cette démonstration, le raisonnement suivant, dont j'ai déjà cité des exemples (III, 571), et qui paraît peu *clair*, est évidemment sous-entendu : *le nombre des périodes étant infini, il est permis d'en prendre une de plus ou une de moins; donc*, etc.

En cherchant une démonstration rigoureuse de la proposition dont il s'agit, je suis arrivé à plusieurs théorèmes qui n'avaient pas, je pense, été remarqués.

1. Soit, pour fixer les idées, la fraction continue périodique *simple* :

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}$$

Représentons par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}, y_n$ les valeurs que l'on obtient, quand on limite cette fraction à la première période, ou à la seconde, ou à la troisième, etc. Soient aussi $\frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}, \frac{P}{P'}$ les réduites répondant aux termes c, d, e de la première période, de manière que

$$y_1=\frac{P}{P'},\quad P=Ne+M,\quad P'=N'e+M',\quad y_1=\frac{Ne+M}{N'e+M'}.$$

Si, dans cette valeur de y_1, nous remplaçons e par $e+\frac{1}{y_1}$, nous obtiendrons y_2 ; donc

$$y_2 = \frac{N\left(e+\frac{1}{y_1}\right)+M}{N'\left(e+\frac{1}{y_1}\right)+M'} = \frac{Py_1+N}{P'y_1+N'}.$$

De même, si dans y_1 nous remplacions e par $e+\frac{1}{y_1}$, nous obtiendrions y_3, etc. Donc, en général,

$$y_n = \frac{Py_{n-1}+N}{P'y_{n-1}+N'}. \qquad (1)$$

2. Soit $\frac{Q}{Q'}$ la fraction irréductible équivalente à y_{n-1}; nous aurons :

$$y_n = \frac{PQ+NQ'}{P'Q+N'Q'}; \qquad (2)$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre sera irréductible.

Soient R, R' les deux termes de cette fraction, savoir :

$$R = PQ+NQ', \quad R' = P'Q+N'Q'. \qquad (3)$$

Entre ces équations, éliminons successivement Q et Q'; nous trouverons :

$$RP'-R'P = (NP'-N'P)Q', \quad RN'-R'N = -(NP'-N'P)Q.$$

Or $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$ sont deux réduites consécutives; donc $NP'-N'P = \pm 1$ (*). Par suite,

$$RP'-R'P = \pm Q', \quad RN'-R'N = \mp Q. \qquad (4)$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à R et R devrait diviser Q et Q'. Si donc, comme nous l'avons supposé, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, $\frac{R}{R'}$ sera pareillement irréductible.

(*) Le signe + répond au cas où le nombre des termes de la période est impair.

D'ailleurs, la fraction $\frac{P}{P'}$ qui donne la valeur de la première période, est une réduite; donc *toutes les fractions obtenues successivement par l'application de la formule* (1) *sont des réduites.*

3. Soient, comme précédemment,

$$y_{n-1} = \frac{Q}{Q'},\ y_n = \frac{R}{R'};\ \text{d'où}\ y_n - y_{n-1} = \frac{RQ' - R'Q}{R'Q'}.$$

Soit ensuite $y_{n+1} = \frac{S}{S'}$; d'où $y_{n+1} - y_n = \frac{SR' - S'R}{S'R'}$.

Pour comparer ces deux différences, j'observe que, d'après les équations (3),

$$S = PR + NR', \qquad S' = P'R + N'R';$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} SR' - S'R &= (PR + NR')R' - (P'R + N'R')R \\ &= R(PR' - P'R) + R'(NR' - N'R); \end{aligned}$$

ou

$$SR' - S'R = \mp (RQ' - R'Q),$$

à cause des équations (4).

Nous obtenons ainsi $y_{n+1} - y_n = \mp \frac{RQ' - R'Q}{S'R'}$.

En comparant cette valeur et celle de $y_n - y_{n-1}$, on voit qu'elles ont même numérateur; donc *le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives* y_{n-1}, y_n, *est constant.*

4. Si nous retranchons y_1 de y_2, nous obtenons, d'après la formule (2) :

$$y_2 - y_1 = \frac{P^2 + NP'}{P'(P' + N')} - \frac{P}{P'} = \frac{P'(NP' - N'P)}{P'^2(P + N')} = \pm \frac{P'}{P'^2(P + N')}.$$

Par suite, la valeur constante du numérateur de la différence entre y_{n-1} et y_n est P', et nous avons :

$$y_n - y_{n-1} = \pm \frac{P'}{R'Q'} \text{ (*)}. \qquad (5)$$

5. La première des équations (4) fait voir que si Q′ est divisible par P′, R′ sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de y_1 est P′(P′+N) : donc *les dénominateurs de toutes les réduites sont divisibles par* P′ ; et conséquemment

$$y_n - y_{n-1} = \pm \frac{1}{R'Q''}, \qquad (6)$$

en posant $Q' = P'Q''$.

6. Les équations (5) et (6) prouvent que la différence entre y_n et y_{n-1} diminue indéfiniment, à mesure que n augmente. Nous pourrons donc écrire :

$$y_n = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{y_n + \delta}}}}},$$

δ étant une quantité qui a pour limite zéro. Et si nous nommons y la *valeur* de la fraction continue, ou la limite de y_n, nous aurons :

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{y}}}}}.$$

(*) Dans l'application de cette formule, on devra prendre le signe —, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que n sera *pair* ou *impair*.

QUESTION SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT.

PAR M. A. DELADEREERE,
Professeur licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

La question traitée n° 47 de la géométrie analytique de M. Lefébure de Fourcy (*), donne lieu à l'équation du troisième degré $x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$, qui admet une racine positive répondant à la question, et deux autres racines négatives que je me propose d'interpréter.

Pour cela je remarque que dans le quadrilatère, on a :

(1) $$yz = ac + bx,$$

et que les triangles rectangles ACD, ABD, donnent (*fig.* 9) :

(2) $$y^2 = x^2 - a^2,$$

(3) $$z^2 = x^2 - c^2.$$

Or, pour éliminer y et z entre ces deux équations, on élève (1) au carré, et on égale au produit de (2) par (3), ce qui donne pour l'équation en x :

(4) $$(x^2 - a^2)(x^2 - c^2) = (ac + bx)^2,$$

qui simplifiée donne l'équation :

(5) $$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0;$$

laquelle admet une racine de signe contraire à son dernier terme, et par suite positive, laquelle est comprise entre la plus grande des valeurs de a, b et c, et la somme $a+b+c$. Car en substituant c pour x par exemple on a pour résultat :

$$c^3 - (a^2+b^2+c^2)c - 2abc = -a(b+c)^2,$$

(*) C'est une question résolue par Newton, *Arit. univ.*, I, 118 ; traduction de Beaudeux. D.

résultat négatif, et en substituant $a+b+c$ on a :

$$(a+b+c)^3-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-2abc=(a+b+c)$$
$$[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]-2abc=2(a+b+c)(ab+bc+ca)-$$
$$-2abc=2[(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc]=$$
$$=2[(a+b+c)(ab+ca)+bc(b+c)],$$

résultat positif, et on voit en effet que x étant un diamètre doit être plus grand que chacune des cordes a, b et c, et plus petit que $(a+b+c)$, d'après la définition de la ligne droite.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autres racines positives, puisque l'équation ne présente qu'une variation.

Les autres racines sont réelles, car la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré, privé de deuxième terme $4p^3+27q^2>0$, est remplie, vu que cette condition exige qu'on ait :

$$-4(a^2+b^2+c^2)^3+27\times 4a^2b^2c^2<0 \text{ ou } \frac{a^2+b^2+c^2}{3}>\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

condition qui se trouve remplie, car en posant $x_1^2+y_1^2+z_1^2=p^2$, $x_1^2y_1^2z_1^2$ sera maximum lorsque l'on aura $x_1^2=y_1^2=z_1^2$, d'où $3x_1^2=p^2$, $x_1^2=\frac{p^2}{3}$, et dans ce cas $x_1^2y_1^2z_1^2=\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3^3}$, et puisque c'est un maximum, on a :

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3^3}>a^2b^2c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{3}>\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

ce qui entraîne la condition de réalité de toutes les racines. Il résulte de là que l'équation admet deux racines négatives.

Pour interpréter ces dernières, je change x en $-x$, dans toutes les équations, ce qui donne :

(6) $yz=(ac-bx)$,

(7) $y^2=(x^2-a^2)$,

(8) $z^2=(x^2-c^2)$,

(9) $(x^2-a^2)(x^2-c^2)=(ac-bx)^2$,

(10) $x^3-(a^2+b^2+c^2)x+2abc=0$.

ur, en examinant (6), on trouve qu'elle revient à $ac = yz + bx$, ce qui revient à considérer a et c comme les diagonales d'un quadrilatère inscrit dont a, y, z, b et x, seraient les côtés, et a et b les diagonales (7) et (8) indiquant que x est le diamètre du cercle, et c'est en effet ce à quoi l'on arrive en cherchant à résoudre cette question.

Si nous considérons l'équation (10), nous voyons qu'elle admet deux racines positives ; la première est comprise entre la plus grande des trois valeurs a, b et c, et $a+b+c$, qui donnent des résultats de signe contraire, car pour $x=a$ par exemple elle devient :

$$a^3-(a^2+b^2+c^2)\,a+2abc= -(b^2+c^2)a+2abc= -a(b-c)^2,$$

résultat négatif, et pour $x = a+b+c$, elle devient :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-(a^2+b^2+c^2)\,(a+b+c)+2abc=\\ =(a+b+c)\,[\,(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\,]+2abc=\\ =2\,[\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca)+abc],\end{aligned}$$

résultat positif.

On voit d'ailleurs que cette racine convient à la question, car l'inspection de la figure montre qu'on a x plus grand que toute corde, puisque c'est un diamètre, et plus petit que $a+b+c$, d'après la définition de la ligne droite.

La deuxième racine positive est comprise entre 0 et la plus petite des valeurs des trois lignes, a, b et c, car pour $x=0$, le premier membre devient $+2abc$, et pour x égale à une des valeurs de a, b ou c, nous avons vu que le premier membre se réduisait à $-a(b-c)^2$, résultat négatif.

La solution positive de l'équation (5), et la première des solutions positives de l'équation (10), satisfont à cette question.

Trouver le diamètre d'un cercle connaissant la longueur d'une corde, la distance d'une de ses extrémités à l'une des

extrémités d'un diamètre, et la distance de son autre extrémité à l'autre extrémité du même diamètre.

Mais la troisième solution ne convient pas à cette question, car si elle satisfait à l'équation (10), elle ne satisfait aux équations (7) et (8), que pour des valeurs imaginaires de y et z, puisque $x < a$ et $x < c$.

Ainsi on voit qu'une racine positive d'une équation, n'indique pas toujours la possibilité du problème qui a donné naissance à cette équation.

La deuxième solution se présente telle que l'indique la figure (10), lorsque $a > b$ et $c > b$; mais si $a > b > c$, elle se présente sous la forme de la figure (11).

La troisième solution devient réelle, si l'on remarque que l'équation (10) a été obtenue en éliminant y^2z^2 entre les équations $y^2z^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2)$ et $y^2z^2 = (ac - bx)^2$. Équation à laquelle on arriverait en éliminant y^2z^2 entre les équations

$$yz = (ac - bx)^2, \quad y^2 = (a+x)(c-x) \text{ et } z^2 = (c+x)(a-x),$$

résultat que l'on pourrait interpréter géométriquement.

Note. La condition de réalité des racines de l'équation (5),

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ revient à } \left(\frac{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}}{3}\right)^3 > abc.$$

Or abc est le volume d'un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes sont a, b et c, et $\frac{\sqrt[2]{a^2+b^2+c^2}}{3}$ représente le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral dont le côté serait la diagonale du parallélipipède, représentée par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Ce qui montre que le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral dont le côté est la diagonale d'un parallélipipède rectangle, est plus grande que ce parallélipipède.

SUR L'EXPRESSION

du côté du polygone semi-régulier circonscrit à la courbe qui a pour équation aux coordonnées rectangulaires

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

La courbe dont il s'agit est, comme on sait (II, 225), l'enveloppe d'une droite de longueur constante c inscrite dans un angle droit. Ce mode de génération, que nous choisissons parmi plusieurs autres également connus et remarquables, revient à considérer l'enveloppée comme joignant continuellement les projections sur les axes d'un point mobile sur la circonférence de rayon c. Supposons que ce point occupe sur la circonférence une suite de positions séparées entre elles par des arcs égaux, chaque position de l'enveloppée fera avec la position voisine un angle égal à celui compris entre deux positions consécutives du rayon mené par le point mobile. Il suit de là qu'à un polygone régulier circonscrit au cercle, répond le polygone *semi-régulier* formé par l'enveloppée, le nom de semi-régulier indiquant l'égalité des angles. Il est vrai qu'auprès des points de rebroussement de la courbe, la loi ci-dessus paraît rompue, mais elle ne l'est réellement pas, en ce sens que les angles de l'enveloppée avec une ligne fixe, l'axe des y par exemple, forment une progression arithmétique non interrompue.

Cette possibilité de circonscrire à la courbe un polygone semi-régulier toutes les fois que le polygone régulier corres-

pondant peut être circonscrit au cercle avec la règle et le compas, est déjà remarquable. Mais notre intention est ici surtout de signaler l'expression trigonométrique du côté d'un polygone semi-régulier, expression dont la simplicité constitue une nouvelle propriété curieuse de cette même courbe, qui en présente tant d'autres.

Soit θ_0 le premier terme de la progression arithmétique des angles, θ la raison, et i un nombre entier quelconque, trois positions consécutives de l'enveloppée seront représentées par les équations :

$$\frac{x}{\sin[(i-1)\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[(i-1)\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i-1),$$

$$\frac{x}{\sin[i\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[i\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i),$$

$$\frac{x}{\sin[(i+1)\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[(i+1)\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i+1).$$

Si l'on cherche les coordonnées des points d'intersection, et que l'on prenne leurs différences, il vient, toutes réductions faites, pour les valeurs des projections du côté (1) sur les deux axes :

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0)\sin(i\theta+\theta_0),$$

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0)\cos(i\theta+\theta_0);$$

d'où il suit que ce même côté a pour longueur :

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0).$$

C'est ce que nous voulions faire voir. Ces résultats sont d'une frappante simplicité et peuvent se représenter géométriquement. Nous laissons au lecteur le soin d'en faire la recherche, mais nous croyons être utile aux élèves en leur

indiquant comme bon exercice de trigonométrie le rétablissement des calculs qui nous ont servi à obtenir les formules ci-dessus, et que nous avons supprimés.

DÉMONSTRATION

De l'équilibre des trois couteaux.

PAR M. PRUDOT,
licencié ès sciences mathématiques.

—

On sait que trois couteaux, ou trois tiges rigides quelconques disposées ainsi que l'indique la figure 8, et reposant à leurs extrémités A, C, B et par des points d'appui sur une table horizontale, se tiennent en équilibre, si toutefois le frottement aux points de contact D, E, F est assez grand pour empêcher le glissement. Il s'agit de démontrer cet équilibre. Nous supposerons, dans cette démonstration, l'épaisseur des verges assez petite pour qu'on puisse les regarder comme étant dans un même plan.

Soit G le centre de gravité de DB, la force P qui le sollicite, pourra se décomposer en deux forces parallèles, l'une Q détruite par le point d'appui B, l'autre R passant par un point quelconque de l'axe de DB, prolongé si cela est nécessaire. Faisons HD$=x$; R pourra se décomposer en deux forces parallèles S et T, qui se détermineront ainsi qu'il suit :

$$S:R::x+DF:DF, \quad T:R::x:DF,$$

d'où

$$S=\frac{R(x+DF)}{DF}, \quad T=\frac{R\times x}{DF},$$

S pourra se décomposer en deux forces parallèles V et U dont la dernière sera détruite par la résistance de la table, et on aura pour déterminer ces deux forces les proportions:

$$U : S :: DE : AE, \quad V : S :: AD : AE,$$

d'où

$$U = \frac{S \times DE}{AE}, \quad V = \frac{S \times AD}{AE} = \frac{R(x + DF) \times AD}{AE \times DF}.$$

Comme il ne reste plus que les deux forces V et T agissant en sens contraire sur une même droite rigide CF, il suffit pour qu'il y ait équilibre que leur résultante passe par le point d'appui C. C'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$T : V :: EC : FC \quad \text{ou} \quad \frac{R \times x}{DF} : \frac{R(x + DF) \times AD}{AE \times DF} :: EC : FC,$$

d'où successivement

$$x \times AE \times FC = x \times AD \times EC + DF \times AD \times EC,$$

$$x = \frac{DF \times AD \times EC}{AE \times FC - AD \times EC}.$$

Donc en prenant le point H qui est arbitraire à une distance du point D égale à cette valeur de x, on arrivera à deux forces T et V dont la résultante passera par le point d'appui D qui la détruira. On prouverait de même que les poids des autres verges, ou même les poids de corps placés sur elles se réduisent à des forces détruites par la résistance de la table; donc il y a équilibre.

Cette démonstration donne évidemment le moyen de calculer la charge des points d'appui et des points de contact.

THÉORÈMES.

Sur le triangle, le tétraèdre, l'ellipse et l'ellipsoïde.

PAR M. E. BRASSINNE,
professeur aux écoles d'artillerie.

—

1° Si on désigne par p, le demi-périmètre d'un triangle, et par r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle, son aire pourra s'exprimer par l'une des formules suivantes :

$$S=p^2.\mathrm{tang}\frac{1}{2}A.\mathrm{tang}\frac{1}{2}B.\mathrm{tang}\frac{1}{2}C\ldots S=r^2.\cot\frac{1}{2}A.\cot\frac{1}{2}B.\cot\frac{1}{2}C \text{ (*)}.$$

2° Considérons une ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, rapportée à son centre et à ses axes. Pour mener une tangente à cette ellipse, par un point extérieur m', dont les coordonnées sont x', y', on déterminera un point M' dont les coordonnées seront x', $\frac{a}{b}y'$, et pour ce point M' on mènera des tangentes à la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse. Abaissant des points de contact de ces tangentes des perpendiculaires, sur le grand axe, on obtiendra, par leur rencontre avec l'ellipse, les points de contact des tangentes à cette courbe passant par le point m'.

Pour mener, par une droite donnée, des plans tangents à l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on prendra, sur cette droite, un point m' dont les coordonnées seront x', y', z'; on déterminera ensuite un point M' dont les coor-

(*) Voir I, 79, 196. Tm.

données seront x', y', $\frac{a}{c}z'$; joignant ce point M′ avec la trace de la droite donnée sur le plan x, y, on aura une seconde droite, par laquelle on mènera deux plans tangents à la sphère $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. Du point de contact de ces plans tangents, abaissant deux perpendiculaires sur le plan des x, y, on obtiendra, par leur rencontre avec la surface de l'ellipsoïde, les deux points de contact des plans tangents passant par la droite donnée.

On emploiera la solution précédente relative à l'ellipsoïde de révolution, pour mener par une droite donnée un plan tangent à un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Si on exécute l'épure du plan tangent à l'ellipsoïde, par la méthode que nous venons d'indiquer, et si on compare cette solution à celle qu'a donnée Monge (au moyen de l'hyperboloïde de révolution), on en déduira un procédé géométrique simple, pour mener une tangente commune à une ellipse et à une hyperbole, qui ont un premier axe principal commun, et le second parallèle.

3° Si on joint les deux foyers F, F′ d'une ellipse aux deux points conjugués m', m'', on aura deux triangles FF′m', FF′m'', et il est aisé de trouver que : *la somme des carrés de leurs aires est constante.*

Si on en évalue les tangentes des demi-angles Fm'F′, Fm''F′, on aura en désignant ces angles par α, α' ;

$$\text{tang}^2\frac{\alpha}{2}+\text{tang}^2\frac{\alpha'}{2}=\text{constante}.$$

Si on désigne par X_1, X_2 les abscisses des points où les tangentes conjuguées, coupent le grand axe de l'ellipse, on aura la relation : $\frac{1}{X_1^2}+\frac{1}{X_2^2}=$ constante.

4° Désignons par a, b, c, les trois côtés d'un triangle, par R le rayon du cercle circonscrit : le carré de la distance du centre de gravité du triangle au centre du cercle circonscrit s'exprimera par la formule

$$D^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

En désignant par r le rayon du cercle inscrit, et par Δ la distance du centre de gravité du triangle au centre de ce cercle, on trouve la formule

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{3} - \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right).$$

Pour le tétraèdre, la distance du centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du solide est donnée par la formule

$$D^2 = R^2 - \frac{\Sigma.a^2}{16}$$

($\Sigma.a^2$ désignant la somme des carrés des arêtes).

Si, dans un tétraèdre, on désigne par l, l', l'', l''' les lignes qui vont des sommets au centre de gravité des faces opposées, on aura la relation

$$\Sigma a^2 = \frac{9}{4}(l^2 + l'^2 + l''^2 + l'''^2).$$

5° Appelons G le centre de gravité d'un contour polygonal composé de m côtés égaux ; par ce point menons une droite quelconque, et prenons sur cette droite deux points M, M', que nous joindrons aux sommets du polygone, on aura la relation

$$\Sigma.D'^2 - \Sigma.D^2 = m\left(M'G^2 - \overline{MG}^2\right)$$

(ΣD^2, $\Sigma.D'^2$, désignant la somme des carrés, des distances des points M, M' aux sommets du polygone).

DE LA LEMNISCATE HYPERBOLIQUE.

PAR M. H. CHARPENTIER,
professeur de mathématiques spéciales au collége d'Alençon.

—

1. Cette courbe est *le lieu des projections du centre de l'hyperbole équilatère sur les tangentes à cette courbe.*

Soient :

(1) $$y^2-x^2=-a^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère ;

(2) $$yy'-xx'=-a^2$$

l'équation de la tangente à cette hyperbole au point n' dont les coordonnées sont x' et y'.

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente sera :

(3) $$y=-\frac{y'}{x'}x,$$

et comme le point n' est sur la courbe, on aura encore cette relation :

(4) $$y'^2-x'^2=-a^2.$$

L'élimination de x' et de y' entre les équations (2), (3), (4) conduira à l'équation de la courbe.

En combinant les équations (2) et (3), on tire les valeurs :

(5) $$x'=\frac{a^2x}{y^2+x^2},$$ (6) $$y'=-\frac{a^2y}{y^2+x^2};$$

et les substituant dans l'équation (4), on a l'équation de la lemniscate,

(7) $$(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

La courbe passe par l'origine, qui est son centre; l'axe des x et celui des y sont des diamètres de la courbe, et en égalant à zéro les termes de cette équation qui sont au second degré, on a les équations des tangentes à l'origine :

$$y = x, \qquad y = -x.$$

L'origine est un point double, et ces tangentes, qui sont les bissectrices des angles des axes, sont les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

2. Si l'on élève au carré les équations (5) et (6) et les ajoutant, on a :

$$x''^2 + y''^2 = \frac{a^4}{x'^2 + y'^2} \quad \text{ou} \quad Om \times On' = a^2. \quad \text{(Fig. 6)},$$

ce qui prouve que *le demi-axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre la distance du centre au point générateur de la lemniscate hyperbolique et la distance du centre au contact correspondant de l'hyperbole.*

3. Si l'on rapporte la lemniscate à des coordonnées polaires, son équation sera :

$$\rho = \pm a \sqrt{\cos 2\omega}.$$

Chaque valeur de ω variant depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{4}$, donnera pour ρ des valeurs égales et de signes contraires qui détermineront les points de la courbe situés sur le rayon vecteur et sur son prolongement. Ce rayon vecteur variera depuis $\rho = a$ jusqu'à $\rho = 0$.

On obtiendra ainsi la portion de la courbe AmO et la portion A'm'O (*fig.* 6).

Depuis $\omega = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\omega = \frac{3\pi}{4}$, les valeurs de ρ sont imaginaires. Depuis $\omega = \frac{3\pi}{4}$ jusqu'à $\omega = \pi$, les valeurs de ρ va-

rient depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = a$; ce qui donne la portion de la courbe $Om''A'$ et la portion $Om'''A$.

Pour trouver le point maximum de la courbe situé dans la portion AmO de la courbe, en désignant par y l'ordonnée de ce point, on a :

$$y^2 = \frac{\rho^2(a^2 - \rho^2)}{2a^2}.$$

La dérivée de y par rapport à ρ est donnée par la quantité

$$\frac{a^2 - 2\rho^2}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Le rayon vecteur correspondant au point maximum sera :

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

d'où l'on a :

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \qquad x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Ce point de la lemniscate correspond au point de contact de l'hyperbole dont les coordonnées sont :

$$y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

4. En désignant par ρ et ρ' les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole correspondants à la même valeur de ω, on a :

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\omega},$$

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}};$$

d'où

$$\rho\rho' = a^2.$$

Donc *le demi-axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole faisant le même angle avec l'axe des* x.

5. On a vu que

$$Om \times On' = a^2.$$

En prolongeant le rayon *om* jusqu'à l'hyperbole en *n*, on a :

$$Om \times On = a^2 ;$$

donc
$$On = On'.$$

Le point de contact *n'* et le point *n* sont deux points symétriques de la courbe par rapport à l'axe des *x*.

On peut conclure de là un moyen très-simple de construire la lemniscate hyperbolique, quand on aura préalablement tracé l'hyperbole équilatère.

Pour cela, on mènera un rayon vecteur O*n* à l'hyperbole, on abaissera *nn'* perpendiculaire à l'axe des *x* et prolongée jusqu'à l'hyperbole, on joindra O*n'*; de *n* et de *n'* on abaissera respectivement des perpendiculaires sur les rayons O*n'* et O*n*, et on déterminera deux points *m'* et *m* de la courbe.

6. Enfin, on peut construire la lemniscate hyperbolique sans construire préalablement l'hyperbole régulatrice.

En effet, on a :

$$\overline{Om}^2 = a^2 \cos 2\omega.$$

Donc, si l'on décrit une demi-circonférence sur le demi-axe de l'hyperbole comme diamètre, *le rayon vecteur de la lemniscate est moyen proportionnel entre le demi-axe et le rayon vecteur mené à cette demi-circonférence et faisant avec l'axe des* x *un angle double de celui que fait le rayon vecteur de la lemniscate avec le même axe.*

De là cette construction : on mènera un rayon vecteur O*k* à la circonférence, on prendra KI = AK, on joindra OI, et on le rabattra en OP, on élèvera PG perpendiculaire à l'axe des *x*, on joindra OG et on le rabattra sur OK en O*m*, et le point *m* appartiendra à la lemniscate hyperbolique.

Note. Le nom de cette courbe dérive du mot grec λεμνίσκος

qui signifie une bandelette nouée en *huit*. Fagnano a découvert les principales propriétés de cette ligne qui est d'une si grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Les démonstrations du géomètre italien sont géométriques (v. t. III, p. 509); la théorie analytique est due à Euler (M. de Pétersbourg, t. V, 1751-52); la courbe, quoique fermée, est carrable (t. I, p. 351). La lemniscate hyperbolique équilatère est aussi une cassinoïde, courbe bifocale. Mais la réciproque est fausse : toute cassinoïde n'est pas une lemniscate. Nous engageons les élèves à démontrer ces propositions.

Cette ligne est le cas particulier de l'enveloppe d'un cercle assujetti à avoir son centre sur une ligne plane donnée et à toucher une seconde ligne donnée dans le même plan. Cette seconde ligne fait évidemment partie de l'enveloppe et si elle se réduit à un point, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation générale de l'enveloppe. Tm.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

—

La résolution en nombres entiers et positifs de l'équation indéterminée

$$ax \pm by = \pm c,$$

par les nombreuses applications qu'on en peut faire et les artifices de calcul dont elle est susceptible, est un des plus utiles exercices par lesquels les jeunes mathématiciens peu-

vent préluder à des recherches plus importantes. Aussi diverses méthodes de résolution sont-elles développées avec soin et une certaine étendue, dans les ouvrages estimés d'algèbre qui sont actuellement entre les mains des élèves. La suivante, fondée sur la théorie des restes (*), donnera toujours, nous le croyons du moins, une solution plus facile et plus prompte. Elle aura d'ailleurs l'avantage de familiariser les élèves avec des principes dont l'application encore peu répandue, peut être fort utile, et dont l'emploi judicieux est très-propre à exercer leur sagacité.

Rappelons ici en peu de mots les principes dont je parle.

On sait que si a et b sont premiers entre eux, et que l'on divise par a les produits successifs

$$1b,\ \ 2b,\ \ 3b,\ldots\ (a-1)\,b,$$

tous les restes seront différents. D'où il suit que si l'on conçoit cette suite prolongée indéfiniment de manière à former cette autre

$$1b,\ 2b,\ 3b,\ldots\ (a-1)\,b,\ ab,\ (a+1)\,b,\ \text{etc.},$$

les a premiers restes correspondants, se reproduiront périodiquement.

C'est ainsi par exemple que pour $a=11$ et $b=37$, on aura les deux suites :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.,
4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 0, 4, etc.

La première est celle des multiplicateurs successifs de 37, je les nommerai *indices*. La seconde est celle des restes correspondants, et se forme aisément par l'addition répétée du premier reste 4, en ayant soin de retrancher de chaque

(*) Cette méthode est précisément celle des congruences de M. Gauss. C'est pour la propager que nous avons inséré cet article (III, 343). Tm.

somme nouvelle le diviseur 11, à mesure qu'il s'y trouve contenu.

Or chacun des produits que nous venons de considérer se trouve compris entre deux multiples consécutifs de 11, et suivant qu'on le retranchera du multiple supérieur ou du multiple inférieur, le reste sera positif ou négatif. De plus la somme des valeurs absolues de ces deux restes, sera constante et égale à 11 ; ou chacun des deux sera par rapport à 11, le complément de l'autre.

Il résulte de là que nos deux suites, en ne prenant que la partie nécessaire de la seconde, sont encore représentées par celles-ci :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ -7, & -3, & -10, & -6, & -2, & -9, & -5, & -1, & -8, & -4. \end{array}$$

Remarquons que cette seconde suite de restes négatifs, n'est autre numériquement que la suite positive renversée.

En généralisant ces résultats, il sera facile de voir que dans l'une comme dans l'autre, la somme de deux termes pris à égales distances des deux termes extrêmes, sera toujours constante et égale à a, et que la somme de ces mêmes termes, pris le premier dans une des deux suites, et le second dans l'autre, sera nulle.

De plus, à cause de la périodicité des restes, un terme quelconque de la suite indéfinie des indices pourra être augmenté ou diminué d'un multiple quelconque de a sans que le reste change.

C'est en nous appuyant sur ces principes, que nous allons résoudre l'équation proposée

$$ax \pm by = \pm c,$$

dont les coefficients a et b doivent être, comme on sait, premiers entre eux.

Soit pour premier exemple l'équation numérique

$$11x + 17y = 339.$$

Le reste de la division de 17 par 11 étant 6, nous aurons les deux suites :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 6, & 1, & 7, & 2, & 8, & 3, & 9, & 4, & 10, & 5. \end{array}$$

Le terme tout connu de l'équation, 339, divisé par 11, donne le quotient 30 et le reste 9. L'indice 7 correspondant à 9, nous fait connaître d'abord que 7 fois 17 est le premier multiple de 17 qui, divisé par 11, donne aussi le reste 9. Donc 7 est la plus petite valeur possible de y. Faisons donc

$$y = 7.$$

La valeur correspondante de x sera

$$x = 30 - \frac{7 \times 17 - 9}{11} = 30 - 10 = 20.$$

Les formules cherchées sont donc :

$$x = 20 - 17t,$$
$$y = 7 + 11t.$$

Soit en second lieu l'équation

$$11x - 17y = 3.$$

La division de 3 par 11 donne le reste 3, dont le complément à 11 est 8. D'où je conclus que l'indice 5 correspondant à 8, est la valeur la plus simple possible de y.

Par suite

$$x = \frac{5 \times 17 + 3}{11} = 8.$$

Les formules cherchées sont donc :

$$x = 8 + 17t,$$
$$y = 5 + 11t.$$

Soit encore

$$11x - 17y = -3.$$

L'indice 6 correspondant au reste 3, est la valeur de y, et l'on trouve immédiatement que 9 est la valeur correspondante de x.

Les formules sont donc :

$$x = 9 + 17t,$$
$$y = 6 + 11t.$$

Mais si le diviseur a était un nombre un peu grand et que le reste cherché fût un des derniers de la période, on ne saurait disconvenir que le calcul précédent ne devienne long et fastidieux, et la méthode perdrait alors cette apparente simplicité que nous venons de remarquer. Heureusement les principes développés plus haut vont nous donner un moyen aussi facile que prompt de lever cette difficulté.

Soient, par exemple,

$$a = 48 \quad \text{et} \quad b = 59.$$

Le premier reste est alors 11 ; son complémentaire est -37. Proposons-nous d'abord de trouver l'indice correspondant au reste 1. Pour cela, opérons comme s'il fallait trouver le plus grand commun diviseur des nombres -37 et 11. Prenons les quotients absolus inférieurs et les restes avec leurs signes ; nous formerons ainsi le tableau suivant :

	3	2	1	
-37	11	-4	3	-1.

J'en conclurai ces deux suites d'indices et de restes :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 9, & 13, & 35. \\ 11, & -4, & 3, & -1, & +1. \end{array}$$

Voici comme on peut les déduire du tableau précédent :
L'indice 4 est égal au premier quotient 3 augmenté de 1, et

le reste correspondant est le premier reste trouvé — 4. L'indice suivant 9 est égal au précédent 4 multiplié par le second quotient 2 et augmenté du premier indice 1 ; et le reste correspondant est le second reste + 3 du tableau. L'indice suivant 13 est égal au précédent 9 multiplié par le troisième quotient 1 et augmenté de l'indice antérieur 4, et le reste correspondant est le dernier reste — 1 du tableau ; et, comme les restes — 1 et + 1 donnent une somme nulle, les indices correspondants 13 et 35 sont complémentaires par rapport au diviseur 48. Il est donc aisé de déduire le second du premier.

Maintenant, de l'indice 35 correspondant au reste 1, il est aisé de déduire l'indice correspondant à tel reste qu'on voudra, au reste 7 par exemple. Pour cela, multiplions 35 par 7 et retranchons du produit 245, 5 fois 48, ou le plus grand multiple possible de 48, le reste 5 sera le plus petit indice correspondant au reste indiqué 7 ; ce qui, dans tout l'exemple actuel, est facile à vérifier.

On peut remarquer que la loi de formation de ces indices est la même que celle que l'on suit pour former les termes des réduites sommaires des fractions continues.

Soient, pour second exemple, $a = 70$ et $b = 261$. Le tableau à former sera celui-ci :

	2	1	2	
51	— 19	13	— 6	1 ,

et les deux suites seront :

1,	3,	4,	11.
— 19,	13,	— 6,	1.

Si l'on demandait l'indice correspondant au reste 57, du produit de ce nombre par l'indice 11 correspondant au reste 1, on retrancherait 8 fois 70, ou le plus grand multiple de

70 qui s'y trouve contenu, et le reste 67 serait le plus faible indice correspondant à 57. D'ailleurs, 13 étant le complément du reste 57, l'indice correspondant 3 du tableau sera le complément de l'indice cherché, qui par là se trouve être encore le nombre 67, ainsi qu'on l'a trouvé par le calcul précédent.

Appliquons cette méthode à la résolution de l'équation

$$236x + 615y = 340948.$$

Le terme tout connu 340948 divisé par 236 donne le quotient 1443 et le reste 2. Il s'agit donc de trouver l'indice correspondant à ce reste 2.

Ici le premier reste est 143, et son complément est -93. Ces deux nombres donnent lieu au tableau suivant :

$$\frac{\quad}{143}\Big|\frac{1}{-93}\Big|\frac{1}{50}\Big|\frac{1}{-43}\Big|\frac{6}{7}\Big|\frac{\quad}{-1}.$$

Les deux suites seront :

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 5, & 33, & 203. \\ -93, & 50, & -43, & 7, & -1, & +1. \end{array}$$

On voit par là que le reste 2 correspondra à l'indice 406, ou, retranchant 236 de ce nombre, 2 correspondra à 170.

Donc $$y = 170.$$

Par suite,

$$x = 1443 - \frac{170 \times 615 - 2}{236} = 1443 - 443 = 1000;$$

d'où

$$x = 1000 - 615t,$$
$$y = 170 + 236t.$$

Quand le nombre des solutions sera limité, on voit qu'il sera indiqué immédiatement par la valeur de l'une des inconnues.

DÉMONSTRATION.

Du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles ; point de moyenne distance.

—

I. Soit

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

une équation algébrique à coefficients réels et de degré m.

Et soit

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad (2)$$

une autre équation algébrique à trois variables et de degré n.

Éliminant y, on obtient une équation de la forme

$$Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0, \qquad (3)$$

A, B,... sont des fonctions entières de z, et des coefficients des deux équations ; supposons que par la nature de la question qui a fourni les deux premières équations, nous sachions, 1° qu'à une même valeur de x, ne peuvent répondre que p valeurs de z ; 2° que pour p valeurs finies de z, toutes racines de l'équation

$$f(z) = 0, \qquad (4)$$

l'équation (3) acquière p racines égales chacune à l'infini. Il est évident que dans ces deux hypothèses, les p premiers coefficients de l'équation (3) sont nécessairement de la forme $Mf(z)$, où M ne renferme que les coefficients des équations (1) et (2) ; divisant tous les coefficients de l'équation par $f(z)$, on obtient une nouvelle équation dont les p premiers coefficients sont indépendants de z ; par conséquent les fonctions symétriques des racines qui ne dépendent que

de ces p premiers coefficients, conservent la même valeur, quelle que soit la valeur de z.

Si les mêmes hypothèses subsistent, pour le résultat de l'élimination de x, entre les équations (1) et (2), on en déduira les mêmes conclusions.

II. Prenons pour l'équation (2), celle-ci :

$$zD_y + D_x = 0, \qquad (2)$$

D_y est la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à y, et D_x la dérivée de la même fonction par rapport à x ; l'équation (2) est donc de degré $m-1$ par rapport à x et y ; éliminant y, on obtient une équation de la forme :

$$Ax^{m(m-1)} + Bx^{m(m-1)-1} + \ldots = 0, \qquad (3)$$

or z est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, ayant pour équation $F(x, y) = 0$; à une même valeur de x, ne correspondent donc que m valeurs de z ; ainsi dans l'équation (3), le degré de z ne peut dépasser m ; de plus, si dans l'équation (1) on ne prend que les termes de degré m, et qu'on y fasse $x=1$, $y=z$; et qu'on représente le résultat par $f(z)$. Si on pose :

$$f(z) = 0, \qquad (4)$$

les racines de cette équation sont les m coefficients angulaires relatifs aux asymptotes, c'est-à-dire aux tangentes qui ont un point de contact à l'infini ; donc par chaque racine de l'équation (4), deux racines de l'équation (3) deviennent infinies, ainsi A et B sont de la forme $Mf(z)$; donc $\frac{B}{A}$ est indépendant de z, et la somme des racines de cette équation ne dépend pas de z ; par les mêmes raisonnements, on parvient à la même conclusion en éliminant x, entre les deux équations (1) et (2).

III. *Théorème de M. Chasles.* A une courbe algébrique

de degré m, on peut mener, analytiquement parlant, $m(m-1)$ tangentes parallèles; le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact reste le même, quelles que soient les directions des tangentes.

La démonstration est une conséquence immédiate du paragraphe précédent.

IV. On étend facilement ce théorème aux plans tangents à une surface; soit $F(x, y, z) = 0$, l'équation de cette surface, et soient p, q les coefficients angulaires qui déterminent la direction du plan tangent. On aura les deux équations $pD_z + D_x = 0$, $qD_z + D_y = 0$; éliminant z et y, on parvient à une équation entre x, p, q; raisonnant sur cette équation comme ci-dessus, sur l'équation (3), on en déduit les mêmes conséquences.

V. Le beau théorème de M. Chasles, conduit à cette généralisation; dans une courbe algébrique de degré m, si on prend pour un système d'axes donné, tous les points où tous les coefficients différentiels d'un même ordre sont égaux à un nombre donné; le point de moyenne distance de tous ces points est fixe, quel que soit le nombre. Le moyen de démonstration est le même. En effet, on peut toujours parvenir à une équation renfermant la relation entre l'abscisse et ce nombre; à chaque valeur de l'abscisse ne correspondent que m de ces nombres, donc dans cette équation m est la plus haute puissance à laquelle ce nombre puisse se trouver élevé, et à l'infini asymptotique, ce nombre est évidemment nul; donc les deux premiers coefficients de l'équation ordonnée par rapport à l'abscisse, renferment ce nombre élevé à la même puissance m; donc etc., etc.

VI. D'après la théorie de l'élimination, le coefficient A ne contient que les coefficients de l'équation (1) appartenant aux termes de degré m, et B ne contient que ces mêmes coefficients, plus ceux qui appartiennent aux termes de

degré $m-1$; de sorte que pour toutes les lignes dont les équations ont les mêmes termes de degré m et $m-1$, les points de moyenne distance ci-dessus déterminés (V) sont les mêmes. Or le système des m asymptotes est une de ces lignes ; ces asymptotes se coupent en $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points ; ce sont les seuls points doubles de la ligne ; de sorte que les droites qui passent par ces points peuvent être considérées comme des tangentes ; par conséquent le point fixe relatif aux tangentes parallèles est aussi le point de moyenne distance des $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points d'intersection des asymptotes.

Observation. Il est presque superflu d'avertir que toutes ces propositions sont énoncées dans un sens purement analytique ; plusieurs de ces points peuvent être situés à l'infini, devenir imaginaires, etc. ; mais comme il s'agit de fonctions symétriques, ces circonstances n'invalident pas ces propositions.

VII. Les m asymptotes forment un polygone déterminé par $2m-3$ données. Par conséquent dans toute ligne de degré m, il y a au moins $2m-3$ fonctions des coefficients qui restent constantes, quel que soit le déplacement de l'origine et des axes.

(*La fin prochainement.*)

NOTE

sur la détermination du rapport π de la circonférence au diamètre, par la méthode des périmètres.

PAR M. HUET,

régent de mathématiques spéciales au collége de Pamiers.

—

Le nombre π, qui représente le rapport constant de la circonférence au diamètre, représente encore la longueur

d'une circonférence dont le diamètre est l'unité ; ce nombre sera donc connu si l'on parvient à calculer directement la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord résoudre le suivant :

Étant donnés les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, calculer les périmètres des polygones réguliers de $2n$ côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit.

La figure qu'emploie Legendre, dans sa Géométrie, pour résoudre le problème qui conduit à la détermination du nombre π par la méthode des surfaces, peut sans aucune modification nous servir à résoudre aussi celui-ci (*).

Soit AB et CD (*fig.* 7) les côtés des polygones réguliers inscrit et circonscrit de n côtés, AE et FG les côtés des polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés ; appelons a et b les périmètres des deux premiers polygones, a' et b' les périmètres des deux seconds, on a évidemment :

(1) $a = n\text{AB} = 2n\text{AK}$, (2) $b = n\text{CD} = 2n\text{CE}$,

(3) $a' = 2n\text{AE}$, (4) $b' = 2n\text{FG}$.

Les égalités (1) et (3) donnent :

$$a : a' :: \text{AK} : \text{AE}$$

ou, puisque les triangles AEK, FEO sont semblables,

$$:: \text{EQ} : \text{FO},$$

ou bien, à cause des triangles semblables FEH, FEO,

$$:: \text{HE} : \text{FE}$$

ou, en doublant les termes du second rapport,

$$:: \text{AE} : \text{FG}$$

(*) M. Lionnet donne la même démonstration (*Géom.*, p. 157, 2e édition); de même M. Cirodde (*Géom.*, p. 173). Tm.

ou encore :

$$:: 2n\mathrm{AE} : 2n\mathrm{FG},$$

ou enfin, à cause des égalités (3) et (4),

$$:: a' : b'.$$

Cette proportion nous donne :

$$a' = \sqrt{ab'}. \qquad (5)$$

Des égalités (2) et (4) on tire de même :

$$b : b' :: \mathrm{CE} : \mathrm{FG},$$
$$:: \mathrm{CE} : 2\mathrm{FE}.$$

Doublant les termes du premier rapport et divisant les conséquents par 2, on trouve :

$$2b : b' :: \mathrm{CE} : \mathrm{FE};$$

d'où

$$2b - b' : b' :: \mathrm{CF} : \mathrm{FE}$$

ou, puisque FO est bissectrice de l'angle COE,

$$:: \mathrm{CO} : \mathrm{OE}$$

ou, à cause des parallèles AB et CD,

$$:: \mathrm{AO} : \mathrm{OK},$$

ou bien

$$:: \mathrm{OE} : \mathrm{OK},$$

ou bien, à cause des triangles semblables CEO, AKO,

$$:: \mathrm{CE} : \mathrm{AK},$$

ou encore

$$:: 2n\mathrm{CE} : 2n\mathrm{AK},$$

ou enfin, à cause des égalités (2) et (1),

$$:: b : a.$$

De cette proportion on tire :

$$2b : b' :: a + b : a;$$

d'où

$$b' = \frac{2ab}{a+b}. \qquad (6)$$

Les relations (5) et (6) permettront de calculer facilement les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 12, 24, 48, 96, etc. côtés, en partant des périmètres des hexagones inscrit et circonscrit au cercle dont le diamètre est 1, qu'on trouve immédiatement. Par suite on trouvera, à une approximation aussi grande qu'on le voudra, la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité, c'est-à-dire le nombre π.

On peut, du reste, déterminer une limite supérieure du nombre des opérations qu'on devra faire pour obtenir une approximation demandée.

Pour cela, nous allons prouver que $b' - a' < \frac{1}{4}(b - a)$.

On a
$$b'^2 - a'^2 = b'^2 - ab' = b'(b' - a).$$
D'ailleurs,
$$b' - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b}.$$
Donc
$$b'^2 - a'^2 = \frac{ab'(b-a)}{a+b} = \frac{a'^2(b-a)}{a+b};$$
d'où l'on tire :
$$b' - a' = \frac{a'}{a'+b'} \cdot \frac{a'}{a+b}(b-a).$$

Or $\frac{a'}{a'+b'} < \frac{1}{2}$, puisque $b' > a'$.

De plus, $b > b'$, donc $a + b > a + b'$; par suite $\frac{a+b}{2} > \frac{a+b'}{2}$, et à fortiori $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab'}$, puisque la moyenne arithmétique entre deux quantités est plus grande que la moyenne géométrique entre ces mêmes quantités.

On a donc, puisque $a' = \sqrt{ab'}$, $\frac{a+b}{2} > a'$; d'où $\frac{a'}{a+b} < \frac{1}{2}$. Il résulte de là que
$$b' - a' < \frac{1}{4}(b - a).$$

On trouverait de même $b''-a''<\frac{1}{4}(b'-a')$ et à fortiori $<\frac{1}{4}(b-a)$. Donc, en général, en appelant n le nombre de fois que les formules (5) et (6) auront été employées,

$$b_n-a_n<\frac{1}{4^n}(b-a).$$

Il est clair maintenant que si l'on veut obtenir le nombre π à moins de $\frac{1}{10^m}$ près, il suffira de déterminer pour n un nombre tel qu'on ait :

$$\frac{1}{4^n}(b-a)\overset{=}{<}\frac{1}{10^m};$$

d'où l'on pourra tirer n par tâtonnement au moyen des logarithmes. En prenant les logarithmes, il vient :

$$m+\log(b-a)\overset{=}{<}n\log 4;$$

d'où

$$n\overset{=}{>}\frac{m+\log(b-a)}{\log 4},$$

qui donne la limite cherchée.

Le nombre des côtés des polygones dont a et b sont les périmètres dans l'application numérique étant 6 ; celui des polygones dont les périmètres sont a' et b' est 6.2 ; celui des suivants est 6.2^2, et ainsi de suite. Donc, en général, celui des polygones dont a_n et b_n sont les périmètres sera $6.2^n=N$, formule qui fera connaître le nombre N des côtés des deux derniers polygones auxquels il faudra s'arrêter.

Note. Voir pour le calcul de π une note de M. Finck (*Géom.*, p. 292, 3e édit.).

THÉORIE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.)

(Suite, voir p. 109.)

16. Lorsque les deux grandeurs qu'il s'agit de comparer sont à portée de l'être immédiatement, on obtient facilement le nombre cherché, par une opération très-simple, et qui consiste dans ce qu'on appelle *mesurer* ; nous en parlerons en son lieu avec tout le détail nécessaire :

17. Mais si cette comparaison ne peut s'exécuter de cette manière, nous pouvons sans la faire, en obtenir le résultat, en partant des relations qui se trouvent entre les diverses grandeurs qui existent dans un même objet, ou dans des objets différents mais liés entre eux d'une manière quelconque ; c'est alors que le but qu'on se propose ne peut être atteint que par des combinaisons d'idées qui surpasseraient le plus souvent toutes les forces de notre esprit, sans le secours des signes dont nous avons déjà parlé, et pour lesquelles on est obligé assez fréquemment d'avoir recours à toutes les ressources du calcul.

18. Il faut éclaircir ce que nous venons de dire des relations qui existent entre les diverses grandeurs, d'un même ou de différents objets. Le calcul *élémentaire* s'occupe des plus simples ; le calcul *supérieur* les combine d'une manière particulière qui comprend tout ce qui dépend de ces sortes de relations, et complète ainsi le calcul él mentaire ; enfin le calcul supérieur est entièrement fondé sur des considérations qui semblent au premier coup d'œil entièrement différentes, mais qui ne le paraissent plus autant à mesure qu'elles sont

mieux connues; nous renverrons encore ici à la lecture de l'ouvrage entier, pour éclaircir ce que ces notions peuvent avoir d'obscur, et pour développer convenablement la différence qu'on observe entre le calcul analytique, et le calcul synthétique, dont la distinction est facile à établir dans chaque sorte de calcul (*).

20. La plus simple des comparaisons que nous pouvons faire entre deux grandeurs, nous donne l'idée du premier des nombres, désigné par le mot *un* : il exprime que les deux grandeurs comparées ont précisément la même valeur; ainsi après avoir comparé la longueur d'un objet à celle qu'on appelle pied, et son poids à la livre, si on a trouvé précisément la même valeur à ces deux longueurs et à ces deux poids, on exprimera ce résultat en disant que sa longueur est d'un pied, et son poids d'une livre, où ces mots *un*, *une*, marquent évidemment le jugement que nous portons sur la manière d'être d'une des deux grandeurs, relativement à l'autre.

21. Il est à propos d'observer en passant que deux grandeurs homogènes de même valeur portent le nom d'*égales*, et celui d'*inégales* quand les valeurs en sont différentes.

Deux grandeurs hétérogènes ne sont évidemment susceptibles d'être inégales, ni égales. Quand deux homogènes sont inégales, on peut toujours les ramener à l'égalité en diminuant l'une ou en augmentant l'autre convenablement, celle qu'il faut augmenter pour cela est celle qu'on appelle *la plus petite*, l'autre est *la plus grande*.

22. Quand on représente les grandeurs par les différentes sortes de signes dont on est convenu de se servir pour cela, et que nous ferons bientôt connaître, on place entre elles ce signe =, qui se prononce *égale*, pour exprimer qu'elles sont égales, et quand elles sont inégales, on se sert d'un de ceux-

(*) Le § 19 manque. Tm.

ci $>$ ou $<$ dont le premier signifie *plus grand que*, et le second *plus petit que*, en ayant soin d'en tourner toujours la pointe du côté de la plus petite des deux grandeurs (*).

23. L'idée de l'égalité ne peut nous donner que celle du seul nombre *un*, puisqu'elle ne peut exister que d'une seule manière, mais rien ne peut mettre des bornes à la quantité des nombres qui résultent de la comparaison de deux grandeurs inégales, parce que rien ne peut en mettre aux diverses sortes d'inégalités que l'on peut concevoir. On n'a d'abord eu l'idée que d'une seule espèce de nombres ; les différentes applications qu'on a faite des procédés du calcul, à la détermination des grandeurs, en a fait découvrir successivement trois autres (**). On ne peut avoir aucun doute sur l'ordre, dans lequel l'esprit humain s'est élevé successivement à cette connaissance. On verra dans l'explication que nous allons en donner, qu'aucune des trois premières espèces, les seules qui aient été connues des anciens, n'a pu être inventée que dans l'ordre où nous allons les présenter, et la quatrième est une découverte trop récente pour que nous en ignorions l'époque.

24. Il est certain que la *première* sorte de comparaison qui ait été faite entre deux grandeurs, est celle d'une quantité quelconque, et d'une des unités qui entraient dans sa composition, c'est cette comparaison qui nous a donné l'idée des nombres exprimés par ces mots *deux, trois, quatre*, etc., dont la signification est connue de tout le monde.

25. Cette comparaison offrant des plus grands avantages

(*) Note sur les instruments, compas, balance, etc., qui nous servent à déterminer l'égalité ou l'inégalité des grandeurs, et dont l'élève doit avoir au moins une idée.

(**) On pourrait admettre une cinquième espèce, si cet assemblage de signes, auquel on a donné le nom de quantités imaginaires, répondait à une idée quelconque, qu'on pût ranger dans la classe de nos idées numériques ; il me paraît que tous les mathématiciens sont d'accord pour la négative ; il n'en est pas de même des nombres négatifs, à l'égard desquels je renvoie à ce que j'en dirai tout à l'heure.

aux hommes vivant en société, il n'est pas étonnant qu'elle leur soit bientôt devenue familière, et que pour en exprimer toutes les circonstances, ils aient donné à ces sortes de réunion, le nom de *quantités*, et celui d'*unité* à chacun des objets dont elles étaient composées. Ainsi que nous l'avons déjà expliqué, en ramenant ces deux mots à leur signification primitive, on en fait encore aujourd'hui un grand usage dans le calcul, mais de nouvelles idées en ont bien altéré la signification, comme on va le voir dans ce qui suit. Il est probable qu'il en a été de même du mot nombre; il ne s'appliquait d'abord qu'aux seuls entiers, mais il a reçu en même temps une signification de plus en plus étendue.

(*La suite prochainement.*)

ESSAI

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique, ou transcendante.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique.

—

I.

Soit une équation

$$(1) \qquad f(z)=0,$$

dont le premier membre $f(z)$ représente une fonction réelle ou imaginaire, algébrique ou transcendante de la variable z. Posons :

$$z=x+y\sqrt{-1},$$

$$f(x+y\sqrt{-1})=f_1(x,y)+f_2(x,y)\sqrt{-1}=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1};$$

la détermination des racines imaginaires de l'équation (1), se ramènera à la résolution en nombres réels des deux équations simultanées :

$$\mathrm{P}=0, \quad \mathrm{Q}=0,$$

ou ce qui revient au même en considérant x et y comme les coordonnées rectangles d'un point variable par rapport à deux axes déterminés, à la recherche des points communs aux deux courbes

$$(2) \qquad P = 0, \quad Q = 0.$$

Pour rappeler cette propriété et afin de simplifier le discours nous conviendrons d'appeler *points racines* de l'équation (1), les points d'intersection des deux courbes représentées par les équations (2).

Cela posé, supposons que par le théorème de M. Cauchy, ou par tout autre moyen, on soit parvenu à tracer un contour rectangulaire ACBDA comprenant un et un seul point racine M de l'équation (1) (*fig.* A), tous les points de ce contour seront en quelque sorte des positions approchées du point-racine M, et il ne restera plus qu'à déduire des premières positions approchées ainsi obtenues, d'autres positions de plus en plus approchées, de manière à avoir la position exacte si cela est possible, ou du moins une position aussi approchée qu'on le jugera nécessaire.

C'est ce calcul d'approximation que nous nous proposons de développer, nous emploierons la méthode de Newton qui est la plus simple et la plus expéditive; seulement comme son application indéfiniment prolongée, ne conduirait pas toujours dans le cas actuel à des résultats exacts, nous la modifierons un peu; il nous faudra en outre remplir plusieurs conditions analogues à celles que Fourier a données dans *l'analyse des équations déterminées* pour le cas des racines réelles (*).

(*) M. Cauchy à la fin de ses leçons sur le calcul différentiel s'est aussi occupé de la rectification de la méthode de Newton appliquée aux racines imaginaires; mais les résultats auxquels il est parvenu sont en tout différents des nôtres.

II.

Commençons par énoncer les conditions dont il s'agit, en prouvant la possibilité de satisfaire à chacune d'elles.

« Pour pouvoir procéder avec certitude à l'approximation, il suffit que l'une des deux courbes représentées par les équations $P = c$, $Q = c'$ où c et c' sont des constantes quelconques, ne présente dans l'intérieur du contour ABCDA (*fig.* A), ni points singuliers, ni en même temps une tangente parallèle à l'axe des x et une tangente parallèle à l'axe des y. »

Il est clair que ces deux conditions peuvent toujours être remplies, à moins que le point racine M ne soit lui-même un point singulier des deux courbes $P = 0$, $Q = 0$.

Or je dis d'abord que l'on peut toujours supposer que le point racine M ne soit ni pour l'une ni pour l'autre des deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, un point isolé, d'arrêt, multiple, de rebroussement. En effet, si le point M était un de ces points singuliers pour la courbe $P = 0$ par exemple, on aurait en ce point :

$$\frac{dP}{dx} = 0, \qquad \frac{dP}{dy} = 0,$$

mais de l'égalité

$$f(x + y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}.$$

On tire aisément :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx},$$

on aurait donc :

$$\frac{dP}{dx} = 0, \qquad \frac{dQ}{dx} = 0,$$

et alors le point M serait non-seulement point racine de l'équation (1) mais encore de l'équation dérivée

$$f'(z) = 0.$$

Ce que l'on peut toujours ne pas supposer, car dans ce cas le point racine M se détermine en résolvant une équation plus simple que l'équation (1), et dont le premier membre est le plus grand commun diviseur entre $f(z)$ et $f'(z)$, quand du moins $f(z)$ est algébrique.

On voit en même temps qu'en resserrant suffisamment le contour ABCDA, l'une des deux équations $\frac{dP}{dx}=0$, $\frac{dP}{dy}=0$, finira par ne plus avoir de solutions dans ce contour, alors la courbe $P=c$, et par conséquent la courbe $Q=c'$, ne présentera plus de tangentes parallèles à l'un des axes.

Je dis en second lieu que l'on peut supposer que le point M ne soit pas un point d'inflexion de l'une des courbes $P=0$, $Q=0$. En effet, si ce point était en même temps un point d'inflexion des deux courbes $P=0$, $Q=0$; on aurait pour ce point :

$$\frac{d^2P}{dx^2}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy}+\frac{d^2P}{dy^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2=0,$$

et

$$\frac{d^2Q}{dx^2}\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2-2\frac{d^2Q}{dxdy}\frac{dQ}{dx}\frac{dQ}{dy}+\frac{d^2Q}{dy^2}\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2=0;$$

mais de l'égalité

$$f(x+y\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1},$$

on déduit :

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy},\qquad \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{d^2Q}{dxdy}=-\frac{d^2P}{dy^2},\qquad \frac{d^2P}{dxdy}=\frac{d^2Q}{dy^2}=-\frac{d^2Q}{dx^2};$$

les premières égalités rcviennent donc à :

$$\frac{d^2P}{dx^2}\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}=2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy},$$

$$\frac{d^2P}{dxdy}\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}=-2\frac{d^2P}{dx^2}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy},$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2P}{dxdy}\right)^2=0,$$

si l'on n'a pas :

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dy}=0;$$

d'où enfin :

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{d^2P}{dxdy}=\frac{d^2Q}{dx^2}=0;$$

ce qu'on peut ne pas supposer, car alors le point M est point-racine de l'équation

$$f''(z)=0,$$

et peut être déterminé en résolvant une équation plus simple que l'équation (1), et dont on obtient le premier membre en cherchant le plus grand commun diviseur entre $f(z)$ et $f''(z)$.

Rapprochant ce résultat de celui que nous avons établi plus haut, il est facile de conclure, comme nous voulions le démontrer, que l'on peut toujours supposer le contour assez petit pour que l'une des deux courbes $P=c$, $Q=c'$ n'ait dans l'intérieur de ce contour ni points singuliers, ni en même temps une tangente parallèle à l'axe des x, et une tangente parallèle à l'axe des y. Remarquons en outre que celle des deux courbes qui remplira ces conditions, et que nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, être $P=c$, ne présentera d'un certain côté de $Q=0$ ni tangente parallèle à l'axe des x, ni tangente parallèle à l'axe des y; ce côté pouvant d'ailleurs être le même pour toutes les valeurs de c, si le contour est suffisamment petit. Cette dernière propriété résulte de ce que la courbe $P=c$ ne peut avoir deux tangentes parallèles à l'un des axes, sans avoir en même temps ou une tangente parallèle à l'autre axe, ou un point d'inflexion.

III.

Les conditions précédentes étant remplies, on peut procéder au calcul du point-racine. Il faut avoir soin seulement de partir d'une position approchée convenablement placée.

« Il suffit que le point m (*fig.* B), qui correspond à cette » position approchée, soit situé dans la concavité de la » courbe $P=0$ et du côté de la courbe $Q=0$, où les » courbes $P=c$ n'ont ni tangentes parallèles à l'axe des x, » ni tangentes parallèles à l'axe des y; de plus, que ce point » m soit tel que toutes les courbes représentées par l'équa- » tion $P=cQ$, c étant une constante, depuis EMF qui » correspond à $c=0$ jusqu'à mMH qui passe par le point m, » n'aient du côté de la courbe $Q=0$, où se trouve le point » m, ni tangentes parallèles à l'axe des x, ni tangentes pa- » rallèles à l'axe des y, et que toutes les tangentes de ces » courbes qui correspondent à des points situés du même » côté, allant rencontrer la courbe $Q=0$ avant leur sortie » du contour, fassent avec les courbes $P=c$, comprises dans » ce contour, des angles plus petits que la moitié du plus pe- » tit de ceux que forment, avec la courbe $P=0$, celles des » courbes représentées par l'équation $P=cQ+c_1$, qui ont » des points d'inflexion dans le contour. »

Il est évident, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans aucun détail, que ces nouvelles conditions peuvent toujours être remplies, en prenant le contour suffisamment petit et le point m suffisamment près de $P=0$, et d'un côté convenable de $Q=0$.

IV.

Les courbes comprises dans l'équation $P=cQ$ et dans l'équation $P=cQ+c_1$, dont il a été question dans le paragraphe précédent, devant jouer, dans ce qui va suivre, un

très-grand rôle, je ferai remarquer dès à présent deux de leurs propriétés. Les premières courbes passent par les points communs aux deux courbes $P = 0$, $Q = 0$; et les premières, comme les secondes, coupent sous des angles constants ayant pour tangentes $\pm c$ toutes les courbes $P = c'$ et sous des angles constants ayant pour tangentes $\pm \frac{1}{c}$ toutes les courbes $Q = c''$. Ces deux propriétés sont trop simples pour que nous nous arrêtions à les démontrer.

V.

Revenons maintenant au calcul du point-racine M.

Soient a, b les coordonnées de ce point, α, β celles du point m, qui représente la première position approchée, et $\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$ les différences $a - \alpha$, $b - \beta$, de telle sorte que ρ soit la distance des deux points m et M, et θ l'angle positif que la droite mM fait avec la partie positive de l'axe des x;

Nous aurons d'abord :

$$f(\alpha + \rho \cos \theta, (\beta + \rho \sin \theta) \sqrt{-1}) = 0;$$

d'où, en posant :

$$f(\alpha + \rho \cos \theta, (\beta + \rho \sin \theta) \sqrt{-1}) = \varphi(\rho) + \psi(\rho) \sqrt{-1},$$

il vient :

$$\varphi(\rho) = 0, \quad \psi(\rho) = 0,$$

ou :

$$\varphi(0) + \varphi'(\varepsilon, \rho) \rho = 0, \quad \psi(0) + \psi'(\varepsilon_1, \rho) \rho = 0,$$

ε et ε_1 étant deux nombres indéterminés compris entre 0 et 1.

Posons, conformément à la méthode de Newton :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,$$

les deux dernières équations deviendront :

$$\varphi(0) + \varphi'(0) \rho = 0, \quad \psi(0) + \psi'(0) \rho = 0;$$

d'où :

$$(3)\quad \frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}=\frac{\psi(0)}{\psi'(0)} \text{ et } \rho=-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} \text{ ou } \rho=-\frac{\psi(0)}{\psi'(0)},$$

équations qui font successivement connaître θ et ρ.

Examinons si ces valeurs conduisent à une position du point-racine plus approchée que celle d'où l'on est parti.

VI.

Mettons d'abord les équations (3) sous une autre forme.

Reprenons l'égalité :

$$f\left(x+y\sqrt{-1}\right)=f_1(x,y)+f_2(x,y)\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1},$$

et posons en outre :

$$f\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)=f_1(\alpha,\beta)+f_2(\alpha,\beta)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1},$$

nous aurons évidemment :

$$\varphi(\rho)=f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\ \beta+\rho\sin\theta),$$
$$\psi(\rho)=f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\ \beta+\rho\sin\theta),$$

$$\varphi'(\rho)=\frac{d.f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d.(\alpha+\rho\cos\theta)}\cos\theta+\frac{d.f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\beta+\rho\sin\theta)}\sin\theta,$$

$$\psi'(\rho)=\frac{d.f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\alpha+\rho\cos\theta)}\cos\theta+\frac{d.f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\beta+\rho\sin\theta)}\sin\theta,$$

d'où

$$\varphi'(0)=\frac{dA}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dA}{d\beta}\sin\theta,\quad \psi'(0)=\frac{dB}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dB}{d\beta}\sin\theta;$$

les équations (3) reviennent donc à

$$(4)\qquad \frac{A}{\frac{dA}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dA}{d\beta}\sin\theta}=\frac{B}{\frac{dB}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dB}{d\beta}\sin\theta},$$

$$(5)\quad \rho=\frac{-A}{\frac{dA}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dA}{d\beta}\sin\theta} \text{ ou } \rho=\frac{-B}{\frac{dB}{d\alpha}c\theta+\frac{dB}{d\beta}\sin\theta}.$$

VII.

Nous tirons maintenant de l'équation (4) :

$$\left(A\frac{dB}{d\alpha}-B\frac{dA}{d\alpha}\right)\cos\theta+\left(A\frac{dB}{d\beta}-B\frac{dA}{d\beta}\right)\sin\theta=0,$$

d'où

$$\frac{d.\frac{A}{B}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d.\frac{A}{B}}{d\beta}\sin\theta=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta=-\frac{\frac{d.\frac{A}{B}}{d\alpha}}{\frac{d.\frac{A}{B}}{d\beta}}.$$

Telle est la valeur de θ ; on peut donner à cette valeur une interprétation géométrique assez remarquable. « Elle est » égale à l'un des deux angles positifs que fait avec la partie » positive de l'axe des x, la tangente menée par le point (α,β), » à la courbe dont l'équation est

» $$\frac{P}{Q}=\frac{A}{B}\quad\text{ou}\quad P=\frac{A}{B}Q.$$ »

Il est clair d'ailleurs que de ces deux angles positifs, on doit prendre celui que fait avec la partie positive de l'axe des x, la portion de la tangente dont il s'agit, qui, parcourue en partant du point m, tend à s'approcher du point M ; nous avertissons une fois pour toutes, que dans ce qui va suivre nous représenterons toujours ce dernier angle par θ.

VIII.

Occupons-nous en second lieu de la valeur approchée de ρ

$$\rho = \frac{-A}{\frac{dA}{d\alpha}\cos\theta + \frac{dA}{d\beta}\sin\theta} \quad (*).$$

Nous devrions d'abord nous demander si cette valeur est positive comme la valeur exacte ; mais pour ne pas entraver notre marche, nous supposerons qu'il en soit ainsi, nous reviendrons dans la suite sur ce point important.

Appelons φ_1 celui des deux angles positifs que fait avec la partie positive de l'axe des x, la tangente au point $x=\alpha$, $y=\beta$ de la courbe $P=A$, pour lequel $\sin(\theta-\varphi_1)$ est positif; la valeur de ρ écrite ci-dessus deviendra

$$\rho = \frac{\pm A}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2}\sin(\theta-\varphi_1)},$$

le signe $\pm$ étant celui de A, afin que le second membre soit positif. Pour savoir maintenant si le point qui correspond à la seconde position approchée est, comme celui d'où l'on est parti, situé dans la concavité de la courbe $P=0$, voyons si la valeur approchée de ρ est plus petite que la partie mm_1, (*fig.* B) de la tangente à la courbe $P = \frac{A}{B}Q$, menée par le point $x=\alpha$, $y=\beta$, et comprise entre ce point et la courbe $P=0$. (*La suite prochainement.*)

SUR LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur d'analyse à l'École polytechnique.

—

L'ingénieuse méthode donnée par M. O. R. (p. 81, t. IV),

(*) Dans le second membre de cette égalité, θ a la signification que nous lui avons donnée à la fin du § précédent.

pour vérifier certains diviseurs, est susceptible d'extension comme il suit.

« Soit A un nombre D composé de $p + 1$ *tranches de a* » *chiffres*, n un facteur quelconque par lequel on multiplie » *la première tranche à droite*; si on ajoute à ce produit *la* » *tranche suivante*; si on multiplie ce résultat par n, qu'on » ajoute à ce second produit *la troisième tranche*; qu'on » répète la même opération jusqu'*à la dernière tranche à* » *gauche*; et qu'on désigne par R, le dernier résultat de ces » opérations, la divisibilité de A par un diviseur quelconque » de $\overline{10^a}.n - 1$ dépendra de R.

» Si, au lieu de procéder uniquement par addition, etc., » la divisibilité du dernier résultat obtenu R, par un di- » viseur de $10^a.n + 1$, sera la même que celle de A. »

Au moyen de cette extension, on pourra vérifier certains diviseurs par un calcul plus simple que si on s'en tenait à la distinction du nombre en tranches d'un seul chiffre. Pour en donner une idée, je supposerai seulement qu'on adopte la division en tranches de deux chiffres; alors on pourra vérifier par

n — 1	les nombres 3 et 11, diviseurs de $100.n - 1$	et 101, diviseur de $100n + 1$,
n — 2	199	3,67
n — 3	13,23	7,43
n — 4	3,7,19	401
n — 5	499	3,167

Si on se bornait à la division en tranches d'un seul chiffre il faudrait adopter le multiplicateur 7 pour vérifier le diviseur 23; etc.

NOTE

sur les Polygones réguliers inscriptibles,

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences.

—

On sait dans les éléments, inscrire les polygones réguliers dont les nombres de côtés sont représentés par les trois formules

$$2^n,\quad 3.2^{n'},\quad 5.2^{n''}.$$

Correspondant à des arcs qui sont des fractions de la circonférence représentées par

$$\frac{1}{2^n},\quad \frac{1}{3.2^{n'}},\quad \frac{1}{5.2^{n''}},$$

et l'on obtient une quatrième classe d'arcs sous-tendant les côtés d'une classe correspondante de polygones réguliers, représentée par

$$\frac{1}{3.5.2^{n'''}},$$

en faisant une soustraction $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.5}$ de deux arcs choisis convenablement dans les trois premières formules.

Ne pourrait-on pas, par une opération analogue effectuée sur les arcs compris dans les quatre formules que nous avons citées, tomber sur une nouvelle formule, sur une nouvelle série de polygones ne rentrant pas dans ceux que déjà l'on sait inscrire? Il est évident d'avance que le résultat

ne donnera rien de nouveau, car on aurait signalé cette remarque si simple dans tous les ouvrages élémentaires, en raison de son importance : mais deux mots suffisent pour démontrer l'inutilité de cette espèce de considération, dans la recherche qui nous occupe.

En généralisant, il suffit d'examiner si la somme algébrique :

$$\pm \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{3.2^{n'}} \pm \frac{1}{5.2^{n''}} \pm \frac{1}{3.5.2^{n'''}},$$

donnera un arc, qui soit ou une partie aliquote de la circonférence encore inconnue, ou un multiple d'une partie aliquote inconnue. Or, en réduisant au plus petit dénominateur commun, et faisant la somme, on aura un certain numérateur et un dénominateur qui ne contiendra pour facteurs premiers que 3 et 5 à la première puissance, et 2 à une certaine puissance ; la fraction sera de la forme

$$\frac{N}{3.5.2^k},$$

et en la réduisant à la plus simple expression, comme on ne pourra que supprimer des facteurs au dénominateur, sans en introduire de nouveau, on n'aura ainsi qu'un arc multiple de l'un des arcs compris dans les quatre grandes classes que nous avons citées.

Cette opération n'est inutile que par la nature de ces quatre classes d'arcs. En effet, on sait que les beaux travaux de M. Gauss ont permis la division de la circonférence en 17 parties égales, et plus généralement en un nombre de parties égales représenté par 2^k+1, si 2^k+1 est un nombre premier, sans se servir d'autres instruments que de la règle et du compas. Or prenons :

$$\frac{3}{5} - \frac{10}{17} = \frac{1}{85}; \quad \text{ainsi on aurait l'arc } \frac{1}{85};$$

et on saura construire l'arc du polygone de 85 côtés. On en trouverait d'autres par le même moyen ; mais ce qu'on peut affirmer, c'est que jamais on ne tombera, par une telle opération, sur un arc tel que $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, 7, 11.... étant des nombres premiers qui n'entrent pas dans les dénominateurs des arcs que l'on a déjà trouvés. La possibilité de tomber sur un nouvel arc tient à la nature particulière de la grande classe des arcs de M. Gauss,

$$\frac{1}{2^k+1}.$$

Note. Par la théorie des *nombres*, l'immortel Gauss nous a appris à construire géométriquement l'arc $\frac{k\pi}{2^p(2^n+1)}$, k est un nombre impair quelconque ; p un nombre entier quelconque ; et n un nombre tel que 2^n+1 soit un nombre premier. Or, de quelque manière qu'on combine par voie d'addition ou de soustraction de telles fractions, on a toujours pour résultat une fraction de la forme $\frac{k'\pi}{2^r P}$, où P représente le produit de nombres premiers chacun de la forme 2^n+1 (t. III, 47, Lemme) ; ce sont donc les seuls arcs qu'on puisse construire ; ce qui exclut 7, 11, 13, etc., et avant cette découverte, on ne savait construire que les trois cas $n=0$, $n=1$, $n=2$.

On voit donc que la possibilité de diviser la circonférence en parties égales tient encore à ce qu'on peut toujours satisfaire en nombres entiers à l'équation $ax-by=1$, lorsque a et b sont premiers entre eux ; il existe une liaison singulière qu'on rencontre partout, entre les propriétés des nombres premiers et celles de la circonférence. Tm.

DÉMONSTRATION

Du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles ; points de moyenne distance.

(Fin, voir page 153.)

IX. Soit une ligne plane du degré m et une droite située dans son plan ; d'un point P pris sur la droite, on peut concevoir qu'on ait mené $m(m-1)$ tangentes à la ligne de degré m ; soit C le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact ; en faisant varier le point P sur la droite, le lieu géométrique du point C décrit une ligne qui passe par le point de moyenne distance des tangentes parallèles ; car on peut supposer le point P transporté à l'infini. Lorsque la droite entière se transporte à l'infini, la ligne des points C se réduit à un point unique.

Si $m = 2$, le lieu du point C est encore une conique semblable à la conique donnée et passant par son centre.

X. Lemme. Étant données n circonférences situées dans un même plan ; menons dans chaque circonférence, un rayon parallèle à une droite variable de direction ; le lieu géométrique du point de moyenne distance des extrémités des n rayons est une circonférence, ayant pour centre le point de moyenne distance des n centres, et pour rayon la somme algébrique des rayons divisée par n ; donnant le même signe aux rayons dirigés dans le même sens et le signe opposé aux rayons dirigés dans le sens opposé.

Démonstration. Si la proposition est vraie pour n circonférences, il est facile de s'assurer qu'elle a lieu aussi pour

$n+1$ circonférences ; or elle est évidente pour deux circonférences, donc....

Corollaire. Si la somme algébrique des rayons est nulle, le point de moyenne distance reste fixe, et *vice versâ*.

XI. *Théorème.* Dans une ligne plane de degré m, la somme algébrique des $m(m-1)$ rayons de courbure correspondant aux $m(m-1)$ points de contact de tangentes parallèles, est nulle.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de M. Chasles, et du lemme précédent. Car le cercle de courbure a deux tangentes infiniment rapprochées, en commun avec la courbe.

Corollaire. R étant le rayon de courbure, les axes étant rectangulaires, on a $R=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$; or aux $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles, le facteur $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ est une quantité constante, la somme des $m(m-1)$ rayons de courbure est nulle ; donc aussi la somme des $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$ est nulle.

XII. *Théorème.* Dans une courbe plane de degré m, si à partir de chacun des $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles, on porte sur la normale correspondante, et dans le sens du rayon de courbure, p fois le rayon de courbure ; p étant un nombre positif, on obtient $m(m-1)$ points, extrémités de ces normales ; leur point de moyenne distance est le même que celui des points de contact.

Démonstration. Soit x' l'abscisse du point de contact (axes rectangulaires), R le rayon de courbure ; X l'abscisse de l'extrémité de la longueur pR portée sur la normale, on a $X-x'=p\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$; la somme des $m(m-1)$ valeurs du second membre est nulle ; donc la somme des

$m(m-1)$ valeurs de X est égale à la somme de $m(m-1)$ valeurs de x'; il en est de même pour les ordonnées, donc, etc....

Corollaire. Faisant $p=1$; on voit que le point de moyenne distance des $m(m-1)$ centres de courbure, est le même que celui des points de contact; propriété signalée par M. Duhamel et dont le théorème précédent n'est que la généralisation.

Observation. Ce théorème subsiste même pour des droites menées par les points de contact sous une direction donnée.

XIII. Le lemme X est un cas particulier de cette proposition de mécanique. Soient un nombre quelconque de circonférences situées dans le même plan; que chacune soit parcourue par un point matériel, avec une vitesse uniforme représentée respectivement par le rayon du cercle, le centre de gravité de ces points décrit une circonférence, avec une vitesse uniforme égale à la résultante de toutes les vitesses simultanées, divisée par le nombre des points matériels; cette résultante transportée à un centre de gravité est une tangente à la circonférence décrite par ce point, et le rayon est égal à la résultante *divisée*. Pour trouver la position de la circonférence relativement à la tangente, il suffit de transporter au centre de gravité, les rayons *simultanés*, et les considérant comme des forces, la résultante donne la direction du rayon de la circonférence décrite par le centre de gravité.

Cette proposition est fondée sur ce que le centre de gravité se meut à chaque instant comme si toutes ces forces y étaient appliquées, et ces forces sont représentées par les rayons des cercles (II, 241).

M. Ossian Bonnet m'a fait remarquer que cette proposition n'est elle-même qu'un cas particulier d'un théorème d'Euler. On sait qu'un point matériel, soumis à une force

attractive dirigée vers un point fixe en raison directe de la distance et ayant reçu une impulsion primitive, non dirigée vers cette distance, un tel point décrit une ellipse; si plusieurs ellipses sont décrites de cette manière, le centre de gravité de ces points décrit aussi une ellipse. C'est le théorème d'Euler.

XIV. *Problème.* Étant donnée une ligne de degré m, trouver l'équation d'une seconde courbe telle que si par un quelconque de ses points, on mène $m(m-1)$ tangentes à la première courbe, il y en ait au moins deux qui fassent entre elles un angle donné.

Solution. Soit $F(x,y)=0$, l'équation de la première courbe, rapportée à des axes rectangulaires; x', y', x'', y'', étant les coordonnées de deux points de cette courbe, on a les équations

$$F(x',y')=0, \quad (1); \qquad F(x'',y'')=0, \quad (2).$$

Les équations des tangentes qui passent par ces points sont

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'), \quad (3); \quad y-y''=\frac{dy''}{dx''}(x-x'') \ (4);$$

a étant la tangente trigonométrique de l'angle formé par ces deux tangentes, on a

$$a\left(1+\frac{dy'}{dx'}\cdot\frac{dy''}{dx''}\right)=\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}; \quad (5)$$

éliminant x', y', x'', y'', entre les cinq équations (1), (2), (3), (4), (5); le résultat est l'équation de la seconde courbe cherchée et dont le degré ne s'élève pas au-dessus de $m^2(m-1)^2$.

XV. Soit M un point de la seconde courbe et N, N', deux points de contact des deux tangentes menées par M à la première, et formant un angle dont la tangente $=a$; soient R, R' les deux rayons de courbure en N et N', et I le milieu de la corde NN', point de moyenne distance des points

N et N'; ce point varie avec le point M, et décrit une certaine courbe dont il est facile de trouver la tangente et le rayon de courbure. Si M_1 désigne un autre point de la seconde courbe, et N_1, N_1' les points de contact correspondants sur la première courbe, l'angle des deux tangentes MN, M_1N_1 est égal à l'angle des deux tangentes MN', $M_1N'_1$; l'arc MM_1 est infiniment petit, les arcs NN_1, $N'N'_1$ deviennent aussi infiniment petits, et les angles de contingence étant égaux pour ces deux arcs, on a donc $\frac{NN_1}{R} = \frac{N'N'_1}{R'}$; les points N et N' se meuvent donc sur leurs cercles de courbure proportionnellement aux rayons de courbure; en vertu de la proposition XIII, on pourra donc construire les tangentes et les rayons de courbure de la ligne décrite par le point I milieu de la corde NN'.

En général, si n points matériels se meuvent sur la même courbe plane, ou sur des courbes différentes situées dans le même plan, avec des vitesses telles que, prises simultanément, elles soient respectivement proportionnelles aux rayons de courbure, on pourra construire pour chacune des positions simultanées des points, la tangente et le rayon de courbure de la ligne décrite par le centre de gravité du système.

XVI. *Théorème de Waring.* Soit $P_m + P_{m-1} + R = 0$, l'équation d'une ligne de degré m. P_m renferme tous les termes de degré m; P_{m-1} les termes de degré $m-1$ et R les autres termes. Soit de même $Q_n + Q_{n-1} + S = 0$, l'équation d'une courbe plane de degré n; ces deux lignes se coupent, généralement parlant, en mn points; le point de moyenne distance de ces mn points est le même, quels que soient R et S.

Démonstration. Le résultat de l'élimination de y entre les deux équations est de la forme $Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0$. Or, dans A et B n'entrent que les coefficients qu'on rencontrent

dans P_m et P_{m-1}, Q_n, Q_{n-1}; car si tous les coefficients qui entrent dans P_{m-1}, R, Q_{n-1}, S, deviennent nuls, les mn valeurs de x deviennent nulles; A ne peut donc renfermer que les coefficients qui entrent dans P_m et Q_n, et d'après le principe de l'homogénéité, B ne peut renfermer que ces mêmes coefficients combinés avec ceux de P_{m-1}, Q_{n-1}, et ainsi de suite, donc, etc.

Remarque. Cette proposition d'une extrême fécondité est énoncée (p. 55), dans les *Proprietates algebricarum curvarum*, édition de 1772, la première édition est de 1762; cet ouvrage important, peu connu, contient une foule de théorèmes géométriques, qu'on a réinventés dans ces derniers temps. C'est ainsi que dans une courbe de degré m, Waring cherche (prob. XV) l'équation qui a pour racines p rayons vecteurs, partageant la circonférence décrite de l'origine comme centre en p parties égales; il établit des théorèmes sur la somme, le rectangle de ces rayons, etc.

En général, la théorie de l'élimination et celle des fonctions symétriques fournissent un nombre inépuisable de propriétés géométriques; Waring en énonce quelques-unes, et il ajoute qu'on peut facilement en trouver une foule d'autres : *analytica enim problema facile in geometrica transformari possint et vice versa geometrica in algebraica* (p. 57); nous ne citerons de lui, qu'une transformation de ce dernier genre.

Soient a_1, a_2, a_3,... a_n, n quantités quelconques, on a toujours cette identité :

$$a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots(a_1+a_2+a_3..+a_{n-1})$$
$$a_n(a_1+a_2+a_3\ldots a_n)=a_n a_{n-1}(a_n+a_{n-1})+(a_n+a_{n-1})$$
$$a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots(a_n+a_{n-1}+\ldots a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+a_1).$$

Waring déduit cette identité d'une propriété de la parabole (p. 117), il serait intéressant de l'établir analytiquement.

XVII. D'après les principes de Waring, il est aisé de démontrer le théorème suivant : soit $P_m+P_{m-1}+P_{m-2}+R=0$, l'équation d'une ligne de degré m ; si en un point pris dans le plan de la courbe, on mène $m(m-1)$ tangentes ; le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact reste le même, quel que soit R.

XVIII. *Problème.* Trouver les équations du mouvement d'un point matériel assujetti à parcourir une conique donnée avec une vitesse proportionnelle en chaque position, au rayon de courbure correspondant à cette position.

Soit $y^2=2mx+nx^2$ l'équation de la conique ; axes rectangulaires. On a donc, d'après la condition du problème,

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{kds^3}{dxd^2y}; \quad \text{d'où} \quad dt=-\frac{1}{k}\frac{dxd^2y}{ds^2};$$

k est un nombre donné, on a

$$ds^2=\frac{[y^2+(m+nx)^2]dx^2}{y^2}=\frac{(1+n)y^2+m^2}{y^2}dx^2, \quad d^2y=-\frac{m^2}{y^3}dx^2;$$

d'où

$$dt=\frac{m^2}{k}\frac{dx}{y[(1+n)y^2+m^2]}, \qquad dx=\frac{ydy}{\sqrt{ny^2+m^2}},$$

$$dt=\frac{m^2}{k}\frac{dy}{\sqrt{ny^2+m^2}.[(1+n)y^2+m^2]};$$

d'où l'on tire $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Pour la parabole $n=0$, et $dt=\frac{m}{k}\frac{dy}{y^2+m^2}$, $t=\frac{1}{k}\text{arctang}=\frac{y}{m}$, on suppose qu'à l'origine $t=0$, ou bien $y=m\,\text{tang}\,kt$, $x=\frac{m}{2}\text{tang}^2.\,kt$.

Observation. En développant une courbe de manière que la vitesse angulaire du fil reste constante, alors la vitesse à

l'extrémité du fil est proportionnelle à la longueur du fil, ou au rayon de courbure de la développante.

XIX. Nous devons ajouter au théorème énoncé au paragraphe V, qu'une ligne du degré m ne saurait avoir plus de $m(m-1)(2n-1)$, ou les coefficients des différentiels de l'ordre n soient égaux à une quantité donnée.

XX. Soit $P_m + sP_{m-1} + s^2P_{m-2} + s^3P_{m-3} \ldots s_mP_0 = 0$, l'équation d'une ligne de degré m, où s est un nombre quelconque, et soit de même $Q_n + s'Q_{n-1} + s'_2Q_{n-2} + \ldots s_nQ_0 = 0$, l'équation d'une ligne de degré n ; éliminant successivement x et y, on obtient d'après le théorème de Waring, les deux équations

$$Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0,$$
$$A'y^{mn} + B'y^{mn-1} + \text{etc.} = 0.$$

A, A' renferment les coefficients de P_m et Q_n ; B et B' les coefficients linéaires de s et s', et à l'aide des fonctions algébriques, on déduit beaucoup de propriétés géométriques sur les intersections d'un système de lignes semblables et semblablement situées, relativement à l'origine avec un système analogue d'autres lignes ; entre autres sur le lieu du point de moyenne distance, qui décrit une droite, en faisant varier s ; la théorie des diamètres de Newton est un cas particulier ; car un système de lignes parallèles est toujours un système de lignes semblables et semblablement situées relativement à l'origine, etc.

Observation. M. Liouville a traité les mêmes matières dans un beau mémoire (t. VI, p. 345), où l'habile analyste généralise un théorème du célèbre M. Jacobi ; théorème qui est une première généralisation d'un théorème d'Euler. Nous reviendrons là-dessus, en traitant des asymptotes et après avoir donné le parallélogramme de Newton, base explicite ou implicite, de toutes ces propositions.

Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 91 (page 55),

PAR M. H. FAURE.

Ce problème doit être rectifié ainsi (*) :

Fig. 18. Si le côté AB du triangle donné ABC est inscrit dans l'angle (xy) fixe MON, l'inclinaison du plan du triangle sur le plan MON étant donnée, le lieu du point C dans l'espace est une ellipse dans laquelle la somme algébrique des *demi-axes* est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle OAB.

Le point C étant assujetti à se mouvoir dans un plan parallèle au plan MON, la courbe décrite par ce point se projette en vraie grandeur sur le plan donné. Or, si j'abaisse CD perpendiculaire sur le plan, il est facile de voir que le point D est invariablement lié à la droite AB, soit parce que les distances BD, AD restent constantes pour toutes les positions du sommet mobile, soit que l'on regarde ce point comme déterminé par la perpendiculaire HD, projection de la hauteur du triangle ABC. Ces deux définitions pourront également fournir l'équation de la courbe décrite par le point D. Employant la première, le problème reviendra à chercher le lieu du sommet d'un triangle dont les deux autres reposent sur deux droites données, problème déjà traité pour le cas particulier où les axes étaient rectangulaires.

Prenons pour axes des coordonnées les deux droites OM, ON, dont je désigne l'angle par θ. Soient x, y les coordonnées du point D. Désignons par a, b, c les côtés respectifs,

---

(*) Dans l'énoncé, on a mis fautivement *axes* au lieu de *demi-axes*. Tm.

AB, BD, AD, et par α, β les directrices OA, OB. Les équations du problème sont :

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos\theta;$$
$$b^2 = (y - \beta)^2 + x^2 + 2x(y - \beta)\cos\theta;$$
$$c^2 = (x - \alpha)^2 + y^2 + 2y(x - \alpha)\cos\theta.$$

Éliminons α, β entre ces trois équations.

Les deux dernières donnent :

$$y - \beta = -x\cos\theta + \sqrt{b^2 - x^2 \sin^2\theta} = -x\cos\theta + \sqrt{X^2},$$
$$x - \alpha = -y\cos\theta + \sqrt{c^2 - y^2 \sin^2\theta} = -y\cos\theta + \sqrt{Y^2},$$

en posant pour abréger :

$$b^2 - x^2 \sin^2\theta = X^2,$$
$$c^2 - y^2 \sin^2\theta = Y^2.$$

Je ne prends que l'un des deux signes devant le radical; le calcul indiquera par la suite qu'il était en effet inutile de les prendre à la fois.

On a par conséquent :

$$\alpha = x + y\cos\theta - \sqrt{Y^2},$$
$$\beta = y + x\cos\theta - \sqrt{X^2},$$

substituant ces valeurs dans la première équation, il viendra :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xy\cos\theta \sin^2\theta - 2y\sin^2\theta\sqrt{X^2} -$$
$$- 2x\sin^2\theta\sqrt{Y^2} - 2\cos\theta\sqrt{X^2Y^2},$$

en effectuant toutes les simplifications.

Or, $\qquad b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos D,$

en désignant par D l'angle du sommet, donc :

$$bc\cos D + xy\cos\theta\sin^2\theta - y\sin^2\theta\sqrt{X^2} -$$
$$- x\sin^2\theta\sqrt{Y^2} - \cos\theta\sqrt{X^2Y^2} = 0.$$

Faisons disparaître l'un des radicaux, $\sqrt{X^2}$ par exemple :

$$bc\cos D + xy\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta - x\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} =$$
$$= \sqrt{X^2}\left(\cos\theta\sqrt{Y^2} + y\,\overline{\sin}^2\theta\right),$$

et en élevant au carré,

$$b^2c^2\overline{\cos}^2 D + 2bcxy\cos D\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta + c^2\sin^4\theta\, x^2 -$$
$$- 2bcx\cos D\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} = b^2y^2\sin^4\theta + b^2c^2\overline{\cos}^2\theta -$$
$$- \overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta\,(b^2y^2 + c^2x^2) + 2b^2y\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2}.$$

Réduisant et ordonnant par rapport à x, on trouve l'équation :

$$\left.\begin{array}{r} c^2\overline{\sin}^2\theta\, x^2 + 2bcy\cos D\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta \\ - 2bc\cos D\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} x + b^2c^2\left(\overline{\cos}^2 D - \overline{\cos}^2\theta\right) = 0 \\ - b^2y^2\,\overline{\sin}^2\theta\left(\overline{\sin}^2\theta - \overline{\cos}^2\theta\right) \\ - 2b^2y\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta\sqrt{Y^2}, \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{bc\cos D\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} - bcy\cos D\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta \pm \sqrt{A}}{c^2\,\overline{\sin}^2\theta.}$$

En posant :

$$A = b^2c^4\,\overline{\cos}^2 D\,\overline{\sin}^2\theta\, Y^2 + b^2c^2y^2\,\overline{\cos}^2\theta\,\overline{\cos}^2 D\,\overline{\sin}^2\theta$$
$$- 2b^2c^2y\,\overline{\cos}^2 D\cos\theta\,\overline{\sin}^4\theta\sqrt{Y^2} - b^2c^4\,\overline{\sin}^2\theta\left(\overline{\cos}^2 D - \overline{\cos}^2\theta\right)$$
$$+ b^2c^2y^2\sin^4\theta\left(\overline{\sin}^2\theta - \overline{\cos}^2\theta\right) + 2b^2c^2y\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2},$$

ou bien en simplifiant :

$$A = b^2c^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\sin}^2 D\left(c^2\,\overline{\cos}^2\theta + y^2\,\overline{\sin}^2\theta - y^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta +\right.$$
$$\left. + 2y\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta\sqrt{Y^2}\right);$$

mais

$$c^2\,\overline{\cos}^2\theta - y^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta = Y^2\,\overline{\cos}^2\theta;$$

donc

$$A = b^2c^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\sin}^2 D\left(y\,\overline{\sin}^2\theta + \cos\theta\sqrt{Y^2}\right)^2,$$

et partant,

$$x=\frac{bc\cos D\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2}-bcy\cos D\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta\pm bc\sin\theta\sin D\left(y\overline{\sin}^2\theta+\cos\theta\sqrt{Y^2}\right)}{c^2\overline{\sin}^2\theta}$$

$$=\frac{bc\sin\theta\sqrt{Y^2}(\cos D\sin\theta\pm\sin D\cos\theta)=bcy\overline{\sin}^2\theta(\cos D\cos\theta\mp\sin D\sin\theta)}{c^2\overline{\sin}^2\theta}$$

$$=\frac{bc\sin\theta\sqrt{Y^2}\sin(D\pm\theta)-bcy\overline{\sin}^2\theta\cos(D\pm\theta).}{c^2\overline{\sin}^2\theta}$$

Il est facile maintenant de faire disparaître le radical $\sqrt{Y^2}$. L'on a :

$$bc\sin\theta\sin(D\pm\theta)\sqrt{Y^2}=bcy\overline{\sin}^2\theta\cos(D\pm\theta)+c^2x\overline{\sin}^2\theta.$$

Élevant au carré et réduisant, on arrive à l'équation :

$$b^2\overline{\sin}^2\theta y^2+c^2\overline{\sin}^2\theta x^2+2bc\overline{\sin}^2\theta\cos(D\pm\theta)xy-b^2c^2\overline{\sin}^2(D\pm\theta)=0.$$

Cette équation représente l'assemblage de deux ellipses, ce qui s'explique facilement, vu la double situation que peut prendre le sommet D pour chaque position de la base. Ces deux ellipses ont pour centre l'origine des coordonnées, dans l'une entre l'angle $D+\theta$, dans l'autre entre l'angle $D-\theta$; il s'agit de distinguer quelle est celle qui donne le lieu du sommet du triangle, lorsque ce sommet se trouve à droite de sa base, quelle est celle qui donne le lieu du sommet dans sa position inverse.

Nous allons pour cela placer le triangle dans une position particulière (*fig.* 19), de manière que BD s'appuyant sur l'axe des y, le sommet A reste toujours sur l'axe des x. Supposons D à droite de AB, on aura dans le triangle OAD :

$$OD : c :: \sin(D+\theta) : \sin\theta,$$

$$OD=\frac{c\sin(D+\theta)}{\sin\theta}.$$

Or si, dans l'équation

$$b^2\overline{\text{in}}^2\theta y^2+c^2\overline{\sin}^2\theta x^2+2bc\overline{\sin}^2\theta\cos(D+\theta)xy-b^2c^2\overline{\sin}^2(D+\theta)=0,$$

on fait $x=0$, on a :

$$y=\frac{c\sin(\mathrm{D}+\theta)}{\sin\theta}=\mathrm{OD}.$$

Donc cette équation représente le lieu du sommet D, lorsque ce point est situé à droite de AB ; s'il est situé à gauche, l'équation est par conséquent (*),

$$b^2\sin^2\theta y^2+c^2\sin^2\theta x^2+2bc\sin^2\theta\cos(\mathrm{D}-\theta)xy-b^2c^2\sin^2(\mathrm{D}-\theta)=0.$$

Calculons actuellement les axes $2z$, $2z'$ de chacune de ces ellipses. On arrivera facilement à ces valeurs en considérant chaque demi-axe comme représentant la plus grande et la plus petite distance du centre à un point de la courbe.

Leurs valeurs déjà données (**), pour une équation générale du second degré rapportée à des axes rectangulaires, sont :

$$z^2=\frac{2p(\mathrm{A}+\mathrm{C})+k}{\delta^2},\qquad z'^2=\frac{2p(\mathrm{A}+\mathrm{C})-k}{\delta^2}.$$

Après avoir préalablement rapporté notre courbe à deux axes rectangulaires dont l'un serait l'axe des x primitifs et l'autre une perpendiculaire élevée au point O à cet axe, la nouvelle équation

$$\left(b^2+c^2\cos^2\theta-2bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta)\right)y^2+c^2\sin^2\theta x^2+$$
$$+2\left(bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta)-c^2\sin\theta\cos\theta\right)xy-b^2c^2\sin^2(\mathrm{D}\pm\theta)=0,$$

nous donnera :

$$2p=2b^2c^2\sin^2(\mathrm{D}\pm\theta),$$
$$\mathrm{A}+\mathrm{C}=b^2+c^2-2bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta);$$
$$k=2b^2c^2\sin^2(\mathrm{D}\pm\theta)\sqrt{(b^2+c^2)^2+4b^2c^2\cos^2\theta\cos^2(\mathrm{D}\pm\theta)-}$$
$$\overline{-4(b^2+c^2)bc\cos\theta\cos\mathrm{D}\pm\theta},$$
$$\delta^2=4b^2c^2\sin^2\theta\sin^2(\mathrm{D}\mp\theta),$$

(*) On pourrait d'ailleurs le vérifier aussi comme précédemment.
(**) Voir le tome II des Annales, page 158.

d'où l'on déduit facilement :

$$z+z' = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(D\pm\theta+\theta)}.$$

Or soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle AOB, on a $R=\frac{a\alpha\beta}{4s}$; mais $4s = 2\alpha\beta\sin\theta$. Donc

$$2R = \frac{a}{\sin\theta}.$$

Or si, dans l'expression de $z+z'$, nous prenons le signe — de θ, la proposition énoncée plus haut aura lieu, c'est-à-dire que le diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB est égal à la demi-somme des axes, de l'ellipse représentée par la seconde équation.

Si l'on calcule $z-z'$, on trouve

$$z-z' = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(D\pm\theta-\theta)}.$$

Donc la différence des demi-axes de la première ellipse est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB.

Note. Voici une autre solution d'après nos formules.

I. LEMME. x et y étant les coordonnées d'un point, t, v, t', v' des constantes ; φ, un arc variable, si l'on a

$$x = t\sin\varphi + v\cos\varphi, \quad y = t'\sin\varphi + v'\cos\varphi;$$

le lieu du point est une ellipse, ayant son centre à l'origine ; éliminant φ, l'équation de cette ellipse est

$$y^2(t^2+v^2) - 2xy\,(tt'+vv') + x^2\,(t'^2+v'^2) = (tv'-vt')^2,$$

et l'on a :

$$m = -4\,(tv'-vt')^2,\ L = 4\,(tv'-vt')^4,\ k = k' = 0,$$

$$l = 4\,(t^2+v^2)\,(tv'-vt')^2,\ l' = 4\,(t'^2+v'^2)\,(tv'-vt')^2,$$

$$n = -8(tt'+vv')(tv'-vt')^2,\ N = t^2+v^2+t'^2+v'^2+2(t't+vv')\cos\gamma,$$

(t. I, p. 489) où γ est l'angle des axes.

L'équation aux grandeurs des demi-axes principaux, devient (t. I, 495),

$$z^2 - [t^2 + v^2 + t'^2 + v'^2 + 2(tt' + vv')\cos\gamma]z + [tv' - t'v]^2 \sin^2\gamma = 0.$$

Ainsi le produit des demi-axes est $[tv' - vt']\sin\gamma$; et la somme des carrés est égal au coefficient de z.

Supposons $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, α' et β' les demi-axes principaux; on aura :

$$(\alpha' - \beta')^2 = (t \pm v')^2 + (t' \mp v)^2,$$

dans la même supposition, le système des axes principaux est représenté par l'équation

$(tt' + vv')y^2 + [t^2 + v^2 - t'^2 - v'^2]xy - (tt' + vv')x^2 = 0$, (t. I, p. 496),

α et β étant les coordonnées rectangulaires des foyers, l'on obtient :

$\alpha^2 = t^2 + v^2 - b^2$, $\beta^2 = t'^2 + v'^2 - b^2$, b est le demi petit axe, (t. II, p. 430).

Corollaire. Si $tv' - vt' = 0$, le produit des demi-axes est nul et la somme des carrés devient $t^2 + v^2 + t'^2 + v'^2$; l'ellipse se réduit à une portion de droite, d'une longueur égale à la racine carrée de cette expression, et le point décrit deux fois cette droite par un mouvement de va-et-vient (t. I, p. 492).

II. *Théorème.* Le lieu du sommet d'un triangle donné dont la base est inscrite dans un angle fixe, est une ellipse ayant son centre au sommet de l'angle fixe; la somme algébrique des demi-axes est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle formé par la base et les deux côtés de l'angle fixe.

Démonstration. Soit (*fig.* 18) BOX, l'angle fixe donné, DBA le triangle donné; dont la base AB est inscrite dans l'angle fixe; il s'agit de trouver le lieu du point D. Prenons O pour origine; OA pour axe des x, et les axes rectangu-

laires; conservons les mêmes notations. D, A, B, O sont quatre angles donnés; faisons $O - A = I$, $a = a' \sin O$, $BAO = \varphi$, d'après ces relations, on trouve :

$$x = \sin\varphi\,(a'\cos O + c\sin A) + \cos\varphi\,(a'\sin O - c\cos A),$$
$$y = c\cos A \sin\varphi + c\sin A\cos\varphi,$$

x et y sont les coordonnées du point D.

Ainsi d'après le lemme, le lieu du point P est une ellipse; comparant ces expressions à celles du lemme, on a :

$$t = a'\cos O + c\sin A,\quad v = a'\sin O - c\cos A,\quad t' = c\cos A,$$
$$v' = c\sin A,\quad t^2 + v^2 = a'^2 - 2a'c\sin O + c^2,\quad t'^2 + v'^2 = c^2,$$
$$tt' + vv' = a'\cos O,\quad tv' - vt' = c^2 - a'c\sin(A - O),$$

α' et β' étant les demi-axes principaux, on a d'après le lemme $(\alpha' \pm \beta')^2 = a'^2$; or a' est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABO; donc, etc.

Si $c > a'\sin(A - O)$, c'est $\alpha' - \beta'$ qui est constant; si $c < a'\sin(A - O)$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui est constant; et si $c = a'\sin(A - O)$, l'ellipse devient une portion de droite.

Décrivons le cercle autour du triangle ABO; qu'il coupe AD en M, on aura angle $MOA = O - A$, $AM = a'\sin(O - A)$, $MD = c - a'\sin(O - A)$; ainsi la droite OM est fixe, et les deux droites AM, DM sont données de longueur; on voit donc que l'ellipse peut être décrite par une droite DNA donnée de longueur et dont le segment AM est inscrit dans l'angle fixe XOM, et lorsque M se confond avec D, l'ellipse se réduit à la droite fixe OD. Cette observation facilite la discussion : si $D + O > 2^q$, la différence des axes principaux est constante; si $D + O > 2^q$, c'est la somme qui est constante, et si $O + D = 2^q$, l'ellipse se confond avec son axe principal.

Élevons les perpendiculaires BI, AI aux droites OB, OA; le point I de rencontre est sur le cercle circonscrit à AOB; et $OI = a'$; DI, comme on sait, est normale à l'ellipse lieu

du point D. Soit $DI=z$, $OD=f$; $\gamma=$ angle du diamètre OD avec son conjugué; $g=$ demi-diamètre conjugué à OD; on a $OI^2=a'^2=f^2+z^2-2fz\sin\gamma=(\alpha'-\beta')^2=\alpha'^2+\beta'^2-2\alpha'\beta'$; or $\alpha'^2+\beta'^2=f^2+g^2$, $2\alpha\beta-2fg\sin\gamma$; donc $z^2-2fz\sin\gamma=g^2-2fg\sin\gamma$, d'où $z=g$, $z=2f\sin\gamma-g$; la première valeur démontre le théorème de M. Abel Transon, (t. III, 596).

Le point I décrit un cercle dont le centre est O; la normale en D rencontre ce cercle en deux points I et I'; DI' est la seconde valeur de z.

Observation. Ce mode de génération ne s'applique qu'à l'ellipse et non aux coniques en général, comme tendrait à le faire croire l'énoncé d'une proposition qu'on lit dans les *Développements de Géométrie*, t. I, p. 31. Il existe une génération analogue pour l'ellipsoïde seulement, et non pour les surfaces du second degré en général. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME (92, p. 55).

PAR M. J. BLANCHARD (*),
élève de mathématiques élémentaires au collége royal de Versailles.

—

A est l'aire d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, et B l'aire du polygone régulier circonscrit semblable; démontrer que B—A, équivaut à l'aire du polygone régulier semblable, inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté de B, ou bien au polygone régulier circonscrit à la circonférence, qui a pour diamètre le côté de A.

(*Fig.* 20). Soit EC le côté du polygone B, FD celui de EC,

(*) Nous ne sommes pas sûr d'avoir bien deviné la signature. Tm.

joignons EFO, ODC, menons ON perpendiculaire à EC, et qui coupe FD en I.

1er *Cas*. D'après un théorème connu $B:A::\overline{OC}^2:\overline{OD}^2$, par suite $$B-A:A::\overline{OC}^2-\overline{OD}^2:\overline{OD}^2.$$

Soit A' le polygone semblable inscrit dans circ. NC,
$$A':A::\overline{NI}^2:\overline{NO}^2.$$
Cette proposition et la précédente ont les conséquents en proportion; donc
$$B-A:A'::\overline{OC}^2-\overline{OD}^2:\overline{NC}^2,$$
ou bien
$$B-A:A'::\overline{OC}^2-\overline{ON}^2:\overline{NC}^2;$$
mais $$\overline{OC}^2-\overline{ON}^2=\overline{NC}^2,$$
donc $$B-A=A',$$ C.Q.F.D.

2e *Cas*. D'après un théorème analogue au théorème marqué plus haut
$$B:A::\overline{NO}^2:\overline{IO}^2,$$
d'où
$$B-A:B::\overline{NO}^2-\overline{IO}^2:\overline{NO}^2.$$

Soit B' le polygone semblable circonscrit à circ. ID,
$$B':B::\overline{ID}^2:\overline{NO}^2.$$
Combinant cette proportion avec la précédente,
$$B-A:B'::\overline{NO}^2-\overline{IO}^2:\overline{ID}^2;$$
mais $$NO=OD,$$
donc $\overline{ON}^2-\overline{IO}^2=\overline{OD}^2-\overline{IO}^2$, or $\overline{OD}^2-\overline{IO}^2=\overline{ID}^2$, dans le triangle OID, donc $B-A=B'$. C.Q.F.D.

Note. Ce théorème se trouve dans les mémoires de l'Académie des sciences, dont Dufaye était membre.

MM. Cardonnel, élève en philosophie au collége royal d'Auch, et Clément, élève au collége royal de Bourges, nous ont aussi adressé des solutions du même problème.

SUR LA PILE HEXAGONALE.

PAR M. BACH,
professeur au collége royal de Strasbourg.

Considérons la base hexagonale représentée par la (*fig.* 1). Il s'agit de placer sur cette base une couche de boulets tangents entre eux ; or il est clair qu'on ne pourra placer des boulets dans deux intervalles adjacents ; mais si on les place dans les intervalles marqués par des points dans la (*fig.* 21), il est aisé de reconnaître que les boulets ainsi placés seront tous tangents entre eux.

La deuxième tranche ainsi obtenue et représentée par la (*fig.* 2), sera un hexagone irrégulier dont trois côtés non-consécutifs auront le même nombre de boulets que l'hexagone de base, et les trois autres un boulet de moins.

Sur cet hexagone irrégulier (*fig.* 22), se placera un hexagone régulier ayant un côté de moins que celui qui sert de base ; la place des boulets qui le constituent est indiquée par des points (*fig.* 22).

En continuant de la même manière, on arrivera à un hexagone régulier dont le côté a 2 boulets, sur lequel se placera un triangle équilatéral composé de 3 boulets, et enfin sur ce triangle équilatéral, se placera un dernier boulet qui terminera la pile.

Cela posé, résolvons les deux questions suivantes :

1° Trouver le nombre des boulets contenus dans un hexagone régulier dont le côté a n boulets.

Ce nombre est, comme on le verra facilement, $3n^2-3n+1$.

2° Trouver le nombre des boulets renfermés dans l'hexa-

gone irrégulier dont le plus petit côté a n boulets, et le plus grand $n+1$.

Si l'on suppose prolongés les côtés renfermant $n+1$ boulets, on aura un triangle équilatéral pour lequel le nombre des boulets sera $n+1+2(n-1)=3n-1$. Le nombre des boulets contenus dans ce triangle sera

$$\frac{3n(3n-1)}{2}=\frac{9n^2-3n}{2}.$$

Pour avoir le nombre des boulets contenus dans l'hexagone irrégulier, je retranche du nombre précédemment obtenu, trois fois le nombre des boulets renfermés dans le triangle équilatéral, dont le côté en a $n-1$; ce nombre est $\frac{3n^2-3n}{2}$, et il reste pour le nombre cherché $3n^2$.

D'après cela, nous pourrons écrire le tableau suivant :

Pour l'hex. rég. ayant n boulets pour côté	$3n^2-3n+1$,
hex. irrég.	$3(n-1)^2$,
hex. rég. de $(n-1)$ boulets	$3(n-1)^2-3(n-1)+1$,
hex. irrég.	$3(n-2)^2$,
hex. de $(n-2)$	$3(n-2)^2-3(n-2)+1$,
hex. irrég.	$3(n-3)^2$,
hex. de 2	$3\times 2^2-3\times 2+1$,
tr. éq.	3×1^2.
Pour le boulet qui termine la pile	$3\times 1^2-3\times 1+1$.

En désignant par S la somme des boulets qui composent la pile dont la base est un hexagone régulier, dont le côté à n boulets, on aura

$$S=3\left(1^2+2^2+3^2\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2\right)+$$
$$+3\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)-3\left(1+2+3+\ldots+(n-1)+n\right),$$

d'où

$$S = 6(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2) + 3n^2 - 3(1+2+3\ldots+n) + n =$$
$$= 2n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - \frac{3n^2+3n}{2} = \frac{4n^3-3n^2+n}{2}.$$

Ainsi $$S = \frac{4n^3-3n^2+n}{2}.$$

Note. Cette pile remplit-elle les conditions statiques pour se maintenir ?

Tm.

SUR L'ÉLIMINATION

Entre deux équations algébriques à deux inconnues.

Nouveau théorème d'algèbre.

PAR E. FINCK,
professeur à Strasbourg.

Étant données deux équations à deux inconnues :

$$\varphi(x,y) = bx^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$
$$\psi(x,y) = cx^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

où $b, b_1, \ldots b_m, c, c_1, \ldots c_n$, sont des fonctions entières de y; M. Labatie a prouvé, dans sa brochure de 1827, que l'équation qui donne toutes les bonnes valeurs finies de y est

$$Pc^m = 0,$$

P étant le produit des valeurs que prend $\varphi(x,y)$, si l'on y substitue pour x les n racines de $\psi(x,y)=0$, supposée résolue par rapport à x ; de telle sorte que si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, sont les racines, on a

$$P = \varphi(\gamma_1, y) \cdot \varphi(\gamma_2, y) \ldots \varphi(\gamma_n, y).$$

Dans la brochure citée, et mieux encore dans la seconde

édition (1835), on trouve une méthode simple pour former Pc^m, au moyen du plus grand commun diviseur. De l'aveu de l'auteur, je l'ai rapportée dans mon Algèbre. J'ajouterai, qu'à mon avis, c'est la seule théorie complète de l'élimination. M. Minding, partant de la forme Pc^m, a donné le moyen d'estimer d'avance le degré de l'équation finale (Journal de M. Liouville, VI); il s'appuie à cet effet sur la détermination du degré de chacune des racines $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$; degré qu'il obtient par des réductions en séries.

J'ai montré dans une note insérée dans le même journal, que ces degrés peuvent être obtenus par d'autres moyens, et en suivant les mêmes idées, j'ai trouvé pour cela un théorème général que je vais faire connaître, après avoir donné la définition du degré :

Je dis qu'une fonction fy est du degré r, si $\frac{fy}{y^r}$ converge vers une limite finie différente de zéro, à mesure que y tend vers ∞. Si fy est une fonction rationnelle, cette définition est d'accord avec l'évaluation ordinaire du degré; sinon elle détermine pour r un nombre qui jouit de la même propriété, savoir que si deux fonctions fy, f_1y sont des degrés r, r_1, leur produit $fy \cdot f_1y$ est du degré $r+r_1$.

Cela posé voici le théorème en question :

Soit une équation :

$$x^n f_\alpha y + x^{n-1} f_{\alpha_1} y + \ldots + x^{n-i} f_{\alpha_i} y + \ldots + f_{\alpha_n} y = 0. \quad (1)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *sont les degrés des fonctions entières qui servent de coefficients : prenez les nombres :*

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{1}, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha}{2}, \ldots \quad \frac{\alpha_i - \alpha}{i}, \ldots \quad \frac{\alpha_n - \alpha}{n}. \quad (2)$$

Parmi les racines de (1) *il y en a dont le degré sera égal au plus grand* (algébriquement parlant) *de ces nombres; si*

$\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$ *est ce maximum, et si de plus tous les termes de la série* (2) *qui suivent sont moindres que* $\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, *il y aura* i *racines de ce degré, quel que soit le nombre des termes placés avant celui-ci, qui lui soient égaux.*

Cela fait, calculez la série :

$$\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{1}, \quad \frac{\alpha_{i+2} - \alpha_i}{2}, \ldots \frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e}, \ldots \frac{\alpha_n - \alpha_i}{n-i}. \quad (3)$$

Si $\frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e}$ *en est le plus grand terme, avec la condition que ceux qui le suivent soient moindres, tandis que parmi ceux qui le précèdent, il peut s'en trouver qui l'égalent; il y aura* e *racines du degré* $\frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e}$; etc.,

Pour le prouver, divisons (1) par $f_\alpha y$ et par y^{nr}, r étant une indéterminée : on pourra écrire cette équation sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{x}{y^r}\right)^n + \left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-1} \frac{y^{\alpha_1} + \ldots}{y^{\alpha+r} + \ldots} + \left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-2} \cdot \frac{y^{\alpha_2} + \ldots}{y^{\alpha+2r} + \ldots} + \\ \ldots + \left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i} \cdot \frac{y^{\alpha_i}}{y^{\alpha+ir} + \ldots} + \ldots = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Les degrés des coefficients des puissances de $\frac{x}{y^r}$, sont

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{1} - r, \; 2\left(\frac{\alpha_2 - \alpha}{2} - r\right), \ldots i\left(\frac{\alpha_i - \alpha}{i} - r\right), \ldots n\left(\frac{\alpha_n - \alpha}{n} - r\right). \quad (5)$$

Conservant l'hypothèse que dans (2), le maximum est $\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, je fais $r = \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$; dans la série (5) quelques termes s'annuleront, les autres deviendront < 0, après quoi si dans (4) on suppose que y marche vers ∞, tous les coefficients dont les degrés sont < 0, tendront vers zéro, de

sorte que cette équation perdra tous les termes qui suivent $\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i}$, et l'équation prend la forme :

$$\left(\frac{x}{y^r}\right)^n + \ldots + A\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i} = 0.$$

Il y a donc $n - i$ valeurs de $\frac{x}{y^r}$, qui deviennent nulles, et i valeurs restent finies, différentes de zéro. Donc (1) a i racines du degré $r = \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, et $n - i$ racines de degrés moindres.

Dans (2) donnons maintenant à r une valeur $< \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, les i racines qu'on vient de signaler, deviendront infinies avec y, et (2) perdra ses i premiers termes, et pourra se réduire à

$$\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i}.(y^{\alpha_i} + \ldots) + \left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i-1}(y^{\alpha_{i+1}} + \ldots) + \ldots + (y^{\alpha_n} + \ldots) = 0,$$

et on reconnaîtra qu'il y a e racines du degré $\frac{\alpha_{e+i} - \alpha_i}{e}$, etc.

Exemple. Soit l'équation :

$$x^4(y^6 + \ldots) + x^3(y^2 + \ldots) + x^2(y^7 + \ldots) + x(y + \ldots) + y^2 + \ldots = 0.$$

Les quotients à calculer ici sont :

$$\frac{2-6}{1},\ \frac{7-6}{2},\ \frac{1-6}{3},\ \frac{2-6}{4},$$

ou

$$-4,\ \frac{1}{2},\ -\frac{5}{3},\ -1.$$

Il y a donc deux racines du degré $\frac{1}{2}$.

Prenant ensuite :

$$x^2(y^7 + \ldots) + x(y + \ldots) + y^2 + \ldots = 0,$$

on calcule :

$$\frac{1-7}{2}, \quad \frac{2-7}{2},$$

ou

$$-3, \quad -\frac{5}{2},$$

il y a donc deux racines du degré $-\frac{5}{2}$.

On conçoit qu'avec cela, on peut d'après M. Minding, évaluer le degré de P, et par suite celui de Pc^m. Si dans $\psi(x, y) = 0$, tous les coefficients sont du même degré n, toutes les valeurs de x sont du degré zéro, si de plus tous les coefficients de (x, y) sont de degré m', il s'ensuit que les fonctions $\varphi(\gamma_1, y)$, $\varphi(\gamma_2, y)$,... $\varphi(\gamma_m, y)$, sont de ce même degré m', et leur produit est du degré mn'; d'ailleurs c étant du degré n', c^m est du degré $m'n$ et c^mP, du degré $mn' + m'n$; théorème dont l'énoncé est dû à M. Labatie. (*Voyez* mon Algèbre.)

Si les équations proposées sont ce qu'on appelle les plus générales de leurs degrés, on trouve que γ_1, γ_2... γ_m, sont du premier degré, $\varphi(\gamma_1, y)$, $\varphi(\gamma_2, y)$,... sont tous du degré m et c^mP du degré mn.

Ce théorème est ancien (Bezout); mais on néglige, si je ne me trompe, de démontrer qu'à chacune des mn valeurs de y, il ne répond pas plus d'une valeur de x. Je le prouve ainsi qu'il suit :

D'abord *en général* les mn valeurs de y sont différentes : car même dans un cas particulier elles le sont. En effet si

$$\varphi(x, y) = (x + k_1 y + l_1)(x + k_2 y + l_2) \ldots\ldots (x + k_m y + l_m),$$

il est évident que les mn valeurs de y sont, généralement différentes, et qu'à chaque valeur de y, il ne répond qu'une valeur de x. Car, pour en finir le plus promptement, les droites représentées par $\varphi(x, y) = 0$, sont, en général, cou-

pées en *mn* points distincts, répondant à *mn* ordonnées différentes, par les droites $\psi(x, y) = 0$.

A propos d'élimination, le programme d'admission à l'École polytechnique vient de faire un pas en arrière; il dispense les candidats de savoir distinguer les bonnes solutions des mauvaises. Qu'est-ce donc maintenant que l'élimination, et quel parti en tirera-t-on ?

Messieurs les examinateurs se trouvent par conséquent dispensés de faire des questions qui s'y rapportent. Monsieur le rédacteur des nouvelles Annales a répété que le calcul différentiel devrait faire partie du programme. J'avais dans le temps proposé à feu Coriolis mes vues à ce sujet : que l'on commence, disais-je, par tolérer ce calcul, et au bout de deux ou trois ans, tous les candidats seront en mesure. On pourra l'exiger. Le savant que je viens de citer, avait à ce sujet les idées suivantes : certains cours se font dans toutes les écoles d'applications, notamment un cours de machines, etc. De pareils cours devraient rentrer à l'École polytechnique; ainsi le cours de machines qui s'y fait recevrait plus de développements, serait confié à un homme spécial; le cours d'astronomie à un autre. Tout le cours d'analyse et de mécanique à la première année, serait exigé des candidats : la possibilité et la haute utilité de ces mesures étaient clairement prouvées. Mais M. Coriolis est mort!

Note. L'idée d'introduire le calcul différentiel dans les éléments, comme je l'ai dit ailleurs (t. III, p. 581), appartient à D'Alembert. Il l'a exprimée en maint article de l'Encyclopédie. Je n'ai pas cet ouvrage sous la main, et à la première occasion j'en transcrirai un passage relatif à cet objet ; il ne s'agit pas, bien entendu, de faire un cours spécial de calcul infinitésimal ainsi qu'il existe à l'Ecole polytechnique; mais il s'agit d'entremêler l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre, avec les principes de ce calcul et

avec les algorithmes qui représentent ces principes ; c'est ainsi qu'il faut faire remarquer aux élèves, que le carré du sinus divisé par le sinus-verse d'un arc est une quantité finie, quelle que soit la petitesse de l'arc, propriété qui appartient à toutes les coniques ; c'est ainsi qu'il faut de suite faire écrire le binôme sous la forme taylorienne :

$$fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \dots$$

où x^m est remplacé par $f(x)$; et donner la théorie complète si facile des dérivées algébriques, et baser sur ces théories, la méthode des racines égales, des fonctions symétriques, des tangentes, contacts des divers ordres, des polaires, etc. On peut même aborder les fonctions fractionnaires et les transcendantes circulaires et logarithmiques. En élargissant les idées des disciples, l'enseignement devient plus aisé, plus clair, plus riche et moins long. Quant aux théorèmes de MM. Minding et Finck, ils sont implicitement basés sur le parallélogramme de Newton, tel qu'il a été analytiquement établi par Lagrange; il y a similitude de raisonnements et de procédés. (Lacroix, C. D., introd., § 61, 2e édition.) La convergence des séries, les asymptotes, deux théories identiques, sont aussi fondées sur ce même parallélogramme.

La méthode d'élimination imaginée par Bezout, me paraît la plus naturelle, la plus conforme à son objet. Elle fournit même pour certain cas particulier, une solution que les autres méthodes ne peuvent donner ; Bezout en fait avec raison l'observation. Et par cette méthode, on obtient l'équation finale tout ordonnée, avantage considérable dont les autres méthodes sont privées. Elle est applicable à un nombre quelconque d'équations, tandis que les autres se bornent à deux équations seulement et ne peuvent aller au delà, si ce n'est pour les fonctions symétriques ; mais ce

procédé présente le grave inconvénient d'astreindre le calculateur à recommencer l'opération pour chaque inconnue, et nous laisse dans une ignorance complète sur la liaison entre les valeurs des inconnues. Tm.

LETTRE

Sur les approximations et sur les fractions continues.

—

Monsieur le Rédacteur,

La question d'approximation traitée par M. Duterme, dans votre dernier numéro (p. 121), se résout immédiatement par l'emploi de la formule (α) indiquée (t. I, p. 257, de vos Annales), et relative au calcul par approximation de l'incommensurable A^m; cette formule donne pour limite de l'erreur qui peut être commise sur A quand on veut avoir A^m à $\frac{1}{\delta}$ près, $e=\frac{1}{mA^{m-1}\delta}$.

Considérons l'un quelconque $a(q+\alpha)^n$ des moyens géométriques de la question proposée; on aura ici $e=\frac{1}{na(q+\alpha)^{n-1}\delta}$; on aura une limite à fortiori en prenant $e=\frac{1}{ma\,(q+\alpha)^{m+1}\delta}$, puisque n n'est pas moindre que m. Mais $(q+\alpha)^{m+1}=\frac{b}{a}$; donc $e=\frac{1}{mb\delta}$ est une limite. C'est la même que celle de M. Duterme, car j'ai appelé $\frac{1}{\delta}$ ce qu'il appelle δ.

Dans la note suivante (p. 126), M. Catalan démontre une proposition dont voici l'énoncé : dans une fraction continue périodique, le nombre des périodes étant illimité, il est

indifférent d'en prendre une de plus ou une de moins. Ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate de la formule d'approximation relative aux réduites en général. En effet, soient

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y}}} \quad \text{et } y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}}$$

Si on forme successivement les réduites de x et de y, en prenant dans chacune le même nombre de quotients incomplets, on aura chaque fois le même résultat pour les deux; or une réduite commune $\frac{Q}{Q'}$ obtenue à cette condition, diffère de x et de y, *dans le même sens* d'une quantité moindre que $\frac{1}{Q'^2}$; donc la différence entre x et y est moindre à fortiori que $\frac{1}{Q'^2}$; or cette limite peut descendre au-dessous de tout nombre assignable : donc x et y doivent être considérés comme égaux .

M. Catalan a moins eu peut-être pour objet de démontrer cette proposition que d'établir les thorèmes qu'il indique et démontre chemin faisant. Ces théorèmes peuvent être démontrés plus simplement en même temps que la proposition elle-même.

Reprenons la fraction continue périodique :

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \text{etc....}}}}}$$

Nommons y_1 la réduite $\frac{A}{A'}$, que l'on obtient en s'arrêtant à la première période; soient y_n, y_{n+1}, deux réduites quelconques $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, s'arrêtant chacune à la fin d'une période, et dont la deuxième en comprend une de plus que la première.

Soient encore $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$, les deux réduites qui précèdent immédiatement y_n ou $\frac{P}{P'}$. Nous avons les égalités :

$$y_n \text{ ou } \frac{P}{P'} = \frac{Nd+M}{N'd+M'},$$

$$y_{n+1} = \frac{N\left(d+\frac{1}{y_1}\right)+M}{N'\left(d+\frac{1}{y_1}\right)+M'} = \frac{Py_1+N}{P'y_1+N'}; \qquad (1)$$

d'où

$$y_{n+1}-y_n = \frac{Py_1+N}{P'y_1+N'} - \frac{P}{P'} = \frac{NP'-PN'}{(P'y_1+N')P'} = \frac{\pm 1}{(P'y_1+N')P'}. \qquad (2)$$

L'égalité (2) prouve la proposition principale, celle que j'ai déjà démontrée; car en remplaçant y_1 par $\frac{A}{A'}$, on peut écrire :

$$y_{n+1}-y_n = \frac{\pm A'}{(P'A+N'A')\,P'}. \qquad (3)$$

Or A' *est un nombre constant indépendant de* n, tandis que P' et N' peuvent dépasser toutes limites.

Elle prouve aussi l'un des théorèmes énoncés (p. 129, 3). Remplaçons de même y_1 dans y_{n+1}, nous aurons :

$$y_{n+1} = \frac{PA+NA'}{P'A+N'A'}.$$

Appelons Q et Q' ces deux termes; il est facile de prouver

qu'ils sont premiers entre eux, et forment sans réduction la réduite y_{n+1} ; en effet

$$y_{n+1}-y_n=\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{P'Q-PQ'}{Q'P'};$$

en ayant égard à l'égalité (3) et à la valeur de Q', on voit que

$$QP'-PQ'=\pm A'. \qquad (4)$$

Par suite si Q et Q' admettaient un commun diviseur d, ce nombre diviserait A', et par suite PA et P'A, d'après les valeurs de Q et Q'; or d serait premier avec A puisque $\frac{A}{A'}$ est une réduite; donc il diviserait P et P', ce qui est impossible, car $\frac{P}{P'}$ est aussi une réduite. Donc la formule (1) fournit immédiatement la réduite y_{n+1}, et indique une loi pour former les réduites de période en période (p. 129, 2).

De plus l'égalité (4) prouve que si A' divise P', il divisera Q'; or pour $n=1$, $P'=A'$; donc les dénominateurs des réduites y_n, y_{n+1}, etc., sont tous divisibles par A', et on peut écrire :

$$y_{n+1}-y_n=\frac{\pm 1}{P'Q''},$$

en posant $\frac{Q'}{A'}=Q''$ (nombre entier).

Agréez, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués. A. Guilmin.

ANNONCE.

La *Division abrégée*, ou Méthode rigoureuse et facile pour simplifier cette opération de l'arithmétique, approuvée par l'Académie des sciences ; par M. *P. Guy*, capitaine d'artillerie, in-8 de 72 pag. Mathias, 15, quai Malaquais. On rendra compte de cette remarquable production.

THÉORIE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.)

(Suite, voir p. 109 et 161.)

L'utilité qu'on avait retirée de la considération des nombres, et l'embarras que causaient ceux qui passaient de certaines limites, et dont on était obligé de se servir sans pouvoir s'en faire une idée bien précise, inspira une nouvelle sorte de comparaison qui produisit bientôt une nouvelle espèce de nombres. Elle résulta de la manière qu'on adopta de considérer l'assemblage de plusieurs unités comme une seule, de compter par exemple par douzaines, par centaines, etc., comme cela est encore en usage dans quelques circonstances de la vie civile; on retrouva alors tous les nombres dont la première comparaison avait fait naître l'idée, car une quantité pouvait être composée de une, deux, trois ou quatre douzaines ou centaines; mais la plupart des quantités ne pouvaient plus s'exprimer de cette sorte; on fut d'abord embarrassé pour exprimer les quantités qui, étant plus petites que la douzaine (en supposant que ce fût elle qui eût été choisie pour unité), ne pouvaient être considérées comme formées de la répétition de cette douzaine : on chercha alors à les exprimer en imaginant qu'elle fût divisée en un nombre convenable de parties égales; ce qui donna l'idée d'indiquer les différents résultats de ces divisions par les mots, *demi*, *tiers*, *quart*, *cinquième*, etc. Les nouveaux nombres qui étaient exprimés par ces mots faisaient, comme les nombres entiers, connaître la manière dont la quantité

dont on voulait parler était formée de celle que l'on considérait comme unité, et en disant, par exemple, que deux pommes étaient le sixième d'une douzaine de pommes, on concevait la douzaine comme l'unité, dont la quantité de deux pommes était formée en divisant cette unité en six parties égales; on donna à ces parties de l'unité choisie le nom d'*aliquotes*. Quant aux quantités plus grandes que cette unité, et qui ne pouvaient pas cependant être considérées comme formées de la répétition de cette unité, on les considéra comme formées de celle d'une de ses aliquotes, et pour exprimer, par exemple, la manière dont une troupe de quarante hommes pouvait être considérée, comme formée d'une douzaine d'hommes en divisant celle-ci en trois parties chacune de quatre hommes, et en répétant dix fois une de ces parties, on disait que cette quantité de quarante hommes était les *dix tiers* de celle qui avait été choisie pour unité. Les nouveaux nombres dont ces considérations nous ont donné l'idée s'appellent *nombres fractionnaires* ou *fractions*, suivant que la quantité est plus grande ou plus petite que l'unité à laquelle on la compare, et ils portent en commun le nom de *nombres rompus*.

27. Il est aisé de s'apercevoir ici que la signification des mots *unité* et *quantité* a déjà reçu une altération sensible en acquérant plus d'extension; elle en a souffert une plus considérable quand une troisième sorte de comparaison a produit une nouvelle espèce de nombres.

28. On la découvrit en comparant des grandeurs continues, c'est-à-dire, entre les parties desquelles il n'y avait point de séparation naturelle, comme deux distances, par exemple, ou deux poids; il suffisait que nous sentissions la possibilité de cette séparation pour concevoir une longueur formée de la réunion de cinq pieds, ou un poids résultant de celle de trois dixièmes de livre.

Il nous fut dès lors aisé de retrouver entre des grandeurs continues choisies convenablement tous les nombres entiers et rompus dont les comparaisons dont je viens de parler nous avaient donné l'idée; mais nous éprouvâmes plus de difficultés à déterminer avec précision le nombre qui résultait de la comparaison de deux grandeurs données. On dut d'abord s'apercevoir que, lorsque la plus petite des deux grandeurs n'était pas contenue exactement dans la plus grande, et que la manière dont celle-ci était formée de la première ne pouvait par conséquent pas être exprimée par un nombre entier, il fallait trouver une grandeur homogène plus petite, qui, étant contenue exactement dans chacune des deux autres, pût servir à trouver le nombre rompu demandé; en faisant voir, dans le cas, par exemple, où cette grandeur plus petite, à laquelle on a donné le nom de *commune mèsure* des deux proposées, était contenue cinq fois dans l'une et douze fois dans l'autre, que la plus petite était les *cinq douzièmes* de la plus grande, et celle-ci les *douze cinquièmes* de la première.

29. En exprimant ainsi par un nombre la manière dont une grandeur continue est formée d'une autre, on continue à donner le nom de quantité à celle que l'on considère comme formée de l'autre, et celui d'unité à celle-ci, quelque éloignée que cette signification soit de celle qu'avaient d'abord ces deux mots; nous nous conformerons à cet égard à l'usage universellement adopté.

On voit d'après cela comment il est arrivé que l'on a fini par faire du mot *quantité* un synonyme de *grandeur*. On n'admet en général dans un même calcul qu'une seule unité pour toutes les grandeurs d'une même espèce, et cette unité est ordinairement sous-entendue, en sorte que, s'il est question, par exemple, de plusieurs longueurs rapportées à l'unité appelée *pied*, on représente chacune dans le cours du calcul

par le nombre qui exprime la manière dont elle est formée de cette unité, sans qu'on se mette en peine de la valeur particulière de celle-ci, dont il suffit de se souvenir à la fin du calcul pour en interpréter le résultat. Il est évident qu'alors toutes ces grandeurs sont considérées comme des quantités, ce qui porte à regarder ces deux mots comme synonymes; mais on aurait autant de raison de faire la même chose à l'égard des mots *grandeur* et *unité*; car s'il y a plus de grandeurs dans un même calcul considérées comme des quantités, qu'il n'y en a de prises pour unités, il n'en est pas moins vrai que toute grandeur peut être considérée indifféremment sous l'un ou l'autre point de vue, et que, comme nous l'avons déjà dit, on peut, dans la comparaison de deux grandeurs quelconques, prendre à volonté la plus petite ou la plus grande pour unité, et considérer l'autre comme une quantité formée de cette unité de la manière indiquée par le nombre qui résulte de cette comparaison, et qui est toujours entier ou fractionnaire quand la plus petite des deux grandeurs est prise pour unité, et toujours fraction dans le cas contraire.

30. On peut remarquer en passant que la comparaison de deux grandeurs pouvant ainsi être faite sous un double point de vue, il en résulte toujours deux nombres, qui ont entre eux une analogie réciproque bien remarquable; en sorte que, si l'un est, par exemple, six treizièmes, l'autre ne pourra être que treize sixièmes : c'est ce que nous appellerons dorénavant *nombres réciproques*, et l'on voit par cette définition que les fractions un demi, un tiers, un quart, etc., sont les nombres réciproques des entiers, deux, trois, quatre, etc. De même que la fraction sept huitièmes est réciproque du nombre fractionnaire huit septièmes.

31. C'est la nécessité de trouver une commune mesure à deux grandeurs pour exprimer exactement à l'aide d'un

nombre la manière dont l'une d'elles est formée de l'autre, qui a fait découvrir la troisième espèce de nombre dont nous traitons actuellement. En effet, après avoir imaginé le procédé pour trouver cette commune mesure, que nous ferons bientôt connaître, et dont l'invention remonte probablement à la plus haute antiquité, il dut arriver souvent qu'on n'en trouva point, et l'on dut croire longtemps que cela ne venait que de sa petitesse, qui la faisait échapper aux meilleurs instruments dont on pût se servir pour donner plus de précision à cette opération. Mais des calculateurs plus habiles, ayant cherché la manière dont une grandeur était formée d'une autre dans le cas où le nombre qui l'exprimait pouvait être déterminé par la seule considération des relations existantes entre elles, démontrèrent rigoureusement que deux grandeurs pouvaient être telles, qu'aucune grandeur plus petite ne pût leur servir de commune mesure; comme on prouve, par exemple, en géométrie, que cela arrive quand on compare la ligne droite qui sert de côté à un carré et celle qui en joint deux angles opposés.

32. Les grandeurs qui se trouvaient dans ce cas furent appelées *incommensurables*, et de même que, lorsqu'on n'avait pas pu exprimer par aucun des nombres entiers, les seuls connus jusqu'alors, la manière dont une quarantaine était formée d'une douzaine, on avait imaginé pour cela une nouvelle espèce de nombres, on en établit ici encore une nouvelle, à laquelle on donna le nom de *nombres irrationnels*; en sorte que les nombres exprimant en général la manière dont une grandeur est formée d'une autre étaient *rationnels* ou *irrationnels*, suivant que ces deux grandeurs avaient ou n'avaient pas de commune mesure.

(*La suite prochainement.*)

CONCOURS GÉNÉRAL, ANNÉE 1833.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. CATALAN (EUGÈNE-CHARLES),
Né à Bruges (Belgique), le 30 mai 1814.
(Collége de Saint-Louis. — Professeur : M. Delisle. — Institution de Reusse.)

—

Problème.

Couper un triangle par une droite, de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra ce problème : 1° lorsque les deux côtés coupés du triangle sont égaux, et en particulier quand le triangle est équilatéral ; 2° lorsque les trois côtés du triangle sont inégaux.

Solution.

(*Fig.* 14.) Soient OAB le triangle proposé, $\overline{ED}$ (*) la sécante cherchée, G′ et G″ les centres de gravité de EOD et AEDB, et G le centre de gravité de AOB. Je prends pour axes les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$; pour origine, le sommet O, et je désigne enfin par a, b, les côtés $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, et par α, β, les côtés correspondants $\overline{OD}$, $\overline{OE}$.

Cela posé, les deux triangles AOB, EOD, qui ont un angle égal O, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle ; ce qui donne, à cause de la première condition :

$$\frac{ab}{\alpha\beta}=\frac{m}{n}; \quad \text{ou} \quad m\alpha\beta = nab \qquad (1)$$

$\frac{m}{n}$ étant le rapport connu de $\overline{AOB}$ à $\overline{EOD}$.

(*) Les figures contiennent plusieurs fautes, que le lecteur est prié de corriger.

Les équations des droites $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, sont respectivement :

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1,\ \frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1,$$

$$\text{ou } y=-\frac{b}{a}x+b\ (2),\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta\ (3).$$

L'équation de $\overline{G'G''}$, qui passe en G' (x', y') et G'' (x'', y''), est

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') : \qquad (4)$$

Cette droite devant être perpendiculaire à $\overline{ED}$, on doit avoir, entre les coefficients de x, la relation

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

en faisant :

$$a=-\frac{\beta}{\alpha},\quad a'=\frac{y'-y''}{x'-x''},\quad \widehat{AOB}=\theta.$$

On tire de là,

$$a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a-\cos\theta}\quad \text{ou}\quad \frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}\cos\theta}{-\frac{\beta}{\alpha}+\cos\theta};$$

savoir :

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{\alpha-\beta\cos\theta}{\beta-\alpha\cos\theta}. \qquad (5)$$

Je n'ai point encore exprimé que les points G', G'' sont les centres de gravité de $\overline{OED}$ et $\overline{DEAB}$; il faut, pour que cela ait lieu, que la somme des moments du triangle EOD et du quadrilatère AEDB, soit égale au moment du triangle AOB. Prenant donc $\overline{Ox}$ pour axes des moments, j'ai

$$P'T'+P''T''=PT; \qquad (6)$$

P', P'', P, désignant respectivement les perpendiculaires $\overline{G'H'}$, $\overline{G''H''}$, $\overline{GH}$; T', T'', T sont les aires correspondantes.

Or $P = y' \sin\theta = \frac{1}{3}\beta \sin\theta$, $P'' = y'' \sin\theta$, $P = \frac{1}{3} b \sin\theta$;

$$T' = \frac{n}{m} T, \quad T'' = \frac{m-n}{m} T;$$

ces valeurs se déduisent des centres de gravité des triangles, et aussi de (1). Par suite, l'équation (6) devient :

$$\frac{1}{3}\beta \sin\theta . \frac{n}{m} T + y'' \sin\theta . \frac{m-n}{m} T = \frac{1}{3} b \sin\theta . T;$$

ou bien :

$$n\beta + 3(m-n) y'' = mb. \qquad (7)$$

En prenant les moments par rapport à $\overline{Oy}$, on obtient de même :

$$n\alpha + 3(m-n) x'' = ma; \qquad (8)$$

équation qui peut se déduire de la précédente.

Ces deux équations donnent

$$x'' = \frac{ma - n\alpha}{3(m-n)}, \quad y'' = \frac{mb - n\beta}{3(m-n)}. \qquad (9)$$

D'ailleurs, l'équation (4) doit être vérifiée par $x = x''$, $y = y''$; par conséquent :

$$\frac{mb - n\beta}{3(m-n)} - \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}\left(\frac{ma - n\alpha}{3(m-n)} - \frac{\alpha}{3}\right);$$

d'où

$$(a + b\cos\theta)\alpha - (b + a\cos\theta)\beta - \alpha^2 + \beta^2 = 0. \qquad (A)$$

et

$$\alpha\beta = \frac{n}{m} ab = q. \qquad (B)$$

Les deux équations (A) et (B) détermineront α et β, ou la position de la sécante.

1° Le triangle étant isoscèle (*fig.* 15), par rapport aux côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, l'on a $a = b$, et l'équation (A) devient

$$a(1 + \cos\theta)(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

ou

$$(\alpha-\beta)\left[a(1+\cos\theta)-(\alpha+\beta)\right]=0 \ \text{(A}'\text{)} \quad \alpha\beta=\frac{n}{m}a^2 \ \text{(B}'\text{)}.$$

L'équation (A') se décompose donc en ces deux autres :

$$\alpha=\beta, \qquad \alpha+\beta=a(1+\cos\theta).$$

La première donne, à cause de (B') :

$$\alpha=\beta=a\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}. \qquad \text{(A}''\text{)}$$

La sécante est donc parallèle à la base dans le cas où le triangle proposé est isoscèle, et l'on a

$$\overline{\text{OE}}=\overline{\text{OD}}=\overline{\text{OA}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}},$$

valeur très-facile à construire. Il est d'ailleurs évident que toutes les conditions du problème sont satisfaites.

Si l'on prend

$$\alpha+\beta=a(1+\cos\theta)=2a\cos^2\frac{1}{2}\theta, \quad \text{avec} \quad \alpha\beta=\frac{n}{m}a^2,$$

il en résulte

$$\alpha^2-2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\alpha+\frac{n}{m}a^2=0. \qquad \text{(A}'''\text{)}$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, on doit avoir

$$a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta \overset{=}{>} \frac{n}{m}a^2, \quad \text{ou} \quad \cos^4\frac{1}{2}\theta \overset{=}{>} \frac{n}{m}.$$

On voit donc que la condition absolument nécessaire est $m>n$. Si l'on avait $m=n$, θ serait nul, et il n'y aurait plus de triangle. Si $\cos^4\frac{1}{2}\theta=\frac{n}{m}$, alors le premier membre de A''' est un carré, et le triangle formé par la sécante est isoscèle; et les côtés adjacents à l'angle O sont

$$\alpha=\beta=a\cos^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}a(1+\cos\theta).$$

Pour construire les racines de l'équation (A''), je pose

$$\alpha+\beta=2a\cos^2\frac{1}{2}\theta=2p,\quad \alpha\beta=\frac{n}{m}a^2=q^2:$$

la question est donc ramenée à trouver les deux côtés d'un rectangle équivalent à un carré donné q^2, et dont la somme de la base et de la hauteur est $2p$; problème très-facile.

2° Si le triangle isoscèle est en même temps équilatéral, toutes les remarques précédentes sont encore applicables ; il suffit de poser $\cos\theta=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Le triangle étant à la fois rectangle et isoscèle, on a toujours

$$\alpha=\beta=a\sqrt{\frac{n}{m}},\quad \text{et}\quad \alpha^2-a\alpha+\frac{n}{m}a^2=0.$$

Dans ce cas, pour que le second système soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{>} \frac{n}{m}a^2,\quad \text{ou}\quad m \overset{=}{>} 4n.$$

On ne peut donc supposer le triangle cherché plus grand que le quart du triangle donné : si $m=4n$, $\alpha=\beta$ et la seconde solution se confond avec la première.

3° Dans le cas général nous aurons à résoudre les deux équations

$$\beta^2-\alpha^2-M\beta+N\alpha=0,\quad (C)\qquad \alpha\beta=q,\quad (D)$$

en posant $M=b+a\cos\theta$, $N=a+b\cos\theta$, $q=$ etc. La seconde donne $\beta=\frac{q}{\alpha}$; d'où

$$\alpha^4-N\alpha^3+Mq\alpha-q^2=0.\qquad (C')$$

Pour résoudre cette équation, il faudrait commencer par la ramener à la forme $\alpha^4+p\alpha^2+q\alpha+r=o$, puis chercher la réduite, trouver l'une des racines de cette réduite, etc., ce qui donnerait lieu à des calculs très-longs et ne pourrait

nullement servir à construire les valeurs de α et β. Je remarquerai seulement :

1° Que, le dernier terme de l'équation (C') étant essentiellement négatif, la racine α a au moins une valeur réelle, ou, ce qui est équivalent, que le problème a toujours au moins une solution.

2° Que, si l'on a $M = -N$, le premier membre est divisible par $\alpha^2 - q$, et donne pour quotient $\alpha^2 - M\alpha + q$; il y aurait donc alors deux solutions. Mais comme cette hypothèse revient à supposer $\theta = \pi$, ces deux solutions ne sont qu'illusoires.

Revenons aux deux équations

$$\beta^2 - \alpha^2 - M\beta + N\alpha = 0, \quad (C) \qquad \alpha\beta = q. \quad (D)$$

Pour construire les racines de ces deux équations, j'observe qu'en regardant α et β comme des variables, la première représente une hyperbole rapportée à des coordonnées parallèles à ses axes (les coordonnées étant supposées rectangulaires), et la seconde une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Il suit de là que, si sur deux droites perpendiculaires prises pour axes, ou, ce qui est préférable, si sur les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ du triangle proposé, l'on construit ces deux courbes, les coordonnées de leurs points de rencontre seront les valeurs de α et β, en sorte que la droite sécante sera déterminée.

Pour la première hyperbole, changeons α en $\alpha + \frac{N}{2}$, β en $\beta + \frac{M}{2}$: son équation devient

$$\beta^2 - \alpha^2 = -\frac{N^2 - M^2}{2} = -\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin^2\theta. \quad (E)$$

On voit que l'axe des y ou des β sera le second axe de l'hyperbole si l'on a $a > b$, et réciproquement. Les longueurs des demi-axes rendus réels sont d'ailleurs :

$$b' = a' = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{2(a^2 - b^2)}. \quad (E')$$

Si l'angle θ est droit, l'hyperbole est équilatère, et

$$b' = a' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - b^2)}.$$

Il est bien entendu que l'équation (E) est celle de l'hyperbole après que l'on a fait passer les axes par son centre déterminé par les coordonnées,

$$x = \frac{N}{2} = \frac{1}{2}(a + b\cos\theta), \quad y = \frac{M}{2} = \frac{1}{2}(b + a\cos\theta). \quad (E')$$

Comme on peut toujours supposer que a, b et $\cos\theta$ sont des quantités positives, il s'ensuit que les deux courbes offriront à peu près la disposition indiquée sur la figure 17.

Dans les cas particuliers examinés d'abord, il est clair que les lieux géométriques s'appliquent également; si par exemple $a = b$, les équations (C)et (D) deviennent

$$\beta = \alpha, \qquad \alpha\beta = q, \qquad (F)$$
$$\beta = -\alpha + a(1 + \cos\theta), \quad \alpha\beta = q. \qquad (F')$$

Alors le premier système de valeurs est déterminé par la rencontre d'une droite passant à l'origine et de l'hyperbole $\alpha\beta = q$; le second système, par l'intersection de la même hyperbole avec la droite dont l'équation est

$$\beta = -\alpha + a(1 + \cos\theta).$$

On peut se proposer de chercher quelle est la courbe que décrit le point I, intersection de la sécante et de la droite qui passe par les centres de gravité G′, G″, lorsque, les côtés a, b étant constants, l'angle θ varie. Pour cela, je prends les équations de ces deux droites; savoir :

$$y - \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}\left(x - \frac{\alpha}{3}\right), \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta, \quad (G)$$

et les équations

$$(a + b\cos\theta)\alpha - (b + a\cos\theta)\beta - \alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad \alpha\beta = q. \quad (B)$$

Il est évident que, pour avoir la solution cherchée, il faut éliminer les quantités qui déterminent le triangle MOD, c'est-à-dire α, β et $\cos\theta$.

Or (G) donne $\frac{\beta}{\alpha}x = \beta - y$; multipliant par $\alpha\beta = q$, il vient $\beta^2 x = \beta q - qy$; d'où

$$\beta = \frac{1}{2x}q \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - qyx}, \qquad \text{(H)}$$

puis

$$\alpha = \frac{q}{\beta} = \frac{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - qyx}}{yx}. \qquad \text{(H')}$$

Et comme la première équation donne

$$\cos\theta = \frac{\alpha\left(x-\frac{\alpha}{3}\right) - \beta\left(y-\frac{\beta}{3}\right)}{\beta\left(x-\frac{\alpha}{3}\right) - \alpha\left(y-\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{3\alpha x - \alpha^2 - 3\beta y + \beta^2}{3\beta x - \alpha\beta - 3\alpha y + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{3\alpha x - \alpha^2 - 3\beta y + \beta^2}{3(\beta x - \alpha y)},$$

la troisième devient

$$\left.\begin{aligned} &3(a\alpha - b\beta)(\beta x - \alpha y) + (b\alpha - a\beta)(3\alpha x - 3\beta y + \beta^2 - \alpha^2) \\ &\quad - 3(\alpha^2 - \beta^2)(\beta x - \alpha y) = 0. \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Il resterait à introduire pour α et β leurs valeurs (H') et (H).

Si l'on voulait faire des applications numériques, il faudrait rendre calculables par logarithmes les formules qui ne ne le sont pas immédiatement. Pour cela, soit d'abord les racines de l'équation (A''),

$$\alpha^2 - 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta.\alpha + \frac{n}{m}a^2 = 0;$$

d'où

$$\alpha = a\cos^2\frac{1}{2}\theta \pm a\sqrt{\cos^4\frac{1}{2}\theta - \frac{n}{m}}.$$

Cette quantité α devient d'abord :

$$\alpha = a \cos^2 \frac{1}{2}\theta \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{n}{m \cos^4 \frac{1}{2}\theta}}\right).$$

Pour que α soit réelle, il faut que $\frac{n}{m \cos^4 \frac{1}{2}\theta}$, soit plus petite que 1 ; on peut donc poser

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{n}{m \cos^4 \frac{1}{2}\theta}}, \qquad \text{(K)}$$

alors α devient

$$\alpha = a \cos^2 \frac{1}{2}\theta (1 \pm \cos\varphi),$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2a \cos^2 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\varphi, \\ \beta &= 2a \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sin^2 \frac{1}{2}\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L)}$$

Pour les valeurs (E) et (F), il n'y a d'autre transformation à effectuer que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Soit encore à rendre calculable la valeur $k = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}$, trouvée plus haut, et soit $\beta > \alpha$.

On a $k = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \cos\theta}{1 - \frac{\alpha}{\beta}\cos\theta}$. Comme il y a des tangentes de toutes les grandeurs, je pose $\tang^2\varphi = \frac{\alpha}{\beta}$, $\tang^2\varphi' = \cos\theta$; d'où $k = \frac{\tang^2\varphi - \tang^2\varphi'}{1 - \tang^2\varphi \tang^2\varphi'}$. Or $\tang(\varphi + \varphi') = \frac{\tang\varphi + \tang\varphi'}{1 - \tang\varphi \tang\varphi'}$,

$$\tang(\varphi - \varphi') = \frac{\tang\varphi - \tang\varphi'}{1 + \tang\varphi \tang\varphi'};$$

donc

$$k = \tang(\varphi + \varphi') \tang(\varphi - \varphi').$$

Il n'est pas à craindre que l'arc φ' soit imaginaire : car l'angle θ est toujours supposé aigu.

Sur la figure 15, on a $\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}}=\frac{m}{n}$, d'où $\overline{OB}^2:\overline{OD}^2::m:n$, donc $\overline{OE}=\overline{OD}$, est la première solution.

On prend ensuite (*fig.* 16), $\overline{GH}=\overline{OI}=a\cos\theta$, $\overline{GH'}=a$. Décrivant HKH', on mène la parallèle $\overline{KE'}$ à une distance égale à $\overline{OD}=a\sqrt{\frac{n}{m}}$. Par suite $\overline{HL}+\overline{H'L}=a(1+\cos\theta)$, $\overline{KL}^2=\overline{HL}\cdot\overline{H'L}=\frac{n}{m}a^2$; donc $\overline{HL}$ et $\overline{H'L}$ sont les longueurs α et β.

La seconde figure (*fig.* 17) est le cas général. Après avoir prolongé les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ du triangle donné, on décrit la circonférence OFB; par le point O, l'on décrit $\overline{AF}$. On porte $\overline{BF}$ en G et en H, sur les perpendiculaires $\overline{BG}$, $\overline{BH}$; joignant $\overline{HG}$, cette droite est déjà $\sqrt{2(a^2-b^2)}$; menant $\overline{GI}$ parallèle à $\overline{OA}$, et faisant $\overline{GI}=\overline{GH}$, il vient

$$\overline{IK}=\sin\theta\sqrt{2(a^2-b^2)}=2a'=2b'.$$

Menant les perpendiculaires $\overline{BL}$, $\overline{AM}$ sur les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et faisant $\overline{AN}=\overline{OL}$, $\overline{BN'}=\overline{OM}$, il s'ensuit que $\overline{ON}=b+a\cos\theta$, $\overline{ON'}=a+b\cos\theta$. Si donc on prend $OP=\frac{1}{2}\overline{ON}$, $\overline{OP'}=\frac{1}{2}\overline{ON'}$, O sera le centre de la première hyperbole, dont les axes sont connus.

Pour la seconde, on fait

$$\overline{OR}=\frac{n}{m}a, \quad \text{d'où} \quad \overline{OT}=\overline{OS}=a\sqrt{\frac{n}{m}}=OS';$$

décrivant S'UA, il vient $\overline{OU}=\sqrt{\frac{n}{m}}ab=q$. Enfin, $\overline{VX}$

et $\overline{V'X}$ donnent le point X de la seconde hyperbole, qui rencontre la première en deux points; le premier en Z, l'autre dans le sens opposé, vers les coordonnées négatives; d'où l'on achève le triangle EOD, qui est celui demandé.

Cette figure montre qu'il y aura en général deux solutions imaginaires, et une autre qui ne satisfait pas tout à fait à l'énoncé. Quant au triangle OED, bien qu'il ne soit pas renfermé dans le premier triangle, il satisfait puisque l'on peut prendre le centre de gravité du quadrilatère AE BD, et le joindre au centre de OED, par une droite qui sera perpendiculaire à $\overline{ED}$.

NOTE

Sur la limite des racines (*).

PAR M. TILLOT,
professeur à Castres.

Lorsque, pour déterminer la limite supérieure des racines positives d'une équation, on part de l'une des formules $x = 1 + N$, $a = 1 + \sqrt[n]{N}$, on sait que généralement le nombre obtenu est trop fort; il me semble que l'erreur vient le plus souvent de ce que la méthode suivie dans la détermination des formules n'est pas assez générale.

Soit

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \ldots + A_{m-h}x^h - \ldots - \\ - A_{m-n}x^n \ldots - A_{m-r}x^r \ldots = 0,$$

une équation dans laquelle A_{m-n} est le premier coefficient négatif, et A_{m-r} le plus grand. Il vient en divisant toute

(*) Voir tome I, p. 243 et tome II, p. 517.

l'équation par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif, et que je supposerai A_{m-h},

$$\frac{x^m}{A_{m-h}}+\frac{A_1}{A_{m-h}}x^{m-1}\dots x^h\dots-\frac{A_{m-n}}{A_{m-h}}x^n\dots-\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^r\dots=0;$$

pour avoir une limite supérieure, il suffit de satisfaire à l'inégalité

$$x^h>\frac{A_{m-n}}{A_{m-h}}x^n\dots+\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^r,$$

ou aux suivantes :

$$x^h>\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}(x^n+x^{n-1}+\dots+1),$$

$$x^h>\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right).$$

Cette dernière devient

$$(x-1)\,x^h \geqq \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^{n+1}; \qquad (1)$$

or, comme l'on a toujours $h \geqq n+1$, pour satisfaire à l'inégalité (1), il suffit de poser

$$x-1=\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}} \quad \text{d'où} \quad x=1+\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}.$$

On aura donc une limite supérieure, en ajoutant l'unité au quotient du plus grand coefficient négatif, par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif. Cette limite sera d'autant plus exacte, que le diviseur sera plus grand : il convient donc de diviser toujours par le plus grand coefficient positif précédant le premier terme négatif (*). Si le deuxième terme de l'équation était négatif, on retomberait sur la formule $x=1+N$. Cette méthode appliquée à l'équation

$$x^8+2x^7+80x^6-40x^5-80x^4-60x^3-30x^2-20x-30=0,$$

donne pour limite $x=1+\frac{80}{80}=2$.

(*) Conséquence immédiate de la méthode ordinaire. Tm.

Les méthodes ordinaires donneraient $x = 81$ ou

$$x = 1 + \sqrt[3]{80} = 6.$$

On peut encore déduire de (1) une limite plus approchée que $x = 1 + \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}$. En effet en divisant par x^{n+r} il vient:

$$(x - 1)\, x^{h-n-r} \geqq \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}};$$

d'où

$$(x - 1)^{h-n} = \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}} \quad \text{et} \quad x = 1 + \sqrt[h-n]{\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}}.$$

Pour avoir une limite supérieure, il faudra donc diviser le plus grand coefficient négatif par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif, extraire du quotient une racine d'un indice égal à la différence en exposants du terme positif qui a servi de diviseur, et du premier terme négatif, et ajouter au résultat l'unité.

On trouve ainsi pour l'équation

$$x^6 + 29x^5 + 38x^4 - 4x^3 - 50x^2 - 30x + 64 = 0,$$

$$x = 1 + \sqrt{\frac{56}{29}} = 1 + \sqrt{2} = 3;$$

les méthodes ordinaires donneraient $N + 1 = 57$,

$$+ \sqrt[n]{N} = 1 + \sqrt[3]{56} = 5.$$

Il est à remarquer que la première méthode eût donné la même limite 3.

Il reste à se demander si l'on obtiendra toujours ainsi une limite plus exacte qu'en partant de la formule $x = 1 + \sqrt[n]{N}$; pour que cela soit, il faut évidemment avoir la relation

$$\sqrt[h-n]{\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}} < \sqrt[m-n]{A_{m-r}}.$$

Il conviendra donc d'examiner dans chaque cas quel est celui des coefficients positifs qu'il faudra employer comme diviseur.

Si on prend le premier, on retombe sur les formules

$$x = 1 + \sqrt[n]{N} \ (*).$$

NOTE

Sur quelques questions d'arithmétique élémentaire.

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur d'analyse à l'École polytechnique.

—

I.

Divisibilité par 11. Le procédé suivant, pour trouver le reste de la division d'un nombre par 11, me paraît d'une application plus facile que celui qu'on emploie ordinairement. — « Partagez le nombre proposé en tranches de deux chiffres en commençant par la droite. Au-dessous de chaque tranche écrivez son excès sur le plus grand multiple de 11 qui s'y trouve contenu. Faites la somme de cet excès en supprimant le nombre 11 à mesure qu'il se forme. La somme finale est le reste demandé. » — Voici un exemple du calcul.

3, 78, 96, 54, 39.
3, 1, 8, 10, 6.

On voit que la somme des restes divisée par 11 donnera 6 pour reste; et 6 est aussi le reste de la division du nombre proposé (*v.* p. 73).

(*) La limite de M. Tillot est un cas particulier de la limite de Bret, qui est plus approchée (v. t. II, p. 326). Tm.

II.

Fractions décimales périodiques; *retour à leurs fractions génératrices*, ou bien, *détermination de leurs limites*.

Pour le cas d'une période simple, M. Catalan a levé (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 465) la difficulté qu'on peut très-raisonnablement opposer à la méthode donnée dans la plupart des traités d'arithmétique. Il a fait voir que la fraction ordinaire donnée par la règle reproduirait par son développement la fraction périodique.—On peut étendre le même raisonnement à une fraction périodique mixte.

Pour prouver par exemple que

$$0,38457457.....$$

a pour génératrice la fraction ordinaire

$$\frac{38457-38}{99900}$$

J'observe que cette dernière donnera lieu par son développement à la répétition de 38457 fois, moins 38 fois la période mixte

$$0,00001001001....$$

Prenons d'abord 38457 fois chacune des unités décimales de ce développement ; il en résultera les nombres décimaux suivants

0,38457
0,00038457
0,00000038457
. . . .

dont la suite est indéfinie. Il faudrait les ajouter et ensuite retrancher de la somme 38 fois chacune de ces mêmes unités : c'est ce qu'on peut opérer avant l'addition, en supprimant dans le tableau précédent les deux premiers chiffres signifi-

catifs de chaque nombre si ce n'est dans le premier où on doit les laisser subsister. Dès lors il est manifeste qu'on trouvera pour somme la fraction périodique mixte proposée.

Après avoir prouvé que la fraction ordinaire donnée par la règle est la *fraction génératrice* de la fraction périodique correspondante, on peut prouver aussi qu'elle en est *la limite*; et c'est uniquement sous ce double point de vue de fraction génératrice et de limite qu'il semble qu'on devrait considérer l'expression dont il s'agit.

Pour prouver par exemple que $\frac{27}{99}$ est bien la limite de la fraction périodique

$$0{,}272727.....$$

j'observe premièrement que les expressions

$$\frac{27}{99}, \quad \frac{2727}{9999}, \quad \frac{272727}{999999}, \text{ etc.},$$

sont équivalentes. D'après cela l'excès de $\frac{27}{99}$ sur les valeurs qu'on obtient en prenant successivement une, deux, trois... périodes reçoit les déterminations suivantes :

$$\frac{27}{99}-\frac{27}{99+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{100}$$

$$\frac{2727}{9999}-\frac{2727}{9999+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{10000}$$

$$\frac{272727}{999999}-\frac{272727}{999999+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{1000000}$$

. . . .

C'est comme on voit l'extension du procédé qu'on emploie ordinairement pour prouver que 1 est la limite de la fraction,

$$0{,}9999...$$

et ce même moyen s'applique identiquement aux périodes mixtes.

III.

Extraction de la racine carrée par approximation. Si on compare le calcul par l'approximation en décimales avec celui qu'on doit faire pour calculer l'approximation à moins d'une fraction quelconque $\frac{1}{a}$; on verra que celui-là a sur l'autre un grand avantage, quoique d'ailleurs la règle soit la même. Il faut multiplier le nombre proposé par le carré de a, ce qui peut rendre fort laborieuse l'extraction de la racine carrée qu'on devra faire ensuite. Cependant le résultat de l'approximation sera peut-être d'ajouter à la partie entière de la racine une fraction dont le numérateur sera très-petit. Bien plus! comme on ne sait pas d'avance si le nombre proposé est ou n'est pas un carré parfait, de deux choses l'une : ou bien on ne fera l'extraction qu'après avoir multiplié le nombre proposé par le carré de a; et alors, si ce nombre est un carré parfait, on se sera imposé bien gratuitement un surcroît de peine; ou bien on essayera d'abord l'extraction; mais si elle ne se fait pas exactement il faudra donc tenir le calcul déjà fait pour non avenu, et recommencer tout.

La règle suivante a pour objet de parer autant que possible à cet inconvénient.

« Pour extraire la racine carrée du nombre N à moins d'une fraction d'approximation marquée par $\frac{1}{a}$, tirez d'abord la racine à moins d'une unité; soit a le résultat. Multipliez le reste de l'opération par a; divisez le produit ainsi obtenu par le double de la partie déjà déterminée; la partie entière du quotient, c'est-à-dire la partie entière de $\frac{(N-a^2)a}{2a}$, étant multipliée par la fraction d'approximation, sera ce qu'il faut ajouter au nombre entier a pour avoir la racine

cherchée avec le degré d'approximation voulu (en plus ou en moins)..... »

Cette règle suppose qu'on ait $\frac{\alpha}{2a} < 1$; condition qu'on pourra presque toujours examiner avant tout calcul, d'après le nombre des chiffres de a et au besoin aussi d'après le premier de ces chiffres qui se détermine à simple vue et sans tâtonnement.

En un mot, si $a+\frac{n}{\alpha}$ est la racine demandée avec le degré d'approximation voulue, et si e est la partie entière de $\frac{(N-a^2)\alpha}{2a}$; alors $a+\frac{e}{\alpha}$ sera l'un des deux nombres : $a+\frac{n}{\alpha}, a+\frac{n+1}{\alpha}$.

Mais si on avait $\frac{\alpha}{2a}>1$, par exemple supposons $\frac{\alpha}{2a}=n'+\gamma$, n' étant la partie entière ; alors le nombre e peut encore être utile à connaître, parce qu'il est toujours au moins égal à n, et tout au plus égal à $n+n'+1$.

Dans ce cas donc, la division recommandée par la règle ci-dessus donnera au quotient un chiffre douteux et qu'il faudra confirmer par plusieurs essais. Mais le nombre de ces essais devant être tout au plus égal à $n'+1$, ce sera au calculateur à prévoir si ce tâtonnement ne sera pas encore plus avantageux que la nécessité de remplacer l'extraction $\sqrt{N}$, par celle de $\sqrt{Nx^2}$.

D'ailleurs pour déterminer lequel des nombres rétrosuccessifs e, $e-1$, $e-2$, etc., est précisément égal au nombre n, voici le calcul très-simple qu'on devra faire.

Soit r le reste de la division de $N-a^2$, formez le tableau suivant à deux colonnes :

$$\frac{e^2}{\alpha}, \qquad r$$

$$\frac{(e-1)^2}{\alpha}, \qquad 2a+r.$$

$$\frac{(e-2)^2}{\alpha}, \qquad 4a+r$$

. . . .

$$\frac{(e-e')^2}{\alpha}, \qquad 2e'a+r.$$

. . . .

En vous arrêtant aussitôt que le nombre de la première colonne, $\frac{(e-e')^2}{\alpha}$, sera inférieur au nombre $2e'a+r$ de la seconde. Alors $e-e'$ sera précisément le nombre n; c'est-à-dire que la racine approchée qu'on demande sera $a+\frac{e-e'}{\alpha}$.

En effet de l'inégalité

$$\frac{(e-e')^2}{\alpha}<2e'a+r,$$

on tire la suivante

$$2a(e-e')+\frac{(e-e')^2}{\alpha}<2ae+r$$

ou bien encore à cause de

$$(N-a^2)\alpha=2ae+r$$

$$a^2+2a\frac{e-e'}{\alpha}+\frac{(e-e')^2}{\alpha^2}<N$$

c'est-à-dire

$$a+\frac{e-e'}{\alpha}<\sqrt{N}.$$

Je termine sur ce point en observant que si α est un nombre décomposable en facteurs, cette circonstance favorisera l'application de la règle ci-dessus, parce qu'au lieu de construire

immédiatement la fraction complémentaire $\frac{n}{\alpha}$, on pourra calculer successivement plusieurs fractions dont les premières auront par dénominateurs les facteurs de α et dont la somme devra être finalement $\frac{n}{\alpha}$. C'est ainsi que l'approximation en décimales revient en effet à calculer succéssivement les numérateurs de plusieurs fractions dont la somme forme une fraction totale du dénominateur voulu.

IV.

Extraction de la racine cubique. — A : à moins d'une unité. — B : à moins d'une fraction d'approximation donnée.

A. Chacun des chiffres de la racine étant déterminé par un quotient qui peut être trop fort donne lieu à un essai qui semble de nature à rendre l'opération très-laborieuse.

Mais d'abord, en ayant égard à ce qu'il n'y a pas lieu d'essayer un chiffre plus grand que 9, on reconnait que le nombre des essais inutiles que peut occasionner la détermination du second chiffre ne saurait dépasser *quatre*; et que sur chacun des autres chiffres à partir du troisième il ne saurait y avoir qu'*un* seul essai infructueux ; ce qui élève à $n+2$ le maximum des essais de ce genre dans la détermination d'une racine de n chiffres. — Cela résulte d'un théorème donné par M. Finck dans son arithmétique (liv. III, prop. XXIII) (1). Mais

(*) On peut démontrer cela comme il suit : soit a le nombre des dizaines de la racine $(a.10+b)$ du nombre N. Si on fait $b=c+\gamma$; c étant la partie entière de b, le nombre c sera le chiffre même des unités de la racine. On a d'ailleurs

$$\frac{N-a^3.1000}{3a^2.100}=c+\gamma+\frac{b^2}{a.10}+\frac{b^3}{3a^2.100}.$$

Et si e est la partie entière du quotient $\frac{N-a^3.1000}{3a^2.100}$; ce nombre e dépassera c du nombre total des unités qui sont contenues dans

$$\gamma+\frac{b^2}{a.10}+\frac{b^3}{3a^2.100}.$$

Or ce nombre sera d'abord le plus grand possible, si a est lui-même le plus

bien plus, à partir du quatrième chiffre de la racine, toutes les fois qu'un chiffre déterminé se trouvera trop fort, loin qu'on doive considérer cette circonstance comme donnant lieu à des essais infructueux, on pourra au contraire en tirer parti pour abréger notablement le calcul en se fondant sur les principes suivants, dont le lecteur trouvera facilement la démonstration.

I° *Si en déterminant le chiffre du rang* $\mu+4$, *on trouve un quotient égal à* 10, *non-seulement le chiffre qu'on cherche est égal à* 9, *mais tous les chiffres consécutifs à celui-là en nombre* μ *le sont également.*

II° *Si en déterminant le chiffre du rang* $\mu+3$ *on trouve un quotient inférieur à* 10, *mais trop fort, les chiffres consécutifs à celui-là en nombre* μ *seront tous des* 9.

Pour avoir les règles qui correspondent aux précédentes dans l'extraction de la racine carrée, il faudrait, dans les énoncés précédents, diminuer d'une unité les nombres qui marquent le rang du chiffre qu'on détermine actuellement.

Au reste, plutôt que d'attendre de ces circonstances accidentelles l'abréviation des procédés d'extraction, il faut, ce semble, appliquer la vraie méthode qui ne consiste pas à déterminer les chiffres *un à un*; mais à en déterminer un nom-

---

petit possible; c'est-à-dire égal à 1. Après cela si on suppose b entre 5 et 6, c'est-à-dire plus petit que 6, on trouve

$$\frac{b^2}{10}+\frac{b^3}{300}>5.$$

D'où on conclut que dans ce cas l'excès de e sur c ne peut pas atteindre 6; c'est-à-dire que e ne peut pas atteindre 11. En excluant donc l'essai de $e=10$, on ne peut avoir à faire au plus que *quatre* essais infructueux. Pour b entre 4 et 5, on trouverait le même résultat; mais pour toute autre valeur de b, le nombre d'essais serait moindre.

D'autre part dès qu'on a dépassé le second chiffre de la racine, a est au moins égal à 10, alors la quantité $\gamma+\frac{b^2}{a.10}+\frac{b^3}{3a^2.100}$, ne saurait atteindre 3 dans le cas de $b>9$, qui d'ailleurs ne donne lieu à aucun tâtonnement; et cette même quantité est toujours inférieure à 2 dans toute autre supposition; d'où il résulte que le nombre e est tout au plus égal à $c+1$.

bre toujours croissant par chacune des divisions successives ; se fondant, pour le calcul de la racine carrée, sur le principe d'abréviation déjà connu, et ensuite sur le principe un peu différent, mais tout à fait analogue, qui se rapporte aux racines cubiques ; principe qu'il faut, à ce que je crois, énoncer comme il suit : *lorsqu'on a déterminé* n + 2 *chiffres à la racine cubique on peut déterminer les* n *chiffres suivants par une seule division*.

Si on ne déterminait d'abord que $n+1$ chiffres pour calculer les n suivants par une seule division, comme on l'a proposé naguère, on risquerait de se tromper de deux unités en plus sur le dernier chiffre ; au lieu qu'en suivant la règle de $n+2$ chiffres, on ne pourra se tromper que d'une seule unité en plus sur le dernier chiffre ; ce qui est la même limite d'erreur que quand on détermine les chiffres un à un.

B Pour calculer une racine cubique à moins d'une fraction d'approximation donnée, on pourra le plus souvent éviter les longueurs où entraînerait l'application de la règle générale. — Il faudra extraire d'abord la racine à moins d'une unité ; multiplier le reste de l'opération par la fraction d'approximation renversée ; et diviser ce produit par le triple carré de la partie entière de la racine.

En appelant a cette partie entière et $\frac{1}{\alpha}$ la fraction d'approximation, il faudra, dis-je, diviser le produit $(N-a^3)\alpha$ par $3a$. Soit e la partie entière du quotient, alors la racine du nombre proposé sera $a+\frac{e}{\alpha}$ à moins d'une erreur $\frac{1}{\alpha}$ en plus ou en moins, si toutefois on a

$$\alpha\left(\frac{3a+1}{3a^2}\right)<1\,;$$

condition qui sera satisfaite si on a $\alpha<a$.

Généralement si on suppose

$$\alpha\left(\frac{3a+1}{3a^2}\right) < n'$$

et si en même temps n est le numérateur de la fraction qu'on doit ajouter à a pour avoir la racine avec l'approximation voulue (en moins); alors le nombre e sera au moins égal à n' et pourra d'ailleurs être un quelconque des nombres consécutifs à celui-là jusqu'à $n+n'+1$ (*).

NOTE

Sur les racines imaginaires des équations algébriques.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique.

—

On sait depuis longtemps que lorsque les coefficients A, B, C de trois termes consécutifs

(1) $$Ax^n,\ Bx^{n-1},\ Cx^{n-2},$$

d'une équation (a) vérifient la condition

$$AC \overset{=}{>} B^2,$$

l'équation a au moins deux racines imaginaires; mais on n'a pas remarqué, je crois, qu'il suffisait que l'on eût :

$$AC \overset{=}{>} \frac{1}{2}B^2.$$

Voici comment cette dernière proposition peut être établie : supposons qu'en général la condition

(2) $$AC \overset{=}{>} nB^2,$$

où n est un nombre quelconque, entraîne l'existence d

(*) (*V.* t. III, p. 234). Tm.

deux racines imaginaires dans l'équation (a). Multiplions le premier membre de cette équation par $x-q$; les termes (1) donneront lieu aux termes

$$\mathrm{A}x^{n+1} + \left.\begin{matrix}\mathrm{B}\\+\mathrm{A}q\end{matrix}\right| x^{n} + \left.\begin{matrix}\mathrm{C}\\+\mathrm{B}q\end{matrix}\right| x^{n-1},$$

et pour que l'équation (a) ait deux racines imaginaires, il suffira, d'après la condition (2), que pour une valeur réelle de q, on ait

$$\mathrm{A}\,(\mathrm{C}+\mathrm{B}q) \overset{=}{>} n\,(\mathrm{B}+\mathrm{A}q)^2.$$

Ce qui donne tout calcul fait :

$$\mathrm{AC} \overset{=}{>} \left(1-\frac{1}{4n}\right)\mathrm{B}^2;$$

d'où l'on peut conclure en général que si la condition (2) indique la présence de deux racines imaginaires dans l'équation (a), pour $n=\alpha$, la même propriété subsiste pour $n=1-\frac{1}{4\alpha}$. Or quand $n=1$, la condition (2) devient

$$\mathrm{AC} \overset{=}{>} \mathrm{B}^2$$

dont l'existence entraîne toujours celle de deux racines imaginaires dans l'équation (a), on peut donc prendre

$$n=\frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{10},\ \text{etc.}$$

La loi de ces valeurs est facile à saisir ; on peut les représenter par la fraction $\frac{k}{2(k-1)}$, d'où l'on conclut que leur limite est $\frac{1}{2}$. De là résulte la proposition énoncée.

Note. Le théorème d'Euler donne $\mathrm{AC} < \frac{n-1}{n}\mathrm{B}^2$, pour caractère de l'existence d'imaginaires (*v.* t. II, p. 257) ; or n est au moins égal à 2, donc, etc Tm.

CONCOURS D'AGRÉGATION.

Composition d'analyse proposée en 1844.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Intégrer les deux équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Si je pose pour simplifier

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \mathrm{T}.$$

Les équations proposées prendront la forme

$$\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \mathrm{T}.$$

Ce sont deux équations simultanées linéaires, la deuxième avec un second membre et du deuxième ordre ; pour les intégrer, je vais les ramener à un système d'équations simultanées du premier ordre, et pour y parvenir je n'aurai qu'à poser $\frac{dx}{dt} = z$, d'où $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt}$, et j'aurai ainsi en substituant ces valeurs dans les deux équations précédentes, et y joignant $\frac{dx}{dt} - z = 0$,

$$\frac{dx}{dt} - z = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} - 2\,\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \mathrm{T},$$

Qui représentent le système de trois équations simultanées linéaires et du premier ordre, à coefficient constant entre quatre variables. Afin de n'avoir qu'un seul coefficient différentiel dans chaque équation, j'élimine $\frac{dx}{dt}$ entre la première et la deuxième, et $\frac{dx}{dt}$ avec $\frac{dy}{dt}$, entre les trois équations; multipliant ensuite par dt, j'obtiens les équations suivantes :

$$(3) \qquad dx - z\,dt = 0,$$

$$(4) \qquad dy + \left(x - \frac{9}{2}y - \frac{1}{2}z\right) dt = 0,$$

$$(5) \qquad dz + \left(7x - \frac{11}{2}y - \frac{11}{2}z\right) dt = -\mathrm{T}dt.$$

Ce sont trois équations simultanées linéaires et du premier ordre à coefficients constants, la dernière avec un deuxième membre.

Afin de les intégrer je multiplie (4) et (5) respectivement par deux facteurs indéterminés θ_1, θ_2, et j'ajoute (3) avec les produits, ce qui me donne

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx + \theta_1 dy + \theta_2 dz + \left\{ (\theta_1 + 7\theta_2)\,x - \frac{1}{2}(9\theta_1 + 11\theta_2)y - \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{2}(2 + \theta_1 + 11\theta_2)\,z \right\} dt = -\theta_2 \mathrm{T}dt. \end{array} \right.$$

Or je vois actuellement que cette équation deviendra une équation linéaire à deux variables :

$$(7) \qquad du + \theta u\,dt = -\theta_2 \mathrm{T}dt,$$

qui aura pour intégrale

$$(8) \quad u = x + \theta_1 y + \theta_2 z = e^{-\theta t} \left\{ G - \theta_2 \int_0^t T e^{\theta t} dt \right\}.$$

Si je choisis θ_1 et θ_2 de manière à satisfaire aux équations

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 + 7\theta_2 = \theta. \\ 9\theta_1 + 11\theta_2 = -2\theta_1\theta \\ 2 + \theta_1 + 11\theta_2 = -2\theta_2\theta \end{array}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{array}{ll} (9) & \theta_1 + 7\theta_2 = \theta, \\ (10) & (9+2\theta)\theta_1 + 11\theta_2 = -\theta, \\ (11) & \theta_1 + (11+2\theta)\theta_2 = -2. \end{array}\right.$$

Car alors l'équation (6) deviendra

$$(12) \quad dx + \theta_1 dy + \theta_2 dz + \left\{ x + \theta_1 y + \theta_2 z \right\} \theta dt = -\theta_2 T dt;$$

et en posant dans celle-ci :

$$x + \theta_1 y + \theta_2 z = u,$$

et différentiant cette dernière équation en y, considérant θ_1 et θ_2 comme constants (ce qui est permis d'après le système des équations (9), (10) et (11), qui sont au nombre de trois à trois inconnues), il viendra

$$dx + \theta_1 dy + \theta_2 dz = du,$$

et en substituant ces valeurs de $x+\theta_1 y+\theta_2 z$ et $dx+\theta_1 dy+\theta_2 dz$, dans (12) on obtient l'équation (7), dans laquelle θ est aussi constant. Ce qui fait que son intégrale est (8), d'après ce qu'on sait sur l'intégration de l'équation linéaire du deuxième ordre avec un second membre.

Des équations (10) et (11), on tire pour θ_1 et θ_2 les valeurs suivantes :

$$\theta_1 = \frac{11}{44 + 20\theta + 2\theta^2},$$

$$\theta_2 = -\frac{9 + 2\theta}{44 + 20\theta + 2\theta^2};$$

substituant dans l'équation (9), on trouve en réduisant :

$$(13) \qquad \theta^3 + 10\theta^2 + 29\theta + 26 = 0.$$

Équation du troisième degré qui résolue par rapport à θ donne les trois racines $\theta = -2$, $\theta' = -4 + \sqrt{3}$, $\theta'' = -4 - \sqrt{3}$, qui sont réelles et inégales, si on substitue successivement

ces trois valeurs de θ dans les valeurs de θ_1 et θ_2, on en déduira pour chacune trois valeurs correspondantes, et l'on aura ainsi les trois systèmes renfermés dans le tableau suivant :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{valeurs de} & \theta, & \theta_1, & \theta_2, \\ 1^{\text{er}}\text{ système} & -2, & \frac{11}{8}, & -\frac{5}{8}, \\ 2^{\text{e}}\text{ système} & \sqrt{3}-4, & \sqrt{3}-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, \\ 3^{\text{e}}\text{ système} & -\sqrt{3}-4, & -\sqrt{3}-\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

En substituant successivement chacun de ces systèmes dans (8), on aura trois intégrales renfermant chacune une constante arbitraire différente, de façon que leur ensemble formera le système des intégrales générales du système des équations simultanées (3), (4) et (5).

Mais avant de faire cette substitution cherchons à ramener $\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt$, qui représente une intégrale double d'après la forme de T, à une intégrale simple, et pour cela intégrons par parties : il viendra,

$$\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt=\frac{1}{\theta}e^{\theta t}\mathrm{T}-\frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\theta}\frac{d\mathrm{T}}{dt}dt,$$

remplaçant T par sa valeur l'équation précédente deviendra

$$\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt=\frac{1}{\theta}e^{\theta t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{1}{\theta}\int_0^t\frac{e^{\theta}dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

et substituant cette valeur dans l'équation (8), on trouve

$$(15)\quad x+\theta_1 y+\theta_2 z=e^{-\theta t}\left\{\mathrm{G}-\frac{\theta_2}{\theta}\left(e^{\theta t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{\theta t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\}.$$

Si actuellement on substitue successivement dans cette équation pour $\theta, \theta_1, \theta_2$ leurs systèmes de valeurs indiquées (14),

et qu'on représente par G_1, G_2 et G_3 les trois constantes arbitraires, on aura toutes réductions faites :

$$(16)\quad x+\frac{11}{8}y-\frac{5}{8}z=e^{2t}\left\{G_1+\frac{5}{16}\left(e^{-2t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-2t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\},$$

$$(17)\quad \begin{cases} x+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)y+\frac{1}{2}z=e^{(4-\sqrt{3})t} \\ \left\{G_2+\frac{4+\sqrt{3}}{26}\left(e^{-(4-\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\}, \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} x-\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)y-\frac{1}{2}z=e^{(4+\sqrt{3})t} \\ \left\{G_3-\frac{4-\sqrt{3}}{26}\left(e^{-(4+\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-(4+\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\}, \end{cases}$$

et ces équations seront les intégrales générales des équations (3), (4), (5); car elles renferment trois constantes distinctes, ainsi que l'exige le système en question.

Maintenant pour obtenir les intégrales générales du système proposé (1) et (2), il est évident qu'il suffit d'éliminer z entre les équations intégrales précédentes (16), (17) et (18) prises deux à deux ; par conséquent en éliminant z entre (16) et (17), (17) et (18), et faisant les réductions, on aura pour les intégrales en question :

$$(19)\quad \begin{cases} 9x+(3+5\sqrt{3})y=e^{2t}\left\{G_1+G_2e^{(2-\sqrt{3})t}\right\}+\frac{5(13+2\sqrt{3})}{52} \\ \int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{5}{4}e^{2t}\left\{\int_0^t\frac{e^{-2t}dt}{\sqrt{1+t^4}}+4e^{(2-\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right\}, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} 2x-y=e^{(4-\sqrt{3})t}\left\{G_2+G_3e^{2\sqrt{3}t}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{13}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{4+\sqrt{3}}{26} \\ e^{(4-\sqrt{3})t}\left\{\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{19-8\sqrt{3}}{13}e^{2\sqrt{3}t}\int_0^t\frac{e^{-(4+\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right\}. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux intégrales (19) et (20) du système (1) et (2) renferment bien le nombre de constantes arbitraires que doivent renfermer les intégrales générales ; car ce nombre doit être $(2+1)=3$.

On pourrait, si l'on voulait, déduire des intégrales précédentes, les valeurs de x et y en fonction de t.

La question proposée a été ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que ces quadratures se trouvent ramenées à l'intégration de deux intégrales, ayant les formes suivantes.

La première $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, que l'on intégrera par les fonctions elliptiques.

La deuxième $\int_0^x \frac{e^{ax}dx}{\sqrt{1+x^4}}$, qui constitue une nouvelle transcendante irréductible.

Remarque sur la solution précédente. L'intégration des équations (1) et (2) peut être effectuée plus rapidement, à l'aide du procédé suivant, qui est applicable à beaucoup de cas.

Mettons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dx}{dt}-2x=2\frac{dy}{dt}-9y.$$

Nous pouvons regarder le second membre comme une fonction inconnue de t; et nous aurons, par la méthode de la variation des constantes :

$$x=\mathrm{A}e^{2t},\quad \frac{d\mathrm{A}}{dt}=e^{-2t}\left(2\frac{dy}{dt}-9y\right).$$

La valeur de x donne

$$\frac{dx}{dt}=e^{2t}\left(2\mathrm{A}+\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{2t}\left(4\mathrm{A}+4\frac{d\mathrm{A}}{dt}+\frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2}\right).$$

Substituant dans l'équation (2), on la transforme d'abord en

$$\frac{dy}{dt}+y+e^{2t}\left(\frac{dA}{dt}-\frac{d^2A}{dt^2}\right)=\mathrm{T}.$$

Mais

$$\frac{d^2A}{dt^2}=e^{-2t}\left(18y-13\frac{dy}{dt}+2\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

d'où

$$\frac{dA}{dt}-\frac{d^2A}{dt^2}=e^{-2t}\left(-27y+15\frac{dy}{dt}-2\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$-2\frac{d^2y}{dt^2}+16\frac{dy}{dt}-26y=\mathrm{T};$$

et le calcul n'offre plus de difficulté. E. C.

THÉORÈMES

sur les tangentes aux coniques.

PAR M. A. WOESTYN,
élève de M. AMIOT (pension BARBET).

—

AT et AS sont deux droites qui touchent une section conique quelconque aux points B et C ; on mène une troisième tangente quelconque DE, et par les points D et E, où elle rencontre les deux premières, on trace des parallèles à ces tangentes (*fig.* 25).

On propose :

1° De déterminer le lieu des points d'intersection M de ces parallèles ;

2° De reconnaître que l'angle EFD, sous lequel on voit, de l'un des foyers de la section conique F, la tangente mobile ED, conserve une valeur constante dans toutes les positions de cette tangente.

3° On examinera le cas particulier où la section conique est une parabole, et l'on fera voir que dans ce cas les segments interceptés sur les portions AB, AC des tangentes fixes par la tangente mobile sont réciproquement proportionnels.

I. Je prends pour axes des coordonnées, les deux tangentes fixes; j'appelle a et b les distances de l'origine aux points de tangence C et B.

La section conique donnée a pour équation une expression de la forme

$$y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0.$$

Il faut exprimer que cette courbe est tangente aux deux axes des coordonnées aux points C et B. Il est nécessaire pour cela que les équations que l'on obtient en faisant alternativement $y = 0$ et $x = 0$ dans l'équation de la courbe aient deux racines égales, la première à a, la seconde à b; pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que les coefficients de l'équation et les quantités a et b satisfassent aux relations suivantes :

$$E^2 = CF \qquad D^2 = F$$

$$a = -\frac{E}{C} \qquad b = -D$$

On peut remplacer ces quatre relations par celles-ci :

$$C = \frac{b^2}{a^2} \qquad E = -\frac{b^2}{a}$$

$$D = -b \qquad F = b^2.$$

Je substitue dans l'équation de la courbe, aux coefficients C, D, E, F leurs valeurs; cette équation devient :

$$y^2 + 2Bxy + \frac{b^2}{a^2}x^2 - 2by - 2\frac{b^2}{a}x + b^2 = 0$$

Je pose pour simplifier $\frac{b^2}{a^2} = K$

$$y^2 + 2Bxy + Kx^2 - 2by - 2Kax + b^2 = 0$$

Soit maintenant $y = mx + n$ l'équation de la droite ED.

pour exprimer que cette droite est tangente à la courbe, je vais remplacer dans l'équation de la courbe y par sa valeur tirée de l'équation de la droite, et poser que l'équation résultante en x a deux racines égales. Cette condition se traduit par

$$(mn-bm-aK+Bn)^2=(m^2+2Bm+K)(n^2-2bn+b^2)$$

Si je développe, j'obtiendrai, toutes simplifications faites, en observant que $K=\frac{b^2}{a^2}$,

$$n^2\left(B^2-\frac{b^2}{a^2}\right)-2mnb\left(\frac{b}{a}-B\right)-2Ka\left(B-\frac{b}{a}\right)n+2b^2\left(\frac{b}{a}-B\right)m=$$

Je supprime le facteur $B-\frac{b}{a}$

$$n^2\left(B+\frac{b}{a}\right)+2mnb-2aKn-2b^2m=0$$

En appelant x et y, les coordonnées à l'origine de la droite ED, coordonnées qui sont en même temps les coordonnées courantes du lieu cherché, j'ai $n=y$ et $m=-\frac{y}{x}$; substituant à m et à n leurs valeurs dans l'équation précédente, je trouve pour celle du lieu, après la suppression du facteur y qui donne l'axe des x, solution qui ne saurait convenir :

$$\left(B+\frac{b}{a}\right)xy-2by-2aKx+2b^2=0$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, et qui passe par les deux points B et C.

Si je suppose que la courbe donnée soit une parabole, j'ai $B^2=K$, d'où $B=\pm\frac{b}{a}$. En prenant le signe $+$, je trouve que l'équation de la courbe donnée est $\left(y+\frac{b}{a}x-b\right)^2=0$, cette équation représente alors la droite des contacts B, C. Je rejette cette hypothèse : en prenant le signe $-$ au contraire, la courbe

donnée est une vraie parabole et j'obtiens pour l'équation du lieu

$$y+\frac{b}{a}x-b=0$$

c'est précisément l'équation de la droite qui unit les points de contact.

II. Il est aisé de voir que la tangente mobile coupe les deux tangentes fixes en des segments qui sont réciproquement proportionnels. Car DM étant parallèle à AC, j'ai

$$BD:AD=BM:MC,$$

j'ai pareillement

$$AE:EC=BM:MC$$

et à cause du rapport commun

$$BD:AD=AE:EC.$$

III. Je vais démontrer que l'angle formé par la réunion du foyer aux points d'intersection des tangentes fixes par la tangente mobile est constant.

Je rappellerai ce théorème. Dans toute section conique, la ligne qui joint le point de rencontre d'une sécante et de la directrice au foyer correspondant est bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont du foyer aux points d'intersection de la sécante et de la courbe.

Je vais faire voir maintenant que la ligne qui unit le point, d'où l'on a mené les deux tangentes fixes à la section conique, et le foyer, est bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs partant du foyer pour aller aux points de contact.

Je supposerai qu'il s'agisse par exemple d'une ellipse : il me suffit de démontrer que la ligne KF (fig. 26) est perpendiculaire sur celle qui unit le foyer au point où la corde des contacts rencontre la directrice correspondante au foyer que je considère.

Je prends l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes pour

axes des coordonnées; j'appelle x'', y'' les coordonnées du point K : le coefficient angulaire de la droite KF sera $\frac{y''}{x''-c}$; celui de la droite IF, les coordonnées du point I étant $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2(c-x'')}{y''}$, sera $\frac{c-x''}{y''}$; le produit de ces deux coefficients angulaires étant égal à — 1, les deux droites sont rectangulaires, et la ligne KF est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Il est facile maintenant de résoudre la question proposée. Soit une tangente HH', j'unis les points H, R, H' au foyer ; j'ai, en vertu du théorème précédent, RFH' = H'FM', RFH = HFM ; je conclus de là que l'angle HFH' est constant et égal à la moitié de l'angle MFM'.

Il est aisé de voir de plus que, dans le cas de la parabole, cet angle est supplémentaire de l'angle des tangentes fixes, car cet angle étant le même, quelle que soit la position de la tangente mobile, il aura cette valeur constante quand la tangente sera perpendiculaire à l'axe de la parabole, mais alors les lignes FH et FH' sont perpendiculaires sur les tangentes fixes, puisque le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet, les deux angles en H et H' étant droits dans le quadrilatère KHFH', il suit bien que l'angle en F est supplémentaire de l'angle en K.

Ce quadrilatère étant inscriptible, on voit que le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données est la circonférence circonscrite au triangle formé par la rencontre de ces droites.

Note. Le théorème 1 est une conséquence immédiate de l'équation donnée (t. III, p. 188) ; savoir

$$2kab^2 + 2k'ba^2 - lb^2 + 2nab - l'a^2 - ma^2b^2 = 0\,;$$

les axes touchant la courbe, on a $l = l' = 0$; l'équation

devient divisible par ab, et l'on a $2kb+2k'a+2n-mab=0$, hyperbole dont a et b sont les coordonnées courantes ; les coordonnées du centre de l'hyperbole sont doubles des coordonnées du centre de la conique donnée.

Le théorème 2 a déjà été démontré (t. II, p. 535, et t. III, p. 439).

Le théorème 3 a déjà été démontré (t. I, p. 449 et t. III, p. 184).

Tm.

NOTE

sur la solution analytique des problèmes et sur un problème d'arithmétique sociale.

PAR M. QUILLET,
ancien élève de l'Ecole normale.

—

I. Lorsque la solution analytique d'un problème particulier dépend de l'emploi des modes les plus généraux de représenter et de combiner les quantités, il n'est pas indifférent de résoudre l'équation finale, à laquelle il conduit, par telle ou telle méthode de calcul. Il faut surtout se guider sur la nature de celui-ci, dans le choix de la méthode à suivre pour arriver à sa véritable solution. Il est encore plus nécessaire de ne pas perdre de vue son énoncé particulier, lorsqu'une restriction de cet énoncé, originairement exprimée dans le calcul, à l'aide de signes algébriques, peut disparaître dans son développement suivant la manière dont ce calcul est dirigé; pour trouver des exemples de ces deux circonstances,

il suffit d'avoir recours à la théorie des fonctions symétriques et à celle des combinaisons.

1° Quand on veut exprimer rationnellement, au moyen des coefficients $a, a_2, a_3, \ldots a_m$ d'une équation donnée du degré (m), la somme des puissances entières, semblables et positives, de degré $m-p$ des racines de cette équation, on parvient à l'une ou à l'autre des deux relations générales suivantes

$$S_{m+p} + a_1 S_{m+p-1} + a_2 S_{m+p-2} + \ldots a_m S_p = 0,$$

$$S_{m-p} + a_1 S_{m-p-1} + \ldots \frac{m-p}{m} a_{m-p} S_0 = 0.$$

2° Lorsqu'on veut déterminer, sans employer le raisonnement par induction, les formules qui donnent par des produits de facteurs le nombre de combinaisons simples d'espèce donnée, que l'on peut faire avec m lettres différentes, on arrive de diverses manières aux équations suivantes :

$$P_m = mP_{m-1}, \qquad C_m^n = \frac{m-n+1}{n} C_m^{n-1},$$

$$A_m^n = mA_{m-1}^{n-1}, \qquad C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1},$$

$$A_m^n = (m-n+1) A_m^{n-1}, \qquad C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n},$$

$$A_m^n = \frac{m}{m-n} A_{m-1}^n, \qquad C_m^n = \frac{m}{m-n} C_{m-1}^n.$$

Ces formules, ainsi que les précédentes, ne sont, au fond, que des équations aux différences finies, à une ou à deux variables indépendantes ; et pour en déduire les fonctions discontinues des nombres entiers m, n, p, qui correspondent aux solutions des problèmes ci-dessus énoncés, on emploie ordinairement la méthode des multiplications ou des substitutions successives ; or, il y a une observation à faire sur cette méthode de calcul. Il est indispensable de l'employer dans la solution du premier problème qui répond à l'équation

$$S_{m+p} + a_1 S_{m+p-1} + \ldots a_m S_p = 0.$$

En effet, l'intégrale complète de cette équation linéaire aux différences finies à coefficients constants, sans second membre, est

$$S_p = C_1 x_1^p + C_2 x_2^p + \dots C_m x_m^p,$$

d'où

$$S_{m+p} = C_1 x_1^{m+p} + C_2 x_2^{m+p} + \dots C_m x_m^{m+p},$$

$C_1, C_2, \dots, C_m$ désignant m constantes arbitraires et $x_1, x_2, \dots x_m$ précisément les m racines de l'équation donnée; en sorte qu'en faisant $C_1 = C_2 \dots C_m = 1$ dans la valeur de S_{m+p}, on serait ramené au point de départ du calcul; puisqu'il s'agit de calculer S_{m+p} en fonction des coefficients de l'équation proposée et sans la résoudre.

Le problème qui dépend de l'équation

$$S_{m-p} + a_1 S_{m-p-1} + \dots \frac{m-p}{m} a_{m-p} S_0 = 0$$

donne lieu à la même remarque. Son intégrale générale n'est pas connue, que je sache; d'ailleurs, pour le résoudre, il faudrait, non recourir à cette intégrale, mais opérer par la méthode des substitutions successives, ce qui ferait connaître l'expression de S_{m-p}. On peut encore calculer les sommes S_{m-p}, $S_{m-p-1} \dots$ en prenant les coefficients des termes du quotient $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; ces coefficients sont respectivement, dans leur ordre, les sommes S_0, $S_1 \dots$, ainsi que M. Desmaret l'a fait voir (p. 169 du Ier vol.).

II. Considérons maintenant à la fois dans la théorie des combinaisons les deux équations

$$A_m^n = \frac{m}{m-n} A_{m-1}^n, \quad C_m^n = \frac{m}{m-n} C_{m-1}^n$$

qui terminent le tableau précédent, et examinons la méthode de calcul qu'il convient d'employer pour leur développement. La seconde se déduit de la première en divisant par P_n cha-

cun des termes de son premier membre ; mais cette restriction s'efface d'elle-même, et ne subsiste pas dans le résultat du calcul des substitutions successives ; en sorte que cette méthode ne fait connaître que la valeur de $A^n{}_m$, et ne peut être employée que pour le développement de la première équation. Il faut donc, pour déterminer la valeur ordinaire de $C^n{}_m$ autrement que par la relation connue

$$C^n_m = \frac{A^n_m}{P_n}$$

avoir recours à l'intégrale générale de l'équation aux différences finies partielles

$$y_{m,n} - \frac{m}{m-n} y_{m-1,n} = 0;$$

pour la trouver, faisons $m = l + 1$, observons que l'on a par définition

$$\Delta_l y = y_{l+1,n} - y_{l,n},$$

et supprimons pour abréger les indices : l'équation précédente pourra être mise sous la forme

$$\Delta y - y\left(\frac{n}{l+1-n}\right) = 0.$$

On peut alors la considérer comme une équation ordinaire aux différences finies du premier degré et du premier ordre, entre deux variables discontinues y et l, n étant regardé comme constant. Son intégrale générale en termes finis, sera donc (*)

$$y = C\varphi\left(1 + \frac{n}{l+1-n}\right) = C\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right),$$

$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)$ désignant le produit de toutes les valeurs de la fraction $\frac{m}{m-n}$ entre les limites de l'intégrale Σ, et C la con-

(*) Lacroix, C. D., t. III.

stante arbitraire, que nous regarderons comme une fonction arbitraire et discontinue du nombre n.

Cela posé, on peut donner à m les valeurs successives entières et positives qui s'étendent depuis le nombre m jusqu'au nombre $2n+1$ y compris ces deux nombres, alors

$$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)=\frac{m(m-1)\dots(n+2)(n+1)}{(m-n)(m-n-1)\dots 3.2.1},$$

et en réduisant

$$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)=m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Ainsi, dans cette hypothèse, la valeur générale de $y_{m,n}$ sera

$$y_{m,n}=[m(m-1)\dots(m-n+1)]C;$$

et pour retrouver les valeurs ordinaires de A^n_m et C^n_m, il suffira d'attribuer successivement à C, dans cette dernière formule, les deux valeurs

$$C=1,\quad C=\frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

III. On me pardonnera peut-être à cette occasion de reproduire ici, comme susceptible d'intéresser quelques lecteurs, la solution donnée anciennement par M. Cournot dans le *Bulletin* de Férussac (1830-31), d'un problème d'algèbre légale sur les successions irrégulières; je regrette de ne pouvoir insérer la spirituelle rédaction.—La solution de ce problème, lorsqu'on tient à s'assujettir à la lettre de la loi, dépend de la résolution, par la méthode des substitutions, de deux équations, dont l'une est du premier degré et l'autre aux différences finies à deux variables. En voici l'énoncé et l'analyse sommaire.

Le droit d'un enfant naturel, venant en concurrence avec un au moins ou plusieurs enfants légitimes, est, d'après le code civil français, le tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime. Il s'agit de déduire de cette

condition la part de chaque enfant naturel ou légitime, lorsqu'on connaît le nombre des enfants de chaque catégorie, ainsi que le montant de la succession qui doit être répartie entre eux.

n étant le nombre des enfants naturels, l celui des enfants légitimes, et la somme à partager entre eux étant, pour fixer les idées, représentée par l'unité; soient $y_{n,\,l}$ et $x_{n,\,l}$, les parts respectives de chaque enfant naturel et légitime, on aura pour première équation du problème

$$n y_{n,\,l} + l x_{n,\,l} = 1. \qquad (1)$$

Supposons maintenant, pour un moment, que l'un des enfants naturels soit considéré comme légitime, la part de chacun des autres enfants naturels sera, dans cette hypothèse, exprimée par la notation $y_{n-1,\,l+1}$, et leur part collective par $(n-1)y_{n-1,\,l+1}$; il restera donc à partager entre les $(l+1)$ enfants supposés tous légitimes, la somme

$$1-(n-1)y_{n-1,\,l+1},$$

et le tiers de la part de chacun d'eux étant égalé à $y_{n,\,l}$, fera connaître la seconde équation du problème, savoir :

$$y_{n,\,l} = \frac{1}{3\,(l+1)}\left[1-(n-1)y_{n-1,\,l+1}\right], \qquad (2)$$

en faisant $n=1$ dans cette équation, le second membre se réduit à une quantité connue $\frac{1}{3\,(l+1)}$; ainsi on peut, par des substitutions successives, calculer en fonction des nombres n, l, la valeur générale de $y_{n,\,l}$. En ayant égard aussi à l'équation (1), on trouve pour $y_{n,\,l}$ et $x_{n,\,l}$ les valeurs suivantes :

$$y_{n,\,l} = \frac{1}{3(l+1)} - \frac{n-1}{3^2(l+1)(l+2)} \cdots \mp \frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{3^n(l+1)\ldots(l+n)},$$

$$x_{n,\,l} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{3^n l(l+1)\ldots(l+n)},$$

le signe change d'un terme au suivant, dans les deux formules, à partir des premiers termes, qui sont positifs; ainsi il faudra prendre les signes supérieurs ou inférieurs, selon que n sera pair ou impair. Il est donc facile, d'après ces formules, de construire, par avance, une table à double entrée, dont les limites comprennent entre elles toute l'étendue des valeurs éventuelles, que peuvent prendre simultanément n et l.

Note. L'article 757 du code civil est ainsi rédigé. Le droit de l'enfant naturel sur les biens de ses père ou mère décédés est réglé ainsi qu'il suit : « Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, ce droit est d'un tiers de la portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime : il est de la moitié lorsque les père ou mère ne laissent pas de descendants, mais bien des ascendants ou des frères ou sœurs; il est des trois quarts lorsque les père ou mère ne laissent ni descendants, ni ascendants, ni frères ni sœurs. » Cette rédaction présente quelque obscurité; que faut-il entendre par ces mots : « la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime ? » à première vue, on croit qu'il s'agit de supposer que tous les enfants sont légitimes, alors chacun aurait $\frac{1}{l+n}$, et par conséquent la part de chaque enfant naturel sera $\frac{1}{3(l+n)}$; mais cette solution est évidemment fautive (*) : il s'ensuivrait que la part de l'enfant naturel serait toujours la même pourvu que $l+n$ fût constante; ainsi qu'il y ait un enfant naturel et l enfants légitimes, ou bien l enfants naturels, et un enfant légitime, la part de l'enfant naturel serait toujours $\frac{1}{3(1+l)}$; telle ne pouvait être la

(*) C'est pourtant celle qu'on lit dans l'excellent commentaire de M. Rogron sur le code. Tm.

pensée du législateur ; mais il faut, comme on fait dans la solution précédente, calculer quelle serait la part de la succession pour chacun des enfants naturels pris isolément, s'il devenait légitime, et prendre ensuite le tiers de cette part ; ce qui fournit l'équation (2). Il y a deux cas qui échappent à cette solution : savoir pour $n=0$ la valeur de $y_{0,l}$ est évidemment nulle ; posons $l=0$, l'équation (1) donne $y_{n,0}=\frac{1}{n}$; mais d'après les dispositions de l'art. 757, on aura $y_{n,0}=\frac{1}{2n}$ ou bien $y_{n,0}=\frac{3}{4n}$. Tm.

NOUVELLE DÉTERMINATION
du rayon de courbure de l'ellipse.

(Par un Abonné.)

—

Voici encore une détermination du rayon de courbure de l'ellipse (voy. t. III, p. 596). Celle-ci est appropriée au cas où on construit l'ellipse en augmentant ou diminuant dans un même rapport toutes les ordonnées d'un cercle.

Soient μ le point de l'ellipse, et M le point correspondant du cercle : ces deux points sont sur une même ordonnée.

Soit ρ le rayon de courbure de l'ellipse en μ ; α l'angle que fait la normale avec l'ordonnée.

Soit aussi α' l'angle que fait, avec la même ordonnée, la normale au cercle en M ; et soit de plus r' le rayon de courbure de l'ellipse au sommet de l'axe qui est parallèle à l'ordonnée passant par m et M ; de sorte que si a et b sont les demi-axes de l'ellipse, le rayon de courbure r' est égal à $\frac{a^2}{b}$, ou à $\frac{b^2}{a}$. On a la détermination :

$$r'.\cos^3\alpha'=\rho.\cos^3\alpha,$$

qui se prête à une construction très-simple et très-facile.

LETTRE

Sur les fractions continues.

Mon cher monsieur Terquem,

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient une lettre de M. *Guilmin*, relative à ma note sur les fractions continues périodiques. Cette lettre demande une réponse : soyez assez bon pour accueillir celle-ci.

M. Guilmin dit d'abord : « M. Catalan démontre une proposition dont voici l'énoncé : *Dans une fraction continue périodique, le nombre des périodes étant illimité, il est indifférent d'en prendre une de plus ou une de moins.* »

Cet énoncé n'est pas de moi, et je serais fâché qu'il en fût.

M. Guilmin dit ensuite :

« Soient

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y}}} \qquad y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}$$

» Si on forme successivement les réduites de x et de y, en prenant dans chacune le même nombre de quotients incomplets, on aura chaque fois le même résultat pour les deux; or une réduite $\frac{Q}{Q'}$ obtenue à cette condition, diffère de x et de y, *dans le même sens* d'une quantité moindre que... » etc.

J'avoue qu'il m'est absolument impossible de suivre le

raisonnement de M. Guilmin, et d'attacher un sens clair à des phrases telles que celles-ci :

« Si on forme successivement les réduites de x et de y, » en prenant dans chacune *le même nombre de quotients in-* » *complets* » ;

» On aura *chaque fois* le même résultat pour les deux » ;

» Une réduite commune *obtenue à cette condition* » ;

» Diffère *dans le même sens d'une quantité*... ; »

etc.

Je voudrais, encore un coup, débrouiller cet écheveau, mais je ne puis.

M. Guilmin dit plus loin : « M. Catalan *a moins ou peut-* » *être pour objet* de démontrer cette proposition que d'établir » les théorèmes, » etc.

La supposition de M. Guilmin est très-fondée. Si j'avais voulu seulement démontrer la proposition dont il s'agit, j'aurais dit :

« La différence entre deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, peut devenir aussi petite que l'on voudra, si $\frac{P}{P'}$ occupe un rang assez éloigné ; donc la différence entre deux réduites $\frac{P}{P'}$, $\frac{U}{U'}$, distantes l'une de l'autre d'un nombre déterminé de rangs, peut également devenir moindre qu'une quantité donnée ; donc on pourra satisfaire à l'inégalité $y_n - y_{n+1} < \delta$ »

Je suis content d'avoir laissé à M. Guilmin l'occasion de chercher une démonstration.

La note *incriminée* contient la formule :

$$y_n = \frac{Py_{n-1} + N}{P'y_{n-1} + N'},$$

dans laquelle P, P', N, N' sont *des constantes*. M. Guilmin trouve plus commode d'employer cette autre formule :

$$y_{n+1} = \frac{Py_1 + N}{P'y_1 + N'},$$

dans laquelle P, P', N, N' sont *des variables* : permis à lui.

Enfin, M. Guilmin enlève quelques mots et quelques virgules à cette malencontreuse note ; il supprime quelques calculs ; il appelle A ce que j'avais appelé Q, etc. Ces *perfectionnements* lui permettent de démontrer en deux pages une partie de ce que j'avais démontré en trois pages et demie. Ici, je n'ai rien à dire : car l'économie est une belle chose !

Agréez, mon cher M. Terquem, l'assurance de mes sentiments affectueux et dévoués.

E. Catalan.

21 avril 1845.

QUESTIONS PROPOSÉES.

93. Soient A, B, C, les longueurs de trois cordes issues d'un même point d'une circonférence de cercle; B étant la corde intermédiaire.

Conformément à la notation très-expressive recommandée par Carnot, représentons par $\widehat{AB}$ l'angle des droites A et B; et ainsi des autres.

On a, comme il est facile de s'en assurer, la relation

$$(\alpha)\qquad A.\sin\widehat{BC} + C.\sin\widehat{AB} = B.\sin\widehat{AC}.$$

A la surface de la sphère, A, B et C représentant trois arcs de grand cercle issus du même point d'un petit cercle, et terminés à leur seconde rencontre avec ce même petit cercle, on a une relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que les longueurs A, B et C, sont remplacées par

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,A,\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\,B,\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\,C.$$

On propose de rechercher s'il y a un théorème analogue à

la relation (α), pour quatre cordes de la sphère qui seraient issues d'un même point de la surface.

PAR UN ABONNÉ.

94. Discuter complétement la surface du troisième degré

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Tm.

95. Étant donnés n points situés d'une manière quelconque dans un plan, construire le plus petit cercle qui les enveloppe tous. Tm.

96. Si, dans l'angle de deux droites prises pour axes de coordonnées, on inscrit une ligne polygonale régulière, ayant l'origine pour centre, on aura entre les abscisses à l'origine x', x'', $x'''\ldots x^{(n)}$, des côtés du polygone, et l'ordonnée Y du premier sommet à partir de l'axe des x, la relation $\frac{1}{Y} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \ldots + \frac{1}{x^{(n)}}$.

PROUHET.

97. Couper un triangle par une transversale, de manière que trois segments non consécutifs soient égaux.

PROUHET.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les centres des coniques.

—

1. *Problème*. Étant donnés trois points et le centre d'une conique, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient A, B, C les trois points, et O le centre donnés; faisons $AB = p$, $AC = q$, et prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y; l'équation de la conique sera

de la forme $y^2 + Bxy + Cx^2 - qy - Cpx = 0$; soit t l'abscisse et u l'ordonnée du centre. On a

$$t=\frac{Bq-2Cp}{B^2-4C},\quad u=\frac{BCp-2Cq}{B^2-4C},\quad \frac{t}{u}=\frac{Bq-2Cp}{BCp-2Cq},$$

$C=\dfrac{Bqu}{Bpt+2(pu-qt)}$; mettant cette valeur de C dans celle de t et divisant par Bt, on obtient $B^2pt+B[2pu-2qt-pq] = 2q(2u-q)$; d'où $B=\dfrac{2q}{p}$, $B=\dfrac{q-2u}{t}$; les valeurs correspondantes de C sont $C=\dfrac{q^2}{p^2}$, $C=\dfrac{u}{t}\left(\dfrac{2u-q}{2u-p}\right)$.

1er Cas. $B=\dfrac{2q}{p}$, $C=\dfrac{q^2}{p^2}$; l'équation de la courbe devient $\left(y+\dfrac{q}{p}x\right)\left(y+\dfrac{q}{p}x-q\right)=0$; c'est le système de la droite BC et d'une droite parallèle passant par l'origine, et on sait qu'il y a alors une infinité de centres, situés sur la droite

$$2py + 2qx - pq = 0.$$

2e Cas. $B=\dfrac{q-2u}{t}$, $C=\dfrac{u}{t}\left(\dfrac{2u-q}{2t-p}\right)$; l'équation de la courbe devient :

$$\left.\begin{array}{l} t(2t-p)y^2-(2u-q)(2t-p)xy+u(2u-q)x^2- \\ \quad -qt(2t-p)y-pu(2u-q)x=0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

La nature de la courbe est déterminée par l'expression : $(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)$; c'est le produit des trois équations des côtés du triangle, ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC; la position du centre donne le signe de chaque facteur.

II. *Théorème*. Le lieu du centre d'une conique passant par trois sommets d'un triangle, et semblable à une conique donnée, est une ligne du quatrième ordre, touchant les trois côtés du triangle aux milieux de ces côtés.

Démonstration. La condition de similitude est exprimée

par la relation $(1+C-B\cos\gamma)=a\,(B^2-4C)$ (t. I, p. 495); a est une constante donnée positive si la conique donnée est une hyperbole, et négative si cette conique est une ellipse. Substituant pour B et C leurs valeurs en t et u, on aura

$$[t(2t-p)+u(2u-q)+(2u-q)(2t-p)\cos\gamma]^2=$$
$$=-a(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq),$$

ligne du quatrième degré, sans asymptotes; ce qui est évident à priori, puisque le centre ne saurait être l'infini, sans que la conique devienne une parabole. Si l'on fait $t=0$, on a pour u quatre valeurs; deux égales à $\frac{q}{2}$, et les deux autres sont $p\left(\cos\gamma\pm\sqrt{a}\right)$; ainsi ces deux dernières valeurs ne sont réelles que pour l'hyperbole; on parvient à des résultats analogues en faisant $u=0$, le second membre doit être essentiellement positif; ce qui facilite la discussion de la courbe qui est du premier genre (Euler, *Int. in anal. inf.*, t. II, p. 140).

Lorsque la conique donnée est un cercle, alors $a=-\sin^2\gamma$, la courbe doit se réduire à un point; je n'ai pu parvenir à mettre cette réduction en évidence.

III. *Problème.* Étant donnés deux points d'une conique, une droite tangente et le centre, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons la tangente pour axe des y, et la droite qui passe par les deux points fixes pour axe des x; soient toujours t et u les coordonnées du centre, quantités connues; remplaçant, dans l'équation générale de la conique, les six coefficients par leurs valeurs en k, k', l, l', n, elle prend cette forme (*v.* t. I, p. 490)

$$(k^2-ml)y^2-2(kk'+mn)xy+(k'^2-ml')x^2+$$
$$+2(k'l+kn)y+2(kl'+k'n)x+n^2-ll'=0,$$

l'axe des y étant une tangente, on a $l=0$; divisant toute l'équation par m^2, et faisant $\frac{k}{m}=t$, $\frac{k'}{m}=u$, et désignant $\frac{l'}{m}$ par λ et $\frac{n}{m}$ par n', l'équation générale prend cette forme :

$$t^2y^2-2(ut+n')xy+(u^2-\lambda)x^2+2tn'y+2(t\lambda+un')x+n''=0.$$

Posant $y=0$, on a les deux équations $t\lambda+un'=a(u^2-\lambda)$; $n''=b(u^2-\lambda)$, où a et b sont des quantités connues par les données de la question; d'où

$$\lambda=\frac{u(au-n')}{a+t},\quad u^2-\lambda=\frac{u(ut+n')}{a+t},\quad n''(a+t)=bu(ut+n'),$$

$$n'^2(a+t)+bun'=bu^2t,\quad n'=\frac{-bu\pm u\sqrt{b^2-4abt-4bt^2}}{2(a+t)},$$

remplaçant dans l'équation générale λ par sa valeur, il vient

$$\left.\begin{array}{l}(a+t)t^2y^2-2(a+t)(ut+n')xy+u(ut+n')x^2+\\+2t(a+t)n'y+2au(ut+n')\lambda+n''(a+t)=0,\end{array}\right\}\quad(2)$$

équation dont tous les coefficients sont connus; la discussion des deux valeurs de n ne présente aucune difficulté.

IV. *Problème.* Étant donnés deux points d'une conique, une droite tangente, et le rapport des axes principaux, trouver le lieu du centre.

Solution. Conservons la même notation; le rapport des axes étant connu, on a l'équation (t. I, p. 495)

$$\begin{array}{l}[(a+t)t^2+u(ut+n')+2(a+t)(ut+n')\cos\nu]^2=\\=4c(a+t)(ut+n')[aut+n'(a+t)],\end{array}$$

c est donnée; en mettant au lieu de n' sa valeur et faisant disparaître ensuite le radical, on parvient à une équation du douzième degré, qui est le lieu du centre.

V. *Problème.* Étant donnés, un point d'une conique, deux tangentes et le centre, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons les deux tangentes pour axes coordonnés, et soient x', y' les coordonnées du point donné, t et u celles du centre, on a ici $l = l' = 0$; et l'équation générale devient (III)

$$t^2y^2 - 2(ut+n')xy + u^2x^2 + 2tn'y + 2un'x + n'^2 = 0, \text{ ou } n' = \frac{n}{m},$$

le point (x', y') étant sur la conique, on a donc, pour déterminer n', l'équation

$$n'^2 + 2n'[ty' - x'y' + ux'] = -(ty' - ux')^2,$$

et

$$n' = x'y' - ty' - ux' \pm \sqrt{x'y'(x'y' - 2y't - 2ux' + 4ut)}.$$

Observation. Si l'un des trois facteurs qui sont sous le radical devient nul, alors n' est rationnel, et il n'y a qu'une seule solution.

VI. *Théorème*. Le lieu géométrique du centre d'une conique touchant deux droites fixes, passant par un point donné, et semblable à une conique donnée, est du huitième degré.

Démonstration. La condition de similitude donne

$$[t^2 + u^2 + 2(ut + n')\cos\gamma]^2 = 4cn'(2ut + n') \quad (\text{t. I, p. 495}),$$

mettant à la place de n' sa valeur et faisant disparaître le radical, on obtient une ligne du huitième degré, qui se réduit au quatrième degré lorsque n' est rationnel.

VII. *Problème*. Étant donnés le centre d'une conique, et trois tangentes, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons, deux de ces tangentes pour axes coordonnés, et soit $dy + ex + f = 0$, l'équation de la troisième tangente, on a donc $l = l' = 0$; la condition de tangence de la troisième droite est

$$-2den + mf^2 + 2fdk' + 2fek = 0 \quad (\text{t. II, p. 108}),$$

et divisant par m,

$$-2den'+f^2+2fdu'+2fet=0, \text{ d'où } n'=\frac{f^2+2fdu+2fet}{2de},$$

l'équation générale de la conique est donc (voir ci-dessus III),

$$t^2y^2-2(ut+n')xy+u^2x^2+2tn'y+2un'x+n'^2=0,$$

remplaçant n' par sa valeur, on obtient l'équation cherchée, l'espèce de la conique dépend de l'expression $n'(2ut+n')$.

VIII. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique touchant trois droites données et semblable à une conique donnée, est du quatrième degré.

Démonstration. La condition de similitude donne

$$[t^2+u^2+2(ut+n')\cos\gamma]^2=4cn'(2ut+n');$$

remplaçant n' par sa valeur (VII), on trouve une équation du quatrième degré sans asymptotes.

IX. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique passant par trois points donnés, et dont le rectangle des axes est donné, est une ligne du huitième degré.

Démonstration. Conservons la notation du problème I, la constance du rectangle des axes est exprimée par la relation $L^2=cm^3$; c est une constante (t. I, p. 493); rapportant L et m à l'équation (1), problème I, on a

$$L=AE^2-BDE+CD^2=ut(2t-p)(2u-q)$$
$$[(2pu+2qt-pq)(pu+qt-pq)-p^2q^2],$$
$$m=(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq).$$

Ainsi l'équation du lieu cherché est

$$u^2t^2[(2pu+2qt-pq)(pu+qt-pq)-p^2q^2]^2=$$
$$=c(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)^3,$$

ligne du huitième degré qui touche, aux points milieux, les côtés du triangle ABC.

X. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique qui passe

par deux points fixes, et touche une droite, et dont le rectangle des axes est constant, peut atteindre le trentième degré.

Démonstration. Adoptons la même notation que pour le problème III ; rapportant L et m à l'équation (2), il vient

$$L=4(a+t)(ut+n')[Nn'+a^2ut^3], \quad N=at^3+t^2(2b+3a^2)+4abt+b^2,$$
$$m=4(a+t)(ut+n')[aut+n'(u+t)],$$

et faisant disparaître les n'^2 à l'aide de la relation

$$n'^2(a+b)=bu(ut+n'),$$

faisant $n'=\dfrac{-bu+R}{a+t}$, où R représente le radical qui entre dans la valeur de n', on verra qu'en faisant disparaître le radical, l'équation peut s'élever au trentième degré.

(*La suite prochainement.*)

NOTE

Sur l'angle de contingence et sur l'angle de torsion.

—

I. Deux tangentes à une courbe plane ou à double courbure infiniment rapprochées forment quatre angles, dont deux sont aigus et infiniment petits, et deux autres obtus, différant infiniment peu de deux angles droits ; on nomme ordinairement angle de *contingence* celui de ces quatre angles qui ne renferme pas le petit arc de courbe. Le sinus de cet angle est évidemment égal au sinus de l'angle formé par les deux normales *principales* qui passent par les extrémités du petit arc. Si du sommet de cet angle comme centre on décrit une circonférence dans le plan de l'angle (plan osculateur), la longueur du petit arc intercepté est la mesure de l'angle, et, à cause de sa petitesse, cette longueur est aussi celle du

sinus de cet angle, ou du sinus de l'angle de contingence; désignant par ds', ds, R, le sinus ou l'arc de l'angle des deux normales, la longueur du petit arc de courbe, la longueur du rayon de courbure, on a $ds' = \frac{ds}{R}$, équation que l'on énonce ordinairement ainsi : l'angle de contingence est égal à la différentielle de l'arc divisée par le rayon de courbure; mais cette locution semble renfermer quelque chose d'indécis. Une quantité infiniment petite, une différentielle prise isolément, ne présente aucun sens. Nous croyons que les considérations suivantes, empruntées à la théorie infinitésimale de Newton, et dont nous avons déjà fait usage, sont propres à jeter quelque clarté sur ce point de doctrine.

II. Soit $f(x, y) = 0$, l'équation d'une première courbe plane, et $\varphi(x, y) = 0$, l'équation d'une seconde courbe, située dans le même plan. Par un point M pris sur cette seconde courbe, menons deux tangentes MP, MQ à la première courbe; P et Q sont les points de contact. Lorsque le point M se meut sur la seconde courbe, la corde PQ enveloppera une troisième courbe, et soit O le point où la corde PQ touche son enveloppe, prenons un point M' infiniment voisin de M, sur la seconde courbe, et concevons deux nouvelles tangentes M'P', M'Q'; PP' et QQ' sont deux arcs infiniment petits, et d'après un théorème de Newton (v. t. III, p. 580), l'on a $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{PM.OP}{QM.OQ}$; concevons par P et P' deux normales se rencontrant au point T, et de même en Q et Q' deux normales se rencontrant en U; ces points sont, comme on sait, les centres de courbure en P et en Q, et l'on a

$$\frac{\text{angle PTP}'}{\text{angle QUQ}'} = \frac{UQ}{TP} \cdot \frac{PP'}{QQ'} = \frac{UQ}{TP} \cdot \frac{PM.OP}{QM.OQ};$$

ainsi les angles de contingence en P et en Q, tous deux infi-

niment petits, ont donc entre eux un rapport fini, qui dépend de la nature de la seconde courbe que l'on peut prendre arbitrairement ; donc ce rapport est aussi arbitraire. On est convenu de prendre une seconde courbe telle que le rapport $\frac{PM.OP}{QM.OQ}$ soit constamment égal à l'unité ; ce qui répond au cas où la corde PQ soustend constamment un arc de même longueur ; alors on a aussi $\frac{PP'}{QQ'}=\frac{\text{angle } PTP'}{\text{angle } QOQ'}=\frac{OQ}{TP}$, c'est-à-dire qu'alors les angles de contingence sont en raison inverse des rayons de courbure.

III. On peut encore éclaircir ce qui précède par des considérations de mouvement. Supposons que la première courbe soit parcourue d'un mouvement uniforme par un point matériel avec une vitesse égale à l'unité. De sorte qu'en tous les points on aura $\frac{ds}{dt}=1$; à partir du centre de courbure T portons $TI=1$ sur le rayon de courbure TP, entre T et P ; concevons que le point I tourne avec la normale TP, pendant l'instant dt, autour du point fixe T ; la vitesse angulaire du point I sera $\frac{1}{PT}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{1}{PT}$; ainsi l'angle de contingence n'est autre que la vitesse angulaire du rayon de courbure autour du centre de courbure ; en général si on développe une courbe, de telle sorte que l'extrémité du fil ait une vitesse constante égale à l'unité, l'angle de contingence d'un point de la développante est la même chose que la vitesse angulaire du fil en ce point.

Lorqu'un point matériel est assujetti à décrire une ligne donnée, on sait que la pression en chaque point est représentée par le carré de la vitesse en ce point divisé par le rayon de courbure ; donc, si cette vitesse est égale à l'unité, la pression est représentée aussi par l'angle de contingence.

IV. *Angle de torsion*. Soit une figure polygonale plane ABCDEF;.. rendant fixe le côté AB, supposons que BC tourne autour de lui-même en se tordant d'un angle α, et entraîne avec lui le reste de la figure; alors le plan CDEF:.. fera avec le plan ABC un angle α; dans cette position, fixant CD, supposons que DE se torde d'un angle α' et entraîne le reste du polygone; alors le plan DEF... fera avec le plan BCD un angle de torsion α', et opérant ainsi successivement sur tous les côtés, on aura un polygone gauche, où trois côtés successifs seront toujours dans deux plans différents dont l'inclinaison dépend de l'angle de torsion; et réciproquement tout polygone gauche peut être conçu comme étant le résultat de la torsion d'un polygone plan. Si on remplace le polygone par une courbe plane et opérant d'une manière analogue, on obtiendra une courbe gauche; les plans des deux côtés successifs deviennent des *plans osculateurs*; chaque angle de torsion est évidemment infiniment petit; mais le rapport de deux angles de torsion est une quantité finie, qu'il est facile de déterminer. En effet, soit un point P pris sur une courbe gauche; par ce point passent trois droites déterminées de direction, savoir: 1° la tangente à la courbe; 2° la normale principale, ou celle qui se trouve dans le plan osculateur; 3° une perpendiculaire à ce plan; prises deux à deux, ces droites forment trois plans, lesquels, considérés pour tous les points de la courbe, ont pour enveloppe trois surfaces développables se coupant orthogonalement. Le plan déterminé par la première et la troisième droite coupe sa surface enveloppe correspondante suivant une courbe plane, dont deux normales infiniment voisines sont perpendiculaires à deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe gauche; donc l'angle de contingence de la courbe plane mesure l'angle de torsion de la courbe gauche, et nous savons que cet angle de contingence est mesuré par la

valeur réciproque du rayon de courbure de la courbe plane qu'on peut appeler le rayon de torsion de la courbe gauche; ainsi ce genre de ligne a une courbure qu'elle partage aussi avec les courbes planes, et qui consiste dans le changement incessant de direction des tangentes, et une autre courbure qui résulte de la torsion ou du changement incessant de direction des plans osculateurs; c'est ce qui a fait donner à ces lignes le nom de courbe à double courbure, qu'on doit à l'académicien Pitot.

Dans le cas actuel, la courbe à double courbure, d'après le théorème de M. Dupin, est une ligne de courbure dans chacune des trois surfaces développables. Tm.

THÉORÈME SUR L'ELLIPSE.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

La bissectrice de l'angle que font entre elles deux tangentes à une ellipse, est aussi bissectrice de l'angle qu'on forme en joignant leur point de concours aux foyers.

Fig. 23. Soient CT, CT' deux tangentes à une ellipse dont les foyers sont F, F'. On sait qu'en menant F'T, F'T', et prolongeant ces lignes de quantités TM = TF, T'M' = T'F, les points M et M' sont les intersections de deux cercles ayant leurs centres en F' et en C, et pour rayons le grand axe de l'ellipse ou F'M, et CF. Il en résulte que F'C divise en deux parties égales l'angle MCM', et par suite MCF — FCM' = 2FCF'. Mais les tangentes CT, CT' sont bissectrices des angles MCF, M'CF, donc TCF — FCT' = FCF', et par conséquent TCF' = FCT'. La bissectrice de l'angle FCF' divisera donc aussi en deux parties égales l'angle TCT'.

Corollaire I. Si on imagine une nouvelle ellipse passant par le point C, et ayant aussi F et F′ pour foyers, sa normale en C sera la bissectrice de l'angle FCF′, donc les deux tangentes CT, CT′ seront également inclinées sur la tangente au point C à la seconde ellipse.

Corollaire II. La bissectrice de l'angle FCF′ divisera en deux parties égales tous les angles que forment les couples de tangentes menées par le point C à des ellipses ayant F et F′ pour foyers. Deux tangentes d'un même couple sont également inclinées sur celles d'un autre couple quelconque.

Corollaire III. Pour mener une seconde tangente à une ellipse par un point C pris sur une première tangente tracée CT, il suffit de joindre CF′, CF, et faire avec cette dernière ligne un angle égal à F′CT.

THÉORÈMES A DÉMONTRER

Et questions à résoudre sur la théorie des équations et des coniques.

PAR M. LEBESGUE.

—

L'équation $x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots \pm A_m = 0$, multipliée par x^{n-m}, conduit tout de suite à

$$\int_n - A_1 \int_{n-1} + A_2 \int_{n-2} \ldots \pm A_m \int_{n-m} = 0, \qquad (a)$$

en représentant par $\int_a$ la somme des a^e puissances des m racines.

Démontrer pour le cas de n entier positif ou négatif : 1° que tous les termes du groupe $\int_n$ sont détruits par une partie des termes du groupe $A_1 \int_{n-1}$, que les termes restants de ce groupe sont détruits par une partie des termes du groupe suivant $A_2 \int_{n-2}$ et ainsi de suite. 2° Montrer que pour

le cas de n positif $< m$, le groupe $A_n S_0$ de mA_n étant décomposé en $nA_n + (m-n)A_n$, l'équation (a) se partagera en deux

$$S_n - A_1 S_{n-1} + A_2 S_{n-2} \ldots \pm A_{n-1} S_1 \mp nA_n = 0,$$
$$(m-n)A_n - A_{n+1} S_{-1} + A_{n+2} S_{-2} - \ldots \pm A_m S_{-(m-n)} = 0.$$

L'équation (a) peut-elle conduire à quelques conséquences utiles pour le cas des puissances fractionnaires?

Théorèmes et problèmes sur l'ellipse.

(On les étendra à l'hyperbole).

I. Trouver la distance p d'une normale à l'ellipse au centre de cette courbe.

II. La distance maximum est $a - b$, en représentant par a et b les demi-axes.

III. Toute autre distance p répond à deux normales (on ne considère qu'un quart d'ellipse).

Ces normales, et les points de l'ellipse par lesquels on les mène, peuvent être dits *associés*.

IV. Un certain point est associé à lui-même, il répond à la distance maximum.

Les propositions précédentes conduisent à la construction de Fagnano pour les arcs d'ellipse à différence rectifiable, et montrent qu'elle n'est qu'un cas particulier des belles constructions de M. Chasles.

NOTE SUR UN TRIPLE EMPLOI.

Nous nous sommes rappelé trop tard que le théorème de M. Poncelet, traité ci-dessus par M. Jubé, a déjà été démontré par M. Gérono d'une manière absolument semblable (t. III, p. 499), et encore t. II, p. 538. Il devient de plus en plus nécessaire de consulter les tables du Journal, si bien détaillées par M. le professeur Anne.

NOTE

Sur les nombres associés; généralisation du théorème de Wilson.

PAR M. E. PROUHET,
Professeur au collége royal d'Auch.

1. Deux entiers a et a' inférieurs et premiers à P sont dits *associés* par rapport à ce dernier nombre, lorsque le produit est de la forme $\dot{P}+1$. En général a' est différent de a; mais lorsque $a=1$, ou $P-1$, l'associé de a est le nombre a lui-même, et on a l'égalité

$$a^2=\dot{P}+1.$$

Les nombres qui jouissent de cette propriété pourraient être nommés *associés doubles*, par rapport à P. Notre principal but, dans cette note, est de rechercher combien il y a d'associés doubles pour chaque valeur attribuée à P, ou, en d'autres termes, combien il y a d'entiers moindres que P propres à satisfaire à la relation

$$(1) \qquad x^2-1=\dot{P}.$$

I.

2. Nous supposerons d'abord P impair, et égal au produit de deux nombres A et B premiers entre eux. On satisfera à la relation (1) en posant

$$x-1=\dot{A}, \quad x+1=\dot{B}.$$

C'est-à-dire en prenant pour x un nombre à la fois $\dot{A}+1$

et $\dot{B}-1$; nous savons qu'il existe toujours un nombre moindre que AB et remplissant ces deux conditions (*).

On pourra encore prendre x à la fois $\dot{A}-1$ et $\dot{B}-1$; ce qui donnera un second associé double, différent du premier; puisque les deux nombres $x-1$ et $x+1$, dont la différence est 2, ne peuvent pas avoir de facteur commun impair.

Ainsi chaque manière de décomposer P en deux facteurs premiers entre eux donne lieu à deux associés doubles.

On n'a pas à craindre qu'un autre mode de décomposition donne les mêmes associés. Car, soit encore $P=A'B'$. Si l'on avait en même temps :

$$x-1=\dot{A},\quad x+1=\dot{B}:$$
$$x-1=\dot{A}',\quad x+1=\dot{B}',$$

A' devrait être premier avec B, et B' avec A, d'après la remarque faite plus haut. Donc, puisque $AB=A'B'$, A' devrait diviser B, et de même B' devrait diviser A; ce qui ne peut avoir lieu; à moins que $A'=B$, $B'=A$, ou que les deux modes de décomposition soient identiques, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc.

Il y a deux fois *autant d'associés doubles par rapport à un nombre* impair P, *qu'il y a de manières de décomposer* P *en deux facteurs premiers entre eux*.

II.

3. En second lieu, supposons $P=2^{m}A.B$, A et B étant deux nombres impairs premiers entre eux, et m étant *au moins égal* à 2.

Si l'un des deux facteurs $x-1$, $x+1$ est pair, il en sera de même de l'autre. On satisfera donc à la relation (1) en dosant

$$x-1=(\dot{\overline{2^{m-1}A}}),\quad x+1=\dot{B},$$

(*) Voir tome IV, p. 75, lemme I.

ou en prenant x à la fois $(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})+1$ et $\dot{B}-1$: or il existe *deux* nombres moindres que $2(^{m-1}A.E)$, et remplissant ces deux conditions.

On peut encore prendre pour x un nombre à la fois $(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})-1$ et $\dot{B}+1$, ce qui donne deux associés doubles. On démontrerait comme plus haut, qu'ils sont différents des premiers.

Ainsi chaque manière de décomposer P en deux facteurs premiers entre eux, donne lieu à quatre associés doubles.

4. Voyons maintenant si les associés doubles provenant des deux décompositions $P=2^mA.B$ et $P=2^mA'.B'$ ne peuvent pas être les mêmes. Pour qu'une pareille circonstance se présente, il faut que le nombre x soit dans l'un des quatre cas suivants :

$$\text{I. } x-1=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A'}}),\ x+1=\dot{B}=\dot{B}'$$

$$\text{II. } x-1=\dot{B}=\dot{B}',\ x+1=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A'}})$$

$$\text{III. } x-1=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})=\dot{B}',\ x+1=\dot{B}=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A'}})$$

$$\text{IV. } x-1=\dot{B}=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A'}}),\ x+1=(\overset{\cdot}{\overline{2^{m-1}A}})=\dot{B}'$$

Mais comme $x-1$ et $x+1$ n'ont pas de facteur commun autre que 2, les deux premiers cas ne peuvent se présenter ; et les deux derniers cas n'ont lieu que si on a simultanément : $m=2$, $A=B'$, $B=A'$.

Ainsi ce n'est que dans le cas de $m=2$ que deux modes de décompositions ($P=4A.B$, $P=4B.A$), donnent les mêmes associés. Donc

Suivant que $\frac{P}{4}$ est impair, *ou* pair, *il y a* deux fois *ou* quatre fois *autant d'associés doubles, par rapport à* P, *qu'il y a de manières de décomposer* P *en deux facteurs premiers entre eux*.

5. Nous avons laissé de côté le cas où $m = 1$, c'est-à-dire où P est double d'un nombre impair, parce que les raisonnements précédents ne sont plus applicables. En effet, on ne peut alors satisfaire à la relation (1) qu'en posant

$$x - 1 = \dot{(2A)}, \quad x + 1 = \dot{B}$$

ou bien

$$x - 1 = \dot{B} \quad , \quad x + 1 = \dot{\overline{2A}}$$

ce qui donne seulement deux associés doubles. En outre, les associés doubles provenant des deux décompositions $P = 2A.B$ et $P = 2B.A$ sont évidemment les mêmes. Donc,

Il y a autant d'associés doubles, par rapport à un nombre P *double* d'un nombre impair, *qu'il y a de manières de décomposer* P *en deux facteurs premiers entre eux.*

III.

6. Désignons par ν le nombre des associés doubles par rapport à P ; par K le nombre des facteurs premiers inégaux de P. On sait que 2^{k-1} indique de combien de manières on peut décomposer P en deux facteurs premiers entre eux (*). On aura donc d'après les n°s 2, 4, 5,

$\nu = 2^k$ si P *est impair.*

$\nu = 2^{k-1}$ si P *est double d'un nombre impair.*

$\nu = 2^k$ si P *est quatre fois un nombre impair.*

$\nu = 2^{k+1}$ si P *est quatre fois un nombre pair.*

7. Ces formules font voir que si P est une puissance ou le double d'une puissance d'un nombre premier impair, il n'y a que deux associés doubles, qui sont : 1, P—1.

Si $P = 2^m$, m étant supérieur à 2, il y a quatre associés doubles, qui sont :

$$1, \quad 2^{m-1} \quad 1, \quad 2^{m-1}+1, \quad 2^m - 1.$$

(*) Legendre, Théorie des nombres, t. I, p. 13.

IV.

8. Désignons par P_e le produit de tous les nombres inférieurs et premiers à P, et cherchons le reste de la division de P_e, par P.

Les nombres inférieurs et premiers à P, à l'exception des associés doubles, se groupent par couples dont le produit est de la forme $\dot{P}+1$, le produit de tous ces couples sera donc de même forme. Ainsi le reste de P_e dépendra du produit de tous les associés doubles.

Pour trouver ce dernier reste, je remarque d'abord que si a est associé double, il en est de même de $P-a$, car on a

$$(P-a)^2 = \dot{P} + a^2 = \dot{P} + 1,$$

et ensuite, que

$$a(P-a) = \dot{P} - a^2 = \dot{P} - 1.$$

Les associés doubles se groupent donc par couples dont le produit est de la forme $\dot{P}-1$. Par conséquent le produit des associés doubles sera $\dot{P}+1$ ou $\dot{P}-1$, suivant que le nombre de ces couples sera *pair* ou *impair*; c'est-à-dire suivant que ν sera ou ne sera pas divisible par 4.

Donc, si on se rappelle les valeurs de ν trouvées plus haut, on en déduira le théorème suivant :

Le produit de tous les nombres inférieurs et premiers à P, *est de la forme* $\dot{P}+1$, *excepté lorsque* P *est une puissance d'un nombre premier, ou le double d'une puissance d'un nombre premier.* Dans ce dernier cas, le produit en question est de la forme $\dot{P}-1$.

On voit que cet énoncé comprend le théorème de *Wilson*, déjà démontré dans ce recueil, par des considérations analogues. (Voir t. II, p. 193).

Note. Nous possédons depuis longtemps une démonstration du théorème de *Wilson*, généralisée et fondée sur la doctrine

des résidus quadratiques de Gauss (*Disquisitiones*, sect. IV), nous la donnerons avec l'exposition de cette doctrine dont les théorèmes de M. Prouhet sont aussi des conséquences. Il en est de même de la démonstration que M. Poinsot vient de publier récemment dans le journal de M. Liouville (janvier et février 1845), dont celle de M. Prouhet ne diffère pas essentiellement. Tm.

THÉORIE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.)

(Fin, voir p. 109, 161 et 213.)

33. Il y a cette différence essentielle entre ces deux espèces de nombres, que l'idée claire et précise que nous avons des nombres rationnels, nous donne la facilité de les représenter par des signes et de les désigner par des noms, dont on est convenu de se servir pour cela; tandis que nous ne pouvons avoir aucune idée précise des nombres irrationnels, quoiqu'il y en ait quelques-uns auxquels on a affecté des noms et des signes, d'après les relations que l'on concevait entre eux et certains nombres rationnels. Il est toujours facile, au reste, de trouver des nombres rompus qui approchent d'aussi près qu'on le veut de tous les nombres irrationnels qu'on peut être dans le cas de vouloir déterminer, et qu'on est dans l'usage d'employer à la place de ces irrationnels; on n'obtient à la vérité par là qu'une valeur approchée des grandeurs qu'on détermine par ce moyen, mais cet inconvénient n'est d'aucune conséquence dans l'application du calcul aux arts, aux sciences et aux besoins de la société, l'exactitude rigoureuse y étant si peu nécessaire, qu'on a coutume, dans la seule vue de simplifier les opérations du calcul, de ne se

servir que de valeurs approchées, même pour les nombres rationnels, lorsque les valeurs exactes de ceux-ci seraient trop compliquées, ou sous une forme peu commode à l'exécution de ces opérations.

La quatrième espèce de nombres, a dû sa naissance à la perfection que le calcul a acquise depuis quelques siècles. On ne peut douter cependant que les anciens n'aient fait quelquefois l'espèce de comparaison dont elle est le résultat, puisqu'il nous arrive assez souvent de la faire dans le cours de la conversation, mais comme c'est moins une espèce de nombres, absolument différents de ceux dont nous avons parlé jusqu'à présent, qu'une modification particulière dont ils sont tous susceptibles, ils se servaient des mêmes noms pour les exprimer, en indiquant cette modification par le reste de la phrase; et n'ayant pour les désigner aucun nom, ni aucun signe particulier, ils ne les distinguaient point des autres nombres; on ne s'est avisé de cette distinction qu'après avoir établi un signe pour les désigner, et ce ne sont que les progrès ultérieurs du calcul qui ont fait sentir combien elle était indispensable pour lui donner la généralité et l'uniformité sans lesquelles il n'aurait jamais approché du degré de perfection où il est aujourd'hui porté Il est même très-digne de remarque, que l'idée de cette distinction est très-postérieure à l'invention de ce signe qui avait d'abord une signification absolument différente, mais qu'on a changée insensiblement comme il arrive dans toutes les langues, au sens attaché à une foule de mots, pour lui faire exprimer une idée qui manquait de signes par cela même que la distinction sur laquelle elle repose, n'avait été saisie que lorsque le calcul eut faits de grands progrès; il parait même qu'elle ne l'a été que très-imparfaitement par les auteurs de nos livres élémentaires, qui ont tous donné d'abord à ce signe sa signification primitive, pour la modifier ensuite successivement, ce qui a jeté sur

les principes du calcul une sorte d'obscurité, que je me suis efforcé de dissiper, en présentant ici le sens attaché à ce signe sous un point de vue absolument différent, et conforme à l'usage qu'on en fait réellement dans toutes les opérations du calcul.

L'espèce de comparaison dont nous allons tirer l'idée de cette nouvelle sorte de nombres n'est pas seulement nécessaire à cet objet, on verra dans le premier livre de cet ouvrage, que ce n'est que d'elle qu'on peut tirer une définition précise des relations existantes entre différents nombres qui servent de base à toutes les règles fondamentales du calcul (*), définition d'autant plus importante, qu'il serait presque impossible de rendre raison sans elle d'une partie de ces règles, et surtout des modifications qu'elles éprouvent, lorsqu'après les avoir appliquées au calcul des nombres entiers, on passe successivement à celui des autres espèces de nombres.

Cette sorte de comparaison diffère de toutes les autres en ce qu'au lieu de comparer entre elles les grandeurs elles-mêmes, on ne compare que les inégalités qui peuvent exister entre deux grandeurs et qui, comme nous l'avons déjà dit, doivent être rangées dans la classe des grandeurs qui résulte de la comparaison de deux objets, il est évident que celle de deux inégalités suppose nécessairement quatre grandeurs, homogènes deux à deux, pour qu'il puisse exister entre elles deux inégalités. Et comme dans l'explication que nous allons en donner, il faudra en parler sans cesse sans risquer de les confondre ; je crois qu'il est à propos pour éviter au lecteur

---

(*) Toutes ces règles sont fondées sur deux relations principales existantes entre les nombres, par lesquelles des nombres étant donnés, ils en déterminent deux autres : l'un qu'on appelle leur somme, et l'autre leur produit. Tous les auteurs élémentaires, au lieu d'en présenter l'idée sous le point de vue le plus général, en ont tiré les premières définitions du cas le plus particulier, celui des nombres entiers, et cette idée étant dès lors absolument incomplète a semblé en contradiction avec celle qu'il fallait se former de la somme et du produit, relativement aux autres nombres ; telle est la source de l'obscurité dont j'ai parlé tout à l'heure et que j'ai surtout cherché à éviter.

l'ennui et l'embarras des longues périphrases, de désigner ces quatre grandeurs, comme les mathématiciens et quelques métaphysiciens désignent les objets dont ils traitent, je veux dire par les lettres de l'alphabet.

Soient donc, A et B, deux grandeurs de même espèce entre lesquelles on suppose une inégalité quelconque; C et D, deux grandeurs aussi homogènes entre elles, qui peuvent indifféremment être ou ne pas être de l'espèce des deux premières A et B, et qui déterminent une seconde inégalité ; la comparaison de ces deux inégalités, ne pourra plus éprouver aucune difficulté dès qu'on se sera fait une idée juste de ce qu'on doit précisément entendre par deux inégalités de même valeur. Le seul cas où cette idée n'ait pas besoin d'éclaircissement est celui où A est égal à C, car il est clair qu'il faut alors que B le soit aussi à D, pour que l'inégalité de A et de B soit la même que celle de C et de D.

Dans tout autre cas on ne peut se faire une idée bien nette de cette identité de valeurs, qu'en considérant la plus petite des deux grandeurs A et B, comme égale à une portion de la plus grande et de la plus petite des deux grandeurs C et D, sous le même point de vue relativement à la plus grande. Le changement par lequel les deux plus grandes seraient respectivement réduites à la même valeur que les deux plus petites, consiste alors dans une opération par laquelle on en détruit ou du moins on en sépare la portion restante, et comme cette opération détermine évidemment l'inégalité qui se trouve entre les deux grandeurs qu'elle ramène à l'égalité, on s'assurera que l'inégalité de A et de B, est la même que celle de C et de D, lorsque cette opération sera précisément la même dans les deux cas.

Si l'on ne considère dans ces deux opérations que la portion retranchée, elle sera dans la première homogène à A et à B, dans la seconde à C et à D, on ne pourra donc comparer les

inégalités déterminées de cette manière, que dans le cas où les quatre grandeurs seraient de même nature.

Il y a une autre manière de considérer la même opération qui paraît moins simple et moins naturelle, mais qui a l'avantage de permettre la comparaison des deux inégalités, soit que les deux grandeurs homogènes A et B, soient ou ne soient pas de même nature que C et D, et qui est d'ailleurs le seul moyen d'établir des relations entre des grandeurs hétérogènes, en ne comparant d'abord, à la vérité, que des homogènes, mais en comparant ensuite les résultats de ces premières comparaisons.

Cet autre moyen de se faire une idée précise de l'opération, par laquelle nous pourrions séparer (*), de la plus grande de deux grandeurs, les parties qu'elle a de plus que l'autre, consiste à la partager en un certain nombre de parties égales, et à prendre ensuite un nombre déterminé de ces parties pour en former une réunion égale à la plus petite. Pour que l'inégalité de A et de B, considérée de cette manière, soit égale à celle de C et de D, il est évident d'après la définition que nous avons donné du nombre que celui qui exprime la manière d'être respective des deux premières grandeurs, soit le même que celui qui détermine celle des deux dernières.

Il ne faut pas croire que ces deux manières de considérer les inégalités donnent les mêmes résultats quand il s'agit de les comparer, il est aisé de voir, au contraire, que deux inégalités peuvent très-bien avoir la même valeur quand on les

(*) Au lieu de déterminer ainsi l'inégalité de deux grandeurs, par la diminution qu'il convient de faire éprouver à la plus grande, pour qu'elle devienne égale à la plus petite, j'aurais pu considérer l'augmentation que celle-ci devrait éprouver pour devenir égale à la plus grande, mais la première m'a paru plus aisée à comprendre comme plus analogue à l'action physique que nous pouvons exercer sur les objets dont nous sommes environnés, qui nous donne le moyen d'en détruire ou d'en séparer quelques parties, plutôt que celui d'en ajouter de nouvelles.

considère sous un de ces deux points de vue, et des valeurs très-différentes sous l'autre. C'est pourquoi il en résulte, comme on le verra plus en détail dans le livre deux, une double sorte de calcul fondée sur les mêmes opérations, mais absolument différente dans ses résultats. Ce sont les conditions particulières à chaque question qui déterminent la manière dont il faut comparer les inégalités qui se trouvent entre les grandeurs dont on s'occupe; pour éclaircir ce que je viens de dire, prenons des exemples simples et familiers à tout le monde. Supposons d'abord que A et B soient les âges de deux hommes, à une certaine époque; D et C leurs âges à une autre époque : il est évident que l'inégalité, considérée sous le premier point de vue, sera la même dans les deux cas, puisqu'elle dépend toujours seulement de l'intervalle de temps qui s'est trouvé entre la naissance de l'un et celle de l'autre; maintenant si A et B désignent les longueurs de deux pièces d'une même étoffe, C et D, leurs prix, il devra encore y avoir la même inégalité entre A et B, qu'entre C et D, mais les deux premières grandeurs n'étant pas homogènes aux deux autres, ces deux inégalités ne pourront être comparées qu'en les considérant comme déterminées par des nombres.

C'est dans la comparaison de deux inégalités de même valeur, d'après les définitions précédentes, que l'on retrouve l'idée du nombre *un*, telle que nous l'avions déduite de la comparaison des grandeurs mêmes. Voyons comment on peut retrouver, dans celle de deux inégalités de valeurs différentes, tous les autres nombres, dont nous avons déjà parlé pour déterminer d'abord deux changements, dont la comparaison donne pour résultats les nombres entiers deux, trois, quatre, etc.; et leurs réciproques : demi, tiers, quart, etc. Il suffit de concevoir que la même opération qui, exécutée sur la grandeur C, a produit une nouvelle grandeur D, dont la différence à C soit la même que celle qui se trouve

entre A et B, soit répétée d'abord sur la grandeur D, et en produise une nouvelle E ; ensuite sur cette grandeur E et en produise une nouvelle F, et ainsi de suite, car il est évident que l'inégalité qui se trouvera alors entre C et E, comparée à celle de A et B, donnera le nombre deux, que celle qui se trouvera entre C et F....

Table de l'introduction.

Note. Le manuscrit finit à l'article 33, qui devait servir à expliquer l'origine de la distinction entre les nombres positifs et négatifs. L'illustre auteur cite le livre premier et le livre second de l'ouvrage, auquel le manuscrit sert d'introduction.

Nous reproduirons quelques fragments de cet ouvrage, déjà publiés dans la correspondance mathématique de M. Quetelet, et tout ce qu'on voudra bien nous communiquer.

Tm.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Au concours d'agrégation 1842 (V. tom. 3, p. 517).

Étant donnée une série de paraboles qui ont même axe et même foyer, déterminer les courbes qui coupent ces paraboles à angle droit.

Déterminer les courbes qui coupent à angle droit une série d'ellipses de mêmes foyers.

PAR M. ARMAND FARCY,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

—

1. La parabole, rapportée à son sommet, a pour équation connue $y^2=2px$. Cette équation devient, en portant l'origine au foyer : (1) $y^2=2px+p^2$.

Telle est donc, en supposant indéterminé le paramètre $2p$, l'équation collective de toutes les paraboles de même axe et de même foyer.

En un point x, y de l'une d'elles, la direction de la tangente est donnée par le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$ que

l'on peut exprimer en fonction seulement des coordonnées du point, en tirant de l'équation (1) la valeur du demi-paramètre $p=-x\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Ce qui donne :

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Au même point, x, y, doit passer une des trajectoires orthogonales demandées, et son coefficient différentiel y doit être : $\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{y}{x\mp\sqrt{x^2+y^2}}$ (3), c'est-à-dire que telle est l'équation différentielle des courbes cherchées. Pour l'intégrer nous passerons aux coordonnées polaires : c'est une marche dont l'à-propos est indiqué par l'homogénéité de l'équation, et par la présence du seul radical $\sqrt{x^2+y^2}$. Posant donc : $y=\rho\sin\omega$ $x=\rho\cos\omega$; d'où il résulte successivement : $dy=\sin\omega d\rho+\rho\cos\omega d\omega$, $dx=\cos\omega d\rho-\rho\sin\omega d\omega$;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\omega\frac{d\rho}{d\omega}+\rho\cos\omega}{\cos\omega\frac{d\rho}{d\omega}-\rho\sin\omega}$$; il viendra en substituant dans (3)

$$\frac{\sin\omega\frac{d\rho}{d\omega}+\rho\cos\omega}{\cos\omega\frac{d\rho}{d\omega}-\rho\sin\omega}=\frac{\sin\omega}{\cos\omega\mp1},$$ qui devient en simplifiant :

$\frac{d\rho}{d\omega}=\pm\frac{\rho(1\mp\cos\omega)}{\sin\omega}$, ou bien $\frac{d\rho}{\rho}=\pm\frac{1\mp\cos\omega}{\sin\omega}d\omega$ (4).

Par la correspondance des signes, cette équation se partage en ces deux autres : $\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}d\omega$, $\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{\cos\frac{1}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}d\omega$, qui donnent respectivement étant intégrées $\rho=\frac{A}{\cos^2\frac{1}{2}\omega}$, $\rho=\frac{A}{\sin^2\frac{1}{2}\omega}$, intégrales que l'on peut aisément, par l'emploi d'un double signe, réunir en une seule $\rho=\frac{p'}{1\pm\cos\omega}$, p' représentant une constante arbitraire double de celle désignée par A.

L'équation polaire, collective, des trajectoires demandées est donc $\rho = \frac{p'}{1 \pm \cos \omega}$, équation d'une parabole rapportée à son axe et à son foyer, donnée d'ailleurs tout entière par un seul des deux signes. On reconnaît par là que les paraboles proposées, c'est-à-dire ayant l'axe et le foyer donnés, se partagent en deux systèmes : celles ouvertes d'un côté, et celles ouvertes de l'autre, et que toutes celles d'un système coupent toutes celles de l'autre à angle droit.

II. Cette propriété pouvait être reconnue à priori, car 1° l'équation (2) fournissant deux valeurs toujours réelles de $\frac{dy}{dx}$, c'est qu'en chaque point du plan se croisent deux paraboles ayant l'axe et le foyer voulus, mais leurs coefficients différentiels respectifs $\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ et $\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, ont pour produit -1, elles se croisent donc à angle droit, etc... L'équation (2), équation différentielle des paraboles données, devient d'ailleurs en faisant disparaître le radical : $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - y^2 = 0$, ou bien $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$, et sous cette forme, le dernier terme -1, montre encore qu'en chaque point passent deux courbes qui s'y coupent à angle droit.

2° Soient deux paraboles de sens contraires, ayant l'une et l'autre l'axe et le foyer voulus, et se coupant en M ; leurs tangentes en M coupant respectivement l'axe commun en T et T' aux distances FT et FT' du foyer commun F, on sait que FM est égale d'une part à FT, d'autre part à FT', par suite le triangle TMT' est rectangle en M, etc. Ou bien si on mène par le point commun M la droite AA' perpendiculaire commune aux directrices des deux paraboles, les

deux tangentes bissectrices, comme on sait, des angles supplémentaires adjacents AMT, A'MT' seront perpendiculaires entre elles, C.Q.F.D.

III. Généralement soit $F(x, y, a)$: A une famille de courbes, pour en trouver les trajectoires orthogonales, il faudra manifestement en tirer, comme dans l'exemple précédent $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ d'abord fonction de x, y, a. Puis seulement de x, y ; soit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi(x, y)$; puis en conclure $\left[\frac{dy}{dx}\right] = -\frac{1}{\varphi(x, y)}$, équation différentielle des trajectoires.

Mais si de $F(x, y, a)$ on ne peut, ou ne veut pas tirer explicitement $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, et qu'on soit seulement parvenu à la relation non-résolue $f\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$, il suffira d'y remplacer $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ par $-\frac{1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]}$, pour obtenir l'équation différentielle des trajectoires que nous désignerons par

$$\varphi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0.$$

Si donc il arrive que $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, qui n'est d'ailleurs autre chose que l'équation différentielle des lignes données, soit une équation *inversement réciproque* (*), le changement de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ en $-\frac{1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]}$, fait retomber sur cette

(*) Nous nommons ainsi toute équation qui, admettant la racine α, admet nécessairement celle $\frac{-1}{\alpha}$, en d'autres termes, celle dont les racines font deux à deux le produit -1. Les caractères propres de ces équations sont étudiés dans tous les cours d'éléments.

même équation, et la famille donnée renferme en elle-même comme ci-dessus, ses trajectoires orthogonales. Pour en citer un exemple aussi connu que remarquable : c'est ce qui a lieu sur une surface pour ses lignes de courbure.

IV. L'ellipse rapportée à son centre et à ses axes a pour équation connue $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ (5). Si l'on y suppose a et b indéterminés sous la seule condition $a^2-b^2=c^2$ (6), elle convient alors à toutes les ellipses confocales.

En un point x, y, de l'une d'elles, la direction de la tangente est donnée par le coefficient différentiel $\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{b^2x}{a^2y}$ (7). L'élimination de a^2 et de b^2 entre les relations (5), (6), (7), donne d'abord : $\left[y-x\frac{dy}{dx}\right]\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]+c^2\frac{dy}{dx}=0$, puis en développant : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{c^2+y^2-x^2}{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right)-1=0$ (8).

Équation différentielle des ellipses proposées. Il suffirait, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, d'y remplacer $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, pour avoir l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales ; mais l'équation (8) étant inversement réciproque, convient en même temps et aux courbes proposées, et à leurs trajectoires orthogonales. Cependant comme des ellipses confocales ne sauraient se rencontrer, il est aisé d'apercevoir qu'elles ont pour trajectoires orthogonales les hyperboles de même foyer. (*V.* t. III, p. 425).

En effet, ces hyperboles ont pour équation collective : (5') $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$. Sous la condition (6') $a^2+b^2=c^2$, et pour coefficient différentiel : (7') $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{b^2x}{a^2y}$. Ces trois relations (5'), (6'), (7'), ne différant de celles (5), (6), (7), que par le signe de b^2, l'élimination de a^2 et de $-b^2$ entre

(5'), (6') et (7') donnera comme celle de a^2 et de b^2 entre (5), (6), (7), la relation (8) qui est ainsi l'équation différentielle non-seulement des ellipses, mais plus généralement des coniques confocales, et ces coniques se partagent en deux groupes, celui des ellipses, et celui des hyperboles qui sont réciproquement les trajectoires orthogonales les unes des autres.

Il est d'ailleurs facile de justifier cette propriété par des considérations géométriques comme nous l'avons fait pour les paraboles; car soient F, F' les deux foyers communs, et M un point où se croisent une des ellipses et une des hyperboles, leurs tangentes en M étant bissectrices l'une de l'angle FMF', l'autre de son adjacent supplémentaire, sont perpendiculaires entre elles, C.Q.F.D.

V. En représentant par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left[\frac{dy}{dx}\right]$, les valeurs des coefficients différentiels respectifs de deux courbes en un point commun, la condition connue pour qu'elles se coupent à angle droit, est que $\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left[\frac{dy}{dx}\right] + 1 = 0$. Cette condition se retrouve à peu près sous la même forme dans un système de coordonnées polaires. En effet soient alors $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ et $\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]$, les nouveaux coefficients différentiels; les courbes font avec le rayon vecteur mené au point commun des angles qui ont respectivement pour tangentes trigonométriques $t = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)}$, $t' = \frac{\rho}{\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]}$, et si l'on veut que ces courbes soient perpendiculaires l'une à l'autre, l'un de ces angles doit surpasser l'autre de 90°, d'où résulte, comme en coordonnées rectangulaires, la condition $tt' + 1 = 0$, ou bien :

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right) \left[\frac{d\rho}{d\omega}\right] + \rho^2 = 0.$$

Telle est donc la relation générale de laquelle on peut tirer l'équation différentielle en coordonnées polaires des trajectoires orthogonales, une fois connu le coefficient différentiel des courbes primitives en coordonnées polaires. Si l'on a seulement l'équation différentielle des courbes primitives : $F\left(\rho,\ \omega,\ \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)\right)=0$, il suffit d'y remplacer $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ par $-\frac{\rho^2}{\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]}$, pour passer à celle des trajectoires, et si, par cette transformation, on retombe sur l'équation $F\left(\rho,\ \omega,\ \left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]\right)=0$, c'est que, comme dans le cas des coniques confocales, le système de courbes proposé renferme en lui-même ses trajectoires orthogonales. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que toutes les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tirée de $F=0$, fassent deux à deux un produit $-\rho^2$.

Ainsi les paraboles confocales ont pour équation collective en coordonnées polaires : $\rho=\frac{-p}{\cos\omega\pm1}$, (9), d'où

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)=\frac{-p\sin\omega}{(\cos\omega\pm1)^2}=\frac{\rho\sin\omega}{\cos\omega\pm1}, \qquad (10)$$

par suite dans leurs trajectoires orthogonales

$$\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]=\frac{-\rho(\cos\omega\pm1)}{\sin\omega}=\frac{\rho\sin\omega}{\cos\omega\mp1}, \quad (11)$$

et cette coïncidence des valeurs de $\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]$ avec celles de $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ démontre encore la propriété reconnue ci-dessus des paraboles confocales. On remarquera que l'équation polaire, habituelle de la parabole est $\rho=\frac{p}{1-\cos\omega}$, parce que

dans l'équation (9), on ne prend que le signe inférieur, ce qui suffit en effet à donner toute la courbe, pourvu qu'on suive toutes les valeurs d'ω depuis 0° jusqu'à 360°; mais il faut bien se garder d'en agir ainsi dans la recherche qui nous occupe, car en ne conservant que le signe inférieur dans (9), on n'aurait aussi que le signe inférieur dans (10), et aussi dans (11), et l'on n'apercevrait plus la coïncidence de ces dernières formules.

Note. La question des *trajectoires* remonte à l'origine des nouveaux calculs, et remplit une page brillante dans l'histoire de la science. C'est Jean Bernoulli qui s'en occupa le premier, et imposa à ces courbes le nom qu'elles ont conservé. Il a été amené à ce genre de méditations par la théorie des ondes lumineuses de Huyghens. Il est à remarquer que, de nos jours, la physique de la chaleur a donné lieu à d'importants théorèmes sur les surfaces trajectoires. On connaît la vive et instructive polémique que cette matière a excitée dans la noble famille, gloire de l'Helvétie; ces froissements d'amour-propre ont fait sortir des étincelles de génie qui nous éclairent encore aujourd'hui. Le grand Leibnitz entra dans la lice et découvrit la différentiation sous le signe *de curva in curvam*, vrai prodrome du calcul des variations. Ayant en vue ces discussions, Leibnitz écrit à Jean Bernoulli, de Hanovre, en date du 21 mars 1694 : « Quanto pauciores sunt solidæ scientiæ cultores, eo magis inter se amicos esse convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in litteris, qui nihil agerent, nisi vel necessitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter se conflictari sinamus (*Comm. epist.*, t. II, p. 5).» Dans un autre endroit il lui écrit : « Sed vide sterilescere hoc ævum in omni pene genere doctrinæ, et quanto majora habent subsidia studiosi, eo magis ignaviam invalescere (*ibid.* p. 97) ;» aperçu très-fin, observation juste et toujours vraie. Tm.

NOTE

Sur la nature des racines d'une équation trinôme quelconque.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique (*).

On sait que l'on appelle équation trinôme, toute équation telle que

$$x^m + px^n + q = 0.$$

En explicitant toutes les formes qui peuvent se présenter eu égard aux degrés de parité des exposants m et n, et aux signes de p et de q, on aura les seize types suivants :

(1) $x^{2m} + px^{2n} + q = 0$, (2) $x^{2m} + px^{2n} - q = 0$,
(3) $x^{2m} - px^{2n} + q = 0$, (4) $x^{2m} - px^{2n} - q = 0$,
(5) $x^{2m} + px^{2n+1} + q = 0$, (6) $x^{2m} + px^{2n+1} - q = 0$,
(7) $x^{2m} - px^{2n+1} + q = 0$, (8) $x^{2m} - px^{2n+1} - q = 0$,
(9) $x^{2m+1} + px^{2n} + q = 0$, (10) $x^{2m+1} + px^{2n} - q = 0$,
(11) $x^{2m+1} - px^{2n} + q = 0$, (12) $x^{2m+1} - px^{2n} - q = 0$,
(13) $x^{2m+1} + px^{2n+1} + q = 0$, (14) $x^{2m+1} + px^{2n+1} - q = 0$,
(15) $x^{2m+1} - px^{2n+1} + q = 0$, (16) $x^{2m+1} - px^{2n+1} - q = 0$.

Or l'équation (1) n'a aucune racine réelle, les équations (2), (4), (6), (8), ont une racine réelle positive et une racine réelle négative, les équations (9) et (13), zéro racine positive et une racine négative, enfin les équations (12) et (14), une racine positive et zéro négative; on peut donc se borner à considérer les équations (3), (5), (7), (10), (11),

(*) V. t. II, p. 321.

(15), (16); d'un autre côté, l'équation (3) a autant de racines négatives que de racines positives, l'équation (5) n'a pas de racines positives, et a autant de racines négatives que l'équation (7) en a de positives; l'équation (7) n'a pas de racines négatives, l'équation (10) a une racine positive, et autant de négatives que l'équation (11) en a de positives; l'équation (11) a une racine négative, l'équation (15) une racine négative, enfin l'équation (15) a une racine positive et autant de racines négatives que l'équation (15) a de racines positives. Tout se réduit donc en définitive, à savoir déterminer le nombre des racines positives des équations (3) (7), (11), (15), ou en général de l'équation

$$x^m - px^n + q = 0.$$

Ce nombre est zéro ou 2, d'après le théorème de Descartes; pour qu'il soit 2, il faut et il suffit qu'une certaine valeur réelle de x rende

$$x^m - px^n + q < 0, \quad \text{ou} \quad q < x^n(p - x^{m-n}).$$

Or, pour que cette inégalité subsiste pour une certaine valeur de x, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour la valeur de x qui rend $x^n(p - x^{m-n})$ maximum, valeur qui doit vérifier l'égalité connue

$$\frac{m-n}{n} x^{m-n} = p - x^{m-n},$$

d'où l'on tire :

$$x = \left(\frac{n}{m} p\right)^{\frac{1}{m-n}};$$

portant dans l'inégalité ci-dessus, on trouve pour la condition qui exprime que l'équation a deux racines réelles positives :

$$q < \frac{m-n}{n} \left(\frac{n}{m} p\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

ou

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} < \left(\frac{n}{m}p\right)^{m},$$

l'inégalité n'excluant pas l'égalité.

La condition pour que l'équation n'ait pas de racines positives est au contraire :

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} > \left(\frac{n}{m}p\right)^{m}.$$

Euler dans son calcul différentiel est arrivé aux mêmes résultats en se basant sur le théorème de Rolle. (*Caput* XII, § 319.)

SUR LA

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

PAR M. FINCK,
professeur à Strasbourg.

Cette question faisant partie du programme d'admission à l'École Polytechnique, il ne sera pas hors de propos d'indiquer la méthode que j'emploie à mon cours d'analyse infinitésimale.

I. Soit $\frac{fx}{Fx}$ la fraction, fx étant de degré moindre que Fx, et premier avec lui : soit $x-a$ un facteur simple de $Fx=(x-a)\varphi x$. Je pose $x=a+z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{f(a+z)}{z\varphi(a+z)}=\frac{fa+zf'a+\frac{z^2}{2}f''a+\ldots}{z\left[\varphi a+z\varphi' a+\frac{z^2}{2}\varphi'' a+\ldots\right]}.$$

Divisant $fa+zf'a+\ldots$ par $\varphi a+z\varphi'a+\ldots$ les termes restant dans l'ordre où ils se trouvent, on a pour premier terme du quotient $\frac{fa}{\varphi a}$, et un reste qui n'est autre chose que $\frac{\varphi a.f(a+z)-fa.\varphi(a+z)}{\varphi a}$, ayant pour facteur z : donc

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{fa}{\varphi a.z}+\frac{\varphi af(a+z)-fa\varphi(a+z)}{z\varphi a.\varphi(a+z)}.$$

On prouve comme à l'ordinaire que $\varphi a=F'a$; donc nous avons une première fraction partielle $\frac{fa}{F'a}\cdot\frac{1}{z}=\frac{fa}{F'a}\cdot\frac{1}{x-a}$. Le reste, encore comme à l'ordinaire, en tant qu'il s'agit de facteurs simples de Fx.

II. Passons aux facteurs multiples, et soit $Fx=(x-a)^n.\varphi x$, je pose encore $x=a+z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{fa+zf'a+\ldots}{z^n[\varphi a+z\varphi'a+\ldots]}.$$

Or on n'a qu'à diviser encore $fa+z'fa+\ldots$, par $\varphi a+z\varphi'a+\ldots$ et s'arrêter au terme en z^{n-1}, au quotient, ce quotient sera de la forme $A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}$. Quant au reste, si Fx est de degré m, fx de degré $m-2$, dans notre division le diviseur $\varphi(a+z)$ est du degré $m-n$, le dividende du degré $m-2$, le quotient du degré $n-1$, le reste sera donc au plus du degré $m-1$; soit Rz^n. Ce reste qui renferme évidemment z^n pour facteur, de sorte que R est du degré $m-n-1$; on aura :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{A_1+A_2z+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}}{z^n}+\frac{R}{\varphi(a+z)}$$
$$=\frac{A_1}{z^n}+\frac{A_2}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{z}+\frac{R}{\varphi(a+z)},$$

et de la fraction proposée, nous avons extrait les n fractions partielles $\frac{A_1}{(x-a)^n},\ldots\ \frac{A_{n-1}}{x-a}$, plus la fraction $\frac{R}{\varphi x}$, dont

le numérateur est du degré $m-n-1$, et le dénominateur est du degré $m-n$; elle est donc de même nature que la proposée.

III. Pour montrer que cette méthode est éminemment pratique, je prends :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{3x^4-11x^3+14x^2-15x+5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)},$$

je pose $x=1+z$, et je trouve :

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{-4-8z-z^2+z^3+3z^4}{z^3(z+2)^2(z-1)}.$$

Je divise le numérateur par $(z+2)^2(z-1)=-4+3z^2+z^3$, voici l'opération, poussée jusqu'au terme en z^2 au quotient :

$$\begin{array}{ll|l}
 & -4-8z-z^2+z^3+3z^4 & -4+3z^2+z^3 \\ \cline{3-3}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} & -8z-4z^2+3z^4 & 1+2z+z^2 \\
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} & -4z^2-6z^3+z^4 & \\
\text{3}^{\text{e}}\text{ reste} & -6z^3-2z^4-z^5 &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{1+2z+z^2}{z^3}-\frac{6z^3+2z^4+z^5}{z^3(z+2)^2(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{z}-\frac{6+2z+z^2}{(z+2)^2(z-1)}.$$

Actuellement au lieu de revenir à $\frac{fx}{Fx}$, pour en extraire les autres fractions, il est plus simple d'opérer sur $\frac{6+2z+z^2}{(z+2)^2(z-1)}=\frac{f_1z}{\varphi_1z}$, j'y pose $z+2=y$, et j'ai $\frac{f_1(y-2)}{\varphi_1(y-2)}=\frac{6-2y+y^2}{y^2(y-3)}$; je divise le numérateur par $-3+y$,

$$\begin{array}{ll|l}
 & 6-2y+y^2 & -3+y \\ \cline{3-3}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} & 0y+y^2 & -2+0y \\
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} & y^2, &
\end{array}$$

donc

$$\frac{f_1}{\varphi_1} = -\frac{2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2(y-3)} = -\frac{2}{y^2} + \frac{4}{y-3},$$

et

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y-3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-2}.$$

On pourrait, de la division seule, déduire une formule générale pour le numérateur de $(x-a)^{n-\alpha}$; mais dans chaque cas, la division est préférable.

Note. L'intégration des fractions algébriques rationnelles par la décomposition en fractions partielles est due à Jean Bernoulli (Voy. *Op. omnia*, t. I, p. 393), mais la méthode généralement adoptée pour obtenir les coefficients à l'aide de dérivations est d'Euler. Le procédé par *la division* a été proposé par divers, entre autres par un anonyme, dans le journal de Gergonne, t. X, p. 255, et par le professeur Dirksen, journal de Crelle, t. I, p. 53 ; on possède aussi des procédés combinatoires. (*Voir* Cauchy, cours d'Analyse, ch. XI, p. 365). Tm.

NOTE

Sur une propriété des courbes du second degré.

PAR M. CHAPPON,

élève de mathématiques du collége Saint-Louis (classe de M. VINCENT).

—

Le produit des distances des deux foyers d'une ellipse à une tangente quelconque est égal au carré du demi-petit axe.

Si on abaisse des perpendiculaires FP, F'P' (*fig.* 25), sur une tangente à l'ellipse, les pieds P, P', de ces perpendiculaires se trouvent sur la circonférence décrite sur le grand axe AB comme diamètre. Cela étant, joignons PO et prolongeons OP et P'F' jusqu'à leur rencontre en N.

Les triangles OFP, OF'N sont égaux comme ayant un côté égal OF = OF' adjacent à 2 angles égaux POF = NOF', OFP = OF'N, donc ils sont égaux ; donc ON = OP, et par suite le point N est sur l'ellipse ; de plus F'N = FP, et par conséquent on aura :

$$FP.F'P' = F'N.F'P' = AF'.F'B = (a-c)\,(a+c) = a^2-c^2 = b^2,$$

en désignant le demi grand axe par a, le demi petit axe par b, et la demi-excentricité par c.

Le théorème est absolument le même pour l'hyperbole, et on le démontre d'une manière semblable.

Je dis qu'on aura $FP.F'P' = b^2$ (*fig.* 26). En effet le cercle décrit sur l'axe transverse, comme diamètre, contient les projections des foyers sur toutes les tangentes ; comme les points P, P'. Joignons OP, et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre en un point R avec la ligne F'P', les 2 triangles POF, ROF' sont égaux comme ayant un côté égal OF = OF' adjacent à deux angles égaux, savoir : OFP = OF'R et FOP = F'OR. Donc OR = OP, et le point R est situé sur le cercle ; de plus FP = F'R ; donc

$$FP.F'P' = FR.F'R.$$

Mais si on abaisse du foyer la perpendiculaire F'Q, sur l'asymptote, le point Q appartiendra au cercle, et la ligne FQ lui sera tangente en ce point, et comme cette perpendiculaire est égale au demi petit axe b,

$$FP.F'P' = F'R.FP' = b^2.$$

RECHERCHES

Sur l'enveloppe de la corde d'une section conique, vue d'un point de son plan, sous un angle constant.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Le traité des propriétés projectives des figures, renferme plusieurs beaux théorèmes sur la corde d'une section conique, qui est vue d'un point de son plan sous un angle donné. Le savant auteur de ce livre si remarquable y a réuni tout ce que l'on sait là-dessus, tant par ses propres recherches, que par celles de ses devanciers. Il a démontré que l'enveloppe est une section conique; l'angle sous-tendu étant quelconque, lorsque le sommet est sur la courbe ou à l'un des foyers, et l'angle étant droit, lorsque le sommet occupe une position quelconque. Enfin, dans le cas où la courbe se réduit à deux droites, le théorème a lieu quelles que soient la grandeur de l'angle et la situation du sommet.

Aucun de ces cas n'offre une solution générale de la question. Aussi M. Terquem exprime-t-il (t. III, p. 124) le désir que ces recherches soient complétées. C'est ce que j'ai essayé, ainsi qu'on va le voir.

1.— Avant d'entrer en matière, j'énoncerai deux lemmes.

1° Il est toujours possible de couper une surface conique du second ordre, de manière que la section projetée sur un plan donné, soit une circonférence de cercle.

2° La projection du sommet du cône sur le même plan, lorsqu'elle tombe au centre de la circonférence, est un foyer de la section faite dans le cône par ce plan.

Les démonstrations ne présentent aucune difficulté; je me borne aux énoncés ci-dessus, prévenant d'ailleurs qu'il s'agit uniquement de projections orthogonales dans cet article.

2. — Cela posé, d'un point pris arbitrairement sur la perpendiculaire au plan de la courbe donnée, qui a pour pied le point fixe d'où la corde est vue sous un angle constant, comme sommet, avec cette ligne pour base, concevons que l'on décrive une surface conique. Le plan qui passe continuellement par le sommet et par la corde mobile enveloppe une autre surface conique du même sommet que la première; cette nouvelle surface sera du second degré, si l'enveloppe courbe qui lui sert de base est une section conique. De plus, si l'on mène un plan qui coupe à la fois les deux surfaces, la projection de l'une des courbes obtenues sera l'enveloppe des cordes de la projection de l'autre, vues du point fixe sous l'angle donné. Or il est toujours possible de faire en sorte que cette seconde projection soit une circonférence de cercle, donc il suffit de considérer la corde mobile dans le cercle.

3. — Lorsque la bissectrice de l'angle passe par le centre de ce cercle, on a immédiatement sur cette droite, deux points de l'enveloppe; ce sont évidemment les extrémités d'un axe de symétrie. Je prends cet axe pour ligne des abscisses, le point fixe pour origine, ce qui donne l'équation aux coordonnées rectangulaires du cercle :

$$y^2+(x-c)^2=r^2 \qquad (1)$$

dans laquelle c et r sont la distance du point fixe au centre, et le rayon. Soit φ l'angle mobile, et $\alpha=$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$, les points de l'enveloppe situés sur l'axe, auront pour abscisses les racines de l'équation (1), après que l'on y aura fait $y=\alpha x$. Par cette substitution elle devient :

$$(1+\alpha^2)\,x^2-2cx-(r^2-c^2)=0. \qquad (2)$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'origine est dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire que l'on a $r>c$. L'équation de la conique enveloppe, si c'est une conique, sera donc de la forme :

$$Ay^2 + (1+\alpha^2)x^2 - 2cx - (r^2 - c^2) = 0, \qquad (3)$$

A étant un coefficient à déterminer.

Pour en connaître la valeur, amenons la bissectrice de l'angle mobile à coïncider avec l'axe des y. Dans cette position, il est aisé de vérifier que le point de l'enveloppe est sur l'axe des y, ce qui s'accorde avec la supposition que cette courbe est une section conique. Mais cette induction serait trompeuse, c'est ce que je vais faire voir.

La valeur de A s'obtient sans difficulté. On trouve par un calcul très-simple :

$$A = 1 + \alpha^2 + \frac{c^2\alpha^2}{r^2 - c^2},$$

et en nommant b^2 le carré du demi-axe parallèle aux y, on a :

$$b^2 = \frac{r^2 - c^2 + \dfrac{c^2}{1+\alpha^2}}{1 + \alpha^2 + \dfrac{c^2\alpha^2}{r^2 - c^2}}. \qquad (4)$$

D'un autre côté, si l'on détermine b^2, de manière que la tangente parallèle à l'axe des x soit sous-tendue par l'angle donné, on arrive à l'équation :

$$b^4(1+\alpha^2) - b^2[r^2(1+\alpha^2)^2 - 4c^2\alpha^2] + \alpha^2(r^2 - c^2 = 0,) \qquad (5)$$

à laquelle il faut que la valeur (4) de b^2 satisfasse, si l'enveloppe est réellement une section conique. Or la substitution de cette valeur conduit à l'équation de condition

$$c^6(r^2 - c^2)\,\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)^4}{(1+\alpha^2)^5} = 0. \qquad (6)$$

C'est de là qu'on tirera toutes les solutions de la question, le calcul ayant été fait de manière à n'en écarter aucune.

4. — On satisfait à l'équation ci-dessus, 1° en posant $c=0$. Alors l'enveloppe est une circonférence de cercle, mais aussi

le sommet de l'angle, d'après le deuxième lemme indiqué au commencement de cet article, est au foyer de la courbe donnée : c'est un des cas traités par M. Poncelet.

2° En faisant $c^2 = r^2$. Le sommet de l'angle est sur la courbe, c'est encore un cas déjà connu.

3° $\alpha = 0$ satisfait à la question, c'est évident, car cette hypothèse rend nul l'angle mobile, et l'enveloppe n'est autre chose que la courbe proposée.

4° En égalant à zéro le facteur $1 - \alpha^2$, on obtient encore l'un des cas traités par M. Poncelet, savoir celui où l'angle est droit. L'enveloppe est une circonférence, ou une section conique dans le cas général.

5.— Lorsque la section conique proposée se réduit à deux droites, l'enveloppe est, comme on sait, une section conique. Mais alors il est impossible de couper le cône suivant une direction, telle que la section se projette sur la base suivant un cercle. Aussi ce cas échappe-t-il à l'analyse qui précède, mais on a des démonstrations directes qui ne laissent rien à désirer du côté de la simplicité.

6.— Ce qui vient d'être dit suppose une restriction, savoir : que le point fixe est dans l'intérieur de la circonférence. S'il en était autrement, la courbe pourrait n'être pas fermée, et la question est de savoir si elle peut être une parabole ou une hyperbole; il faudrait pour cela qu'on eût $1 + \alpha^2 = 0$. Ce qui ne saurait être; ou $A < 0$: d'où résulterait pour b^2 une valeur négative, or l'équation finale obtenue ci-dessus est indépendante du signe de b^2, donc elle comprend tous les cas sans exception.

7.— La conclusion de tout ceci, c'est que les cas dans lesquels on savait jusqu'à présent que la corde d'une section conique, qui est vue d'un point de son plan sous un angle constant, enveloppe une autre section conique, sont les seuls possibles.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les centres des coniques.

(V. p. 266.)

XI. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique qui passe par quatre points donnés est une conique.

Démonstration. Conservons les mêmes données et la même notation du problème I (p. 260) et soient x', y', les coordonnées du quatrième point D ; remplaçant x et y dans l'équation (1) par x' et y', et considérant t, u comme les coordonnées courantes du centre, on a l'équation du lieu cherché ; ordonnant par rapport à t et à u, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} 2x'(x'-p)u^2-4x'y'ut+2y'(y'-q)t^2+ \\ +ux'(2py'-qx'+pq)+ty'(2qx'-py'+pq)-pqx'y'=0. \end{array}\right\} (3)$$

Il est facile de vérifier que la courbe passe par les neuf points suivants : savoir, les six milieux des quatre côtés du quadrilatère ABCD et des deux diagonales AD, BC et par les trois points d'intersection des côtés opposés AB, CD ; AC, CD et des deux diagonales AD, BC et c'est ce qu'on peut prévoir à priori ; puisque les côtés opposés et les deux diagonales sont trois coniques passant par les quatre points donnés, et les intersections respectives sont les centres de ces coniques. Il s'ensuit aussi que le centre de la conique est le point de moyenne distance des quatre sommets A, B, C, D du quadrilatère.

Calculons les éléments de la courbe. On a sans aucune difficulté : $m=16x'y'(py'+qx'-pq)$; ce qui détermine l'espèce de la courbe ; si le point D est dans l'intérieur du triangle ABC ou dans les angles opposés à A, B, C, m est

négatif et le lieu est une ellipse ; ce qui est d'ailleurs évident ; car, dans ce cas, on ne peut faire passer une parabole par les quatre points ; par conséquent, aucun centre ne peut être à l'infini ; dans toute autre position du point D, le lieu est une hyperbole et ne peut jamais être une parabole ; en effet pour que l'on ait $m=0$, il faut que D se trouve sur l'un des trois côtés du triangle ABC ; alors les coniques qui passent par les quatre points se réduisent à des systèmes de droites

$$k=4x'y'(x'+p)(py'+qx'-pq),$$
$$k'=4x'y'(y'+q)(py''+qx'-pq),$$
$$n=x'y'[(2py'-qx'+pq)(2qx'-py+pq)\,8pqx'q'];$$
$$N=2[x'^2+y'^2-px'-qy'+2x'y'\cos\gamma],\ \text{(tome I, p. 489)}.$$

Calcul de L, on a :

$$Ak^2+Bkk'+Ck'^2+mDk'+mEk+m^2F=mL,\ \text{(t. I, p. 490)}.$$

Remplaçant ces lettres par leurs valeurs, il vient, toutes réductions faites :

$$L=2x'y'(py'+qx'-pq)\left[y'(y'-q)[(y'+q)^2-2(x'^2+p^2)]+\right.$$
$$\left.+x'(x'-p)[(x'+p)^2-2(y'^2+q^2)]\right].$$

Observation. Il suffit que l'un des quatre facteurs de L devienne nul, pour que L soit zéro ; alors le centre devient une droite ou bien le lieu est impossible.

Remarque I. Soient O et O' les centres des deux coniques circonscrites au quadrilatère ABCD ; si l'on cherche le lieu géométrique du point M de rencontre de deux diamètres OM, O'M, tels que leurs conjugués respectifs soient parallèles, on trouve facilement que ce lieu est une conique. Les milieux des quatre côtés et des deux diagonales du quadrilatère sont évidemment sur cette conique ; elle se confond donc avec la conique, lieu des centres ; mais elle subsiste même lorsque deux points d'intersection des deux coniques données, ou même les quatre, deviennent imaginaires.

Remarque II. La direction des axes principaux est donnée par l'équation :

$$x'y^2[x'-p-q'\cos\gamma]+xy[x'(x'-p)-y'(y'-q)]+$$
$$+y'x^2[x'\cos\gamma-y'+q]=0,\ (\text{t. I, p. 496}).$$

Le coefficient angulaire des asymptotes $=\dfrac{4x'y'\pm\sqrt{m}}{4x'(x'-p)}$;

c'est aussi le coefficient angulaire des deux diamètres des deux paraboles qui passent par les quatre points donnés.

XII. *Théorème.* A un quadrilatère donné, on ne peut circonscrire plus de huit coniques semblables à une conique donnée, et réciproquement dans une conique donnée, on ne peut inscrire plus de huit quadrilatères semblables à un quadrilatère donné.

Démonstration. Conservons la même notation que dans le théorème précédent : l'équation (3) donne une relation du second degré entre les coordonnées t, u du centre ; la condition de similitude donne une seconde relation, entre ces coordonnées, et du quatrième degré, savoir :

$$[t(2t-p)+u(2u-q)+(2t-p)(2u-q)\cos\gamma]^2=$$
$$=c[2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)],\ (\text{t. I, p. 495}),$$

où c représente une constante : et comme les deux équations sont complètes, l'élimination donne une équation du huitième degré.

XIII. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique passant par trois points donnés et touchant une droite donnée, est du quatrième degré.

Démonstration. Prenons la même notation qu'au problème 1 (p. 260) et soit $dy+ex+f=0$, l'équation de la droite donnée ; l'équation de la conique passant par les trois points est

$$y^2+Bxy+Cx^2-qy-Cpx=0,\ (\text{p. 261}),$$

La droite devant être tangente, l'on a :

$$l'd^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2fdk' + 2fek = 0, \text{ (t. II, p. 108)},$$

or

$$m = B^2 - 4C,\ k = Bq - 2Cp,\ k' = C(Bp - 2q),$$
$$l = q^2,\ l' = C^2p^2,\ n = Cpq,\ L = C(Cp^2 - Bpq + q^2),$$
$$B = \frac{q - 2u}{t},\quad C = \frac{u}{t} \cdot \frac{2u - q}{2t - p},\quad \text{(p. 261).}$$

Remplaçant les lettres l, l', m, B, C par leurs valeurs, on obtient une équation du quatrième degré en t et u.

XIV. *Théorème*. Le lieu du centre d'une conique passant par deux points donnés et touchant une droite donnée en un point donné, est une conique.

Démonstration. Conservons même notation que dans le théorème précédent et supposons que la droite donnée passe par l'origine qui est alors un point double ou de contact; il suffit de faire $f = 0$, et l'on a $l'd^2 - 2den + le^2 = 0$, ou $C^2pd^2 - 2Cpqde + q^2e^2 = 0$, d'où $Cpd - qe = 0$; ou bien $pdu(2u - q) - qet(2t - p) = 0$; équation d'une conique, passant par l'origine, ce qui doit être, puisque les axes forment un système conique, qui satisfait à la question ; donc l'origine est un centre.

XV. Le lieu du centre d'une conique touchant trois droites données, et passant par un point donné, est une parabole.

Démonstration. Mêmes données et même notation qu'au problème VII (p. 264), et de plus x', y' coordonnées du point ; il suffit de considérer dans l'équation que donne la solution de ce problème, t et u comme les coordonnées courantes du centre, et de remplacer x et y par x' et y' ; le lieu cherché a pour équation $(ty' - ux')^2 + 2un'x' + 2tn'y' + n'^2 - 2n'x'y' = 0$; équation d'une parabole.

XVI. Le lieu du centre d'une conique touchant quatre droites données, est une droite.

Démonstration. C'est le théorème de Newton ; on en a déjà donné une démonstration (voir t. II, p. 108), qui est susceptible de simplification : prenons deux de ces droites pour axes et soient $dy + ex + f = 0$; $d'y + e'x + f' = 0$, les équations des deux autres droites.

On a donc les deux relations

$$\left.\begin{array}{l} -2den' + f^2 + 2fdu + 2eft = 0, \\ -2d'e'n' + f'^2 + 2f'd'u + 2e'f't = 0, \end{array}\right\} \text{ t. II, p. 108),}$$

car

$$l = l' = 0\,,\ n' = \frac{n}{m}\,,\ t = \frac{h}{m}\,,\ u = \frac{k'}{m}\,;$$

t et u coordonnées du centre.

Éliminant n', il vient :

$$2dd'(fe' - f'e)u + 2ee'(fd' - f'd)t = def'^2 - d'e'f^2,$$

équation d'une droite passant par les trois milieux des trois diagonales du quadrilatère complet ; car, ces trois droites représentant trois ellipses satisfont au problème, et leurs milieux sont des centres.

XVII. *Problème*. Une conique touchant cinq droites, trouver les coordonnées du centre et une équation de cette conique.

Solution. Conservons mêmes données que dans le théorème précédent, et soit $d''y + e''x + f'' = 0$ l'équation de la cinquième tangente, on a alors

$$2dd''(fe'' - f''e)\,u + 2ee''(fd'' - f''d)\,t = def''^2 - d''e''f^2\,;$$

on a donc deux équations du premier degré en t et u ; on connaît donc les coordonnées du centre, et le problème VII (p. 264) donne l'équation de la conique.

Observation. Il est évident qu'on peut trouver le centre par une construction géométrique.

XVIII. *Problème*. Une conique passant par cinq points

donnés, déterminer les coordonnées du centre et une équation de la courbe.

Solution. Conservons la notation du théorème XI et soient x'', y'' les coordonnées du cinquième point; outre l'équation (3) entre les coordonnées du centre, on aura une seconde équation, entre les mêmes inconnues, en changeant x' et y' en x'' et y''; l'élimination de u, donne une équation en t du quatrième degré, d'où il suffit de connaître les deux premiers termes $Mt^4 + Nt^3 +$ etc., et ces coefficients sont connus (*voir* t. II, p. 35); la somme des quatre racines est $-\frac{N}{M}$; or les deux lignes représentées par ces deux équations ont trois points en commun, savoir : les milieux de AB, AC, BC; l'équation en t a donc trois racines égales, l'une à zéro et les deux autres à $\frac{p}{2}$; la somme des trois racines est égale à p; donc la quatrième racine ou l'abscisse du centre est $-\frac{N}{M}-p$; on trouvera par des considérations semblables, l'ordonnée du centre; connaissant les coordonnées du centre, le problème I fait connaître l'équation de la courbe; pour qu'elle soit une parabole, il faut et il suffit qu'on ait $M=0$; on sait que M est le même pour l'équation du quatrième degré soit en u soit en t.

Autrement : prenons l'équation de la conique passant par trois points (problème I, p. 261); remplaçant x et y successivement par x', y' et x'', y''; on obtient deux équations du premier degré entre B et C; elles donnent :

$$BP = y''x'(x'-p)(y''-q) - y'x''(x''-p)(y'-q),$$
$$CP = y'y''[q(x'-x'') + x''y' - x'y''],$$
$$P = x'x''[p(y''-y') + y'x'' - x'y''];$$

quantités faciles à construire.

L'équation de la tangente à l'origine est $qy + Cpx = 0$;

d'ailleurs par l'hexagramme de Pascal, on peut mener par les cinq points, les cinq tangentes à la conique non décrite ; et l'on est ainsi ramené au problème précédent. Tm.

GNOMONIQUE.

Nouvelle méthode pour tracer les cadrans solaires horizontaux.

PAR M. S. LEVESQUE.

On trouve dans tous les traités de gnomonique diverses méthodes pour tracer les cadrans solaires horizontaux, mais ces méthodes exigent, ou des opérations graphiques très-compliquées, ou que l'on trace d'après les indications données par le calcul, une série d'angles en degrés, minutes, etc., ce qui est toujours fort minutieux, et par suite souvent inexact.

La méthode que nous donnons ici nous paraît exempte de ces inconvénients et ne laisse rien à désirer sous le rapport de l'exactitude, puisqu'elle n'est, comme on va le voir, qu'une sorte de transformation de cette formule générale bien connue des astronomes et des géomètres :

Le sin total : sin de la latitude :: la tangente de l'angle horaire au cadran équinoxial : la tangente de l'angle horaire au cadran horizontal.

AC (*fig.* 24) étant la méridienne du cadran et FCD la ligne de 6 heures, on a cette formule qui dispense de tracer les angles horaires du cadran :

AB = AC sin latitude. Tangente angle horaire équinoxial.

$$\text{DE} = \text{CD}\,.\,\frac{\text{cotang. angle horaire équinoxial}}{\text{sin latitude}} = \text{CD. cotang.}$$

ang. hor. équin. × coséc. latitude.

H, angle horaire au cadran,

O, angle horaire à l'équateur,

L, la latitude.

La formule générale rapportée plus haut donne, pour l'angle horaire au cadran horizontal : $\tang H = \sin L \tang O$.

Dans le triangle rectangle CAB, on a $\frac{AB}{AC} = \tang H$,

$$AB = AC.\tang H.$$

En substituant dans cette équation la valeur de tang H, donnée par la formule générale, on a $AB = AC \sin L \tang O$.

Enfin dans le triangle rectangle CDE, on a

$$\frac{DE}{CD} = \cotang H, \quad DE = CD.\cotang H,$$

$$\cotang H = \frac{1}{\tang H} = \frac{1}{\tang O \sin L} = \frac{\cotang O}{\sin L} = \cot O \operatorname{cos\acute{e}c.} L.$$

LETTRE DE M. GUILMIN.

—

M. le rédacteur,

Votre dernier numéro contient (p. 257) une lettre qui a dû être remarquée pour la forme, si ce n'est pour le fonds. Je vous serai très-obligé d'insérer une dernière réponse.

Il m'a semblé que M. Catalan démontrait trop longuement une proposition d'algèbre élémentaire, j'ai cru utile aux élèves d'en indiquer une démonstration plus simple. Cette démonstration, M. Catalan ne l'a pas comprise ; cependant, il paraît l'avoir étudiée avec tant de bonne volonté, que je me fais un plaisir de lui venir en aide.

Il s'agit de cette proposition : une fraction continue périodique $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{a + \text{etc.}}}}$,

est égale à l'une des racines d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

Soit x *la valeur* de la fraction continue proposée. Pour démontrer la proposition, on écrit :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{x}}}.$$

Cette égalité est rigoureusement vraie ; c'est ce que j'ai voulu démontrer. Je pose :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y}}},$$

en appelant y *la valeur* de la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}},$$

qui commence à la deuxième période.

Je suppose qu'ayant formé consécutivement les réduites de x et de y, en nombre aussi grand que l'on voudra, on compare deux à deux les réduites de même rang dans les deux calculs ; on les trouvera constamment égales. Une de ces réduites $\frac{Q}{Q'}$, différera de x et de y, dans le même sens, d'une quantité moindre que $\frac{1}{Q'^2}$; mais $\frac{1}{Q'^2}$ peut devenir aussi petit que l'on voudra ; donc x et y sont égaux.

J'ai ensuite démontré *tous* les théorèmes qu'avait démontrés M. Catalan.

Je crains d'avoir répondu trop sérieusement à cette lettre. Je ne dirai rien de la finesse des plaisanteries, de l'urbanité du style ; je m'en rapporte, à cet égard, au jugement de vos lecteurs.

Agréez, Monsieur le rédacteur, l'assurance de mes sentiments les plus dévoués.

A. Guilmin.

SOLUTION DU PROBLÈME

proposé pour la composition du concours d'agrégation en 1843.

PAR M. A. DELADEREERE,
Professeur au collége de Nantes, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Trouver l'équation des surfaces telles que si, par un point donné, on mène une perpendiculaire au plan tangent, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la portion de la normale comprise entre le point de contact et un plan fixe mené par le point donné, soit équivalent au carré de la distance du point donné au point de contact.

Solution. Je prends le point fixe pour origine des coordonnées, et le plan fixe pour celui des XY, et comme les équations du plan tangent et de la normale sont :

$$(1) \qquad z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' - x = -p(z' - z), \\ y' - y = -q(z' - z), \end{array} \right.$$

les équations de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent seront :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = -pz', \\ y' = -qz'. \end{array} \right.$$

Le carré de la distance de l'origine au plan tangent sera d'après les formules connues :

$$(4) \qquad \delta^2 = \frac{(z - px - qy)^2}{1 + p^2 + q^2}.$$

Le carré de la portion de la normale comprise entre le point de contact et le plan des XY sera :

$$(5) \qquad \delta'^2 = (1 + p^2 + q^2) z^2$$

et le carré de la distance de l'origine au point de contact sera :

(6) $$\delta''^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Mais, d'après les conditions du problème, on doit avoir :

(7) $$\delta\delta' = \delta''^2 \quad \text{ou bien} \quad \delta^2\delta'^2 = \delta''^4.$$

Substituant dans (7) pour δ^2, δ'^2, δ''^2 leurs valeurs (4), (5) et (6), on aura :

$$\frac{(z - px - qy)^2}{1 + p^2 + q^2}(1 + p^2 + q^2)z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

ou bien en simplifiant :

$$(z - px - qy)^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Extrayant la racine carrée des deux membres on trouve :

$$(z - px - qy)z = \pm(x^2 + y^2 + z^2);$$

on en tire :

$$px + qy = z \pm \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z};$$

et en réduisant les termes du deuxième membre au même dénominateur :

$$px + qy = \frac{z^2 \pm (z^2 + y^2 + x^2)}{z},$$

équation linéaire aux différences partielles et du premier ordre, qui se partage dans les deux suivantes :

(8) $$px + qy = -\frac{x^2 + y^2}{z},$$

(9) $$px + qy = \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{z}.$$

Telles sont les deux équations aux différences partielles qu'il faudra intégrer pour avoir toutes les solutions de la question.

Or nous savons, par la théorie des équations aux différences partielles linéaires et du premier ordre, que pour

intégrer $Pp+Qq=R$, il faut poser $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$, ce qui donne trois équations simultanées dont l'une est une conséquence des deux autres; qu'on intègre ensuite les deux plus simples, ce qui donne deux intégrales avec deux constantes arbitraires; qu'on regarde ensuite une de ces constantes comme une fonction arbitraire de l'autre, remplaçant ensuite dans le résultat les constantes par leurs valeurs en fonctions des variables déduites des équations intégrales.

Nous allons donc appliquer ce procédé aux équations (8) et (9)

Soit d'abord l'équation (8) :

$$(8) \qquad px+qy=-\frac{x^2+y^2}{z}.$$

D'après la méthode nous poserons :

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=-\frac{zdz}{x^2+y^2}.$$

Intégrant la première,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

on a :

$$Ly=Lcx\,;$$

d'où :

$$(10) \qquad y=cx.$$

Intégrons actuellement la deuxième

$$\frac{dx}{x}=-\frac{zdz}{x^2+y^2},$$

après avoir mis pour y sa valeur précédente, ce qui donne :

$$\frac{dx}{x}=-\frac{zdz}{(1+c^2)x^2},$$

d'où on tire :

$$(1+c^2)xdx=-zdz.$$

Intégrant

$$(1+c^2)x^2 = -z^2 + C',$$

ou bien :

$$x^2 + c^2x^2 + z^2 = C';$$

et d'après la valeur $y = cx$,

(11) $$x^2 + y^2 + z^2 = C'.$$

Posant $C' = \varphi(c)$ d'après la théorie, et remplaçant c et C' par leurs valeurs tirées des équations (10) et (11), il viendra :

(12) $$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'équation de la première famille de surfaces satisfaisant à l'énoncé de la question.

Intégrons actuellement la deuxième équation différentielle :

(9) $$px + qy = \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{z},$$

et d'après la méthode, posons :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + y^2 + x^2}.$$

Intégrons la première des deux équations contenues dans celle-ci :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Nous avons trouvé tout à l'heure pour son intégrale :

(10) $$y = cx.$$

Intégrons la deuxième :

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + y^2 + x^2},$$

après y avoir mis pour y sa valeur, ce qui donne :

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + (1+c^2)x^2};$$

d'où on tire :

$$2z^2dx + (1 + c^2)x^2dx = zxdz.$$

Pour l'intégrer, je pose $z^2 = t$, d'où $zdz = tdt$. Substituant j'ai :

$$2tdx + (1 + c^2)x^2dx = \frac{1}{2}xdt,$$

d'où on tire :

$$dt - \frac{4}{x}tdx = 2(1 + c)xdx,$$

ce qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un deuxième membre ; or on sait que l'intégrale de toute équation de la forme :

$$dy + Pydx = Qdx$$

est

$$y = e^{-\int Pdx}\left\{\int_0^x e^{-\int Pdx}Qdx + C\right\}.$$

Appliquant à l'équation différentielle précédente, on a :

$$t = z^2 = e^{\int \frac{4}{x}dx}\left\{\int_0^x e^{-\int \frac{4}{x}dx}\, 2(1 + c^2)xdx + C'\right\};$$

ou bien en remarquant que l'on a par l'intégration :

$$e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4Lx} = (e^{Lx})^4 = x^4,$$

l'intégrale précédente devient :

$$z^2 = x^4\left\{\int_0^x 2(1 + c^2)x^{-3}dx + C'\right\}.$$

Intégrant une seconde fois, il vient :

$$z^2 = x^4\left\{-\frac{(1 + c^2)}{x^2} + C'\right\},$$

ou bien

$$z^2 = -(1 + c^2)x^2 + C'x^4,$$

ou encore :

$$z^2 + c^2x^2 + x^2 = c'x^4.$$

Remplaçant cx par sa valeur y,

$$(13) \qquad z^2 + y^2 + x^2 = x^4 C'.$$

Posant $C' = \varphi(c)$ et remplaçant C et C' par leurs valeurs (10) et (12), on a :

$$(14) \qquad z^2 + y^2 + x^2 = x^4 \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'équation de la deuxième famille de surfaces qui répondent à la question.

On voit facilement que puisque $c = \frac{y}{x}$, on pourrait la mettre sous la forme :

$$z^2 + y^2 + x^2 = y^4 \varphi_1\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{ayant} \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = c^4 \varphi_1\left(\frac{x}{y}\right).$$

Cherchons actuellement le mode de génération le plus simple des deux familles de surfaces représentées par les équations.

Et commençons d'abord par l'équation

$$(12) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Posons $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $y = ax$ et $b = \varphi(a)$, et l'équation (12) représentera la surface engendrée par le grand cercle d'intersection d'une sphère ayant son centre à l'origine et pour rayon $\sqrt{b}$ avec un plan passant par l'axe des z et dont la trace sur le plan des XY aurait pour équation $y = ax$; ce grand cercle s'appuyant dans chacune de ses positions sur une certaine courbe directrice dont les équations serviraient dans chaque cas particulier à déterminer la forme de la fonction φ en éliminant x, y, z entre les équations de cette courbe et celles de la sphère et du plan en question, puisqu'on obtiendrait ainsi une relation déterminée entre a et b. Ainsi les surfaces de la famille représentée par l'équation (12) peuvent être considérées comme étant engendrées par un

cercle variable de rayon, ayant son centre fixe, tournant autour d'un axe passant par ce centre, et s'appuyant constamment sur une courbe donnée.

Si dans l'équation (14) précédente,

$$(14) \qquad x^2+y^2+z^2=x^4\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

on pose $x^2+y^2+z^2=bx^4$, $y=ax$, on arrivera par un raisonnement semblable à conclure que :

Les surfaces de la famille représentée par l'équation (14) peuvent être engendrées par une courbe plane du quatrième degré, dont le centre est fixe, et qui tourne autour d'une droite passant par ce centre, et s'appuyant constamment sur une courbe donnée.

La courbe du quatrième degré, qui sert de génératrice, a une équation de la forme

$$(15) \qquad x^2+z^2=cx^4.$$

On en tire pour la valeur de z en x :

$$(16) \qquad z=\pm x\sqrt{c^2x^2-1}=\pm x\sqrt{(cx+1)(cx-1)}.$$

D'après l'équation (15) on voit qu'elle a son centre à l'origine : ensuite l'équation (16) montre que son centre est un point isolé de la courbe, puisque pour $x=0$, $z=0$ et que pour x compris entre $\frac{1}{c}$ et $-\frac{1}{c}$ les valeurs de z sont imaginaires.

On voit aussi que les sommets sont donnés par $x=\frac{1}{c}$ et $x=-\frac{1}{c}$, de façon que la courbe a un axe dont la grandeur est $\frac{2}{c}=2m$, et l'équation de la courbe a la forme

$$(17) \qquad m^2(x^2+z^2)=x^4,$$

ou bien :

(18)
$$z = \frac{x}{m}\sqrt{x^2 - m^2}.$$

Le coefficient angulaire de la courbe a la forme

(19)
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x^2 - m^2}{m\sqrt{x^2 - m^2}},$$

et le coefficient différentiel de celui-ci est :

(20)
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x(2x^2 - 3m^2)}{m(x^2 - m^2)\sqrt{x^2 - m^2}}.$$

Pour $x = m$, (19) devient infini, ce qui montre que la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

Pour $x = \infty$, (19) devient encore infini, ce qui montre que la dernière direction des branches de la courbe est perpendiculaire à l'axe; d'ailleurs, comme pour des valeurs croissantes de x depuis m jusqu'à l'infini, z prend des valeurs croissantes depuis zéro jusqu'à l'infini, ainsi que l'indique (18), on en conclut que la courbe a des branches infinies dont la dernière direction à une distance infinie de l'axe des X est perpendiculaire à l'axe, ce qui montre que la courbe n'a pas d'asymptotes.

De ce que pour $x = m$ et $x = \infty$ les tangentes sont perpendiculaires à l'axe, on en conclut qu'entre ces deux points il y a une inflexion ; pour la déterminer il faut égaler (20) à zéro, ce qui ne peut se faire pour des valeurs finies de x qu'en égalant le numérateur à zéro :

$$x(2x^2 - 3m^2) = 0.$$

Or $x = 0$ donne l'origine ou point isolé ou conjugué, le point d'inflexion est donc donné par

$$2x^2 - 3m^2 = 0 ;$$

d'où

$$x\sqrt{2} = m\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{2} \quad z = \frac{1}{2}m\sqrt{3}.$$

Donc x est le côté du carré dont la diagonale serait le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon égal à m.

Il sera d'ailleurs facile de construire géométriquement autant de points qu'on voudra de la courbe en prenant une quatrième proportionnelle au demi-axe, l'abscisse et le côté du triangle rectangle dont l'hypothénuse est l'abscisse et l'autre côté de l'angle droit le demi-axe, ce qu'indique l'équation (18). On trouvera ainsi que la courbe a à peu près la forme suivante (*fig.* 35).

L'espèce de surface donnée par l'une des équations (12) ou (14) variera selon la forme de la directrice. On pourra d'ailleurs prendre pour celle-ci la trace que la surface laisse sur le plan des XY.

En coupant ces surfaces par des plans parallèles au plan des XY, on aura des courbes de formes très-variées.

Dans le cas particulier où la directrice de la surface représentée par l'équation (12) est un cercle, la surface devient une sphère sur laquelle la propriété se vérifie immédiatement, vu que les trois longueurs se confondent avec le rayon (14).

En éliminant la fonction arbitraire φ à l'aide de la méthode connue d'élimination des fonctions arbitraires, l'équation (12) donnera l'équation (8) et l'équation (14) donnera l'équation (9) ; ce qui doit être.

L'équation (14), dans le cas où la directrice est un cercle, donne une surface de révolution autour de l'axe des z, qui n'a qu'une nappe d'après la forme de la génératrice, et l'équation de la surface devient :

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(x^2+y^2)^2}{r^2},$$

r représentant le rayon du cercle.

Dans ce cas, les trois distances δ, δ', δ'' sont dans la section

méridienne, et l'on vérifie alors facilement que la condition (7) est remplie pour la courbe représentée par l'équation (18) en remplaçant le plan tangent à la surface par sa trace sur le plan méridien qui devient la tangente à la courbe.

On conclut facilement de ce que la condition (7) est vérifiée pour le cercle et la courbe représentée par l'équation (18), qu'elle est vérifiée pour les deux familles de surfaces précédemment indiquées; car

CT (*fig.* 34) étant la tangente à la courbe; $OC = \delta''_{,}$; $OP_{,} = \delta_{,}$; $CN_{,} = \delta'_{,}$, je dis que si on a $\delta''^{2}_{,} = \delta_{,}\delta'_{,}$, la même formule aura lieu pour un plan quelconque mené par la tangente CT. En effet, soit TAB ce plan; $OP = \delta$ la perpendiculaire à ce plan, et CN la partie de normale terminée au plan XY; l'angle $POP_{,}$ sera égal à l'angle $NCN_{,}$, puisque tous deux représentent les angles θ qu'une perpendiculaire au plan $POP_{,}$ fait avec ZOX. D'ailleurs angle $OPP_{,} = 90°$, de même angle $CN_{,}N = 90°$; donc $\delta = \delta_{,}\cos\theta$, $\delta' = \frac{\delta'_{,}}{\cos\theta}$ et $\delta\delta' = \delta_{,}\delta'_{,} = \delta''^{2}$. Ce qu'il fallait prouver.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les foyers et centres des coniques (*).

(V. p. 304.)

—

XIX. *Problème*. Connaissant trois points et le foyer d'une conique à centre, trouver une équation de cette courbe, et les coordonnées du centre.

Solution. Soient A, B, C, F les trois points et le foyer

(*) A la fin de cet article, on donnera les solutions géométriques de Newton.

donnés ; prenons ce foyer pour origine et les axes rectangulaires ; soient y', x'; y'', x''; y''', x''' les coordonnées des points A, B, C; l'équation cherchée est

$$(y^2+x^2)(k^2+k'^2-ml)=(k'y+kx-l)^2, \text{ (v. t. II, p. 427)},$$

à laquelle on peut donner la forme $y^2+x^2=(My+Nx+P)^2$; faisons $y'^2+x'^2=r'^2$, $y''^2+x''^2=r''^2$, $y'''^2+x'''^2=r'''^2$; on obtient ces trois équations

$$My'+Nx'+P=r',$$
$$My''+Nx''+P=r'',$$
$$My'''+Nx'''+P=r''',$$

nous supprimons le double signe de r qu'il faut toujours supposer. Les formules de Cramer donneront

$$P=\frac{r'[y''x'''-x''y''']+r''[y'''x'-x'''y']+r'''[y'x''-x'y'']}{Q},$$

$$N=\frac{r'[y'''-y'']+r''[y'-y''']+r'''[y''-y']}{Q},$$

$$M=\frac{r'[x''-x''']+r''[x''-x']+r'''[x'-x']}{Q},$$

$$Q=y'x''-y'x'''-y''x'+y''x'''+y'''x'-y'''x''.$$

Observation. 1° $y'x''-x'y''$, est le double de l'aire du triangle FAB, etc.; Q est le double de l'aire du triangle ABC de sorte qu'on a $P=\frac{r.\text{FBC}+r'.\text{FAC}+r'''.\text{FAB}}{\text{ABC}}$, quantité facile à construire, ainsi que M et N.

Observation. 2° L'équation de la courbe est

$$y^2(1-M^2)-2MNxy+x^2(1-N^2)-2PMy-2PNx-P^2=0. \quad (1)$$

Les fonctions élémentaires de la courbe sont (t. I, p. 489)

$$m=4(M^2+N^2-1),$$
$$k=-4PN,$$

$$k = -4PM,$$
$$l = 4P^2 = l',$$
$$n = 0,$$
$$L = 4P^2.$$

Ainsi pour que la courbe soit une ellipse, il faut que l'on ait $M < 1 > N$; pour l'hyperbole $M^2 + N^2 > 1$; pour la parabole $M^2 + N^2 = 1$.

Observation. 3° Passons aux coordonnées polaires, soit

$$x' = r'\cos\varphi',\ y' = r'\sin\varphi',\ x'' = r''\cos\varphi'',\ y'' = r''\sin\varphi'',$$
$$x''' = r'''\cos\varphi''',\ y''' = r'''\sin\varphi''',$$

il vient

$$PQ = r'r''r'''[\sin(\varphi''-\varphi''') + \sin(\varphi'''-\varphi') + \sin(\varphi'-\varphi'')],$$
$$Q = r'r''\sin(\varphi'-\varphi'') + r'r'''\sin(\varphi'''-\varphi') + r''r'''\sin(\varphi''-\varphi'''),$$
$$MQ = r'\cos\varphi'[r''-r'''] + r''\cos\varphi''[r'-r'''] + r'''\cos\varphi'''[r''-r'],$$
$$NQ = r'\sin\varphi'[r'-r''] + r''\sin\varphi''[r''-r'] + r'''\sin\varphi'''[r'-r''].$$

Si l'on prend la droite r' pour axe des x, alors $\varphi' = 0$; et les valeurs de M, N, P, Q sont entièrement déterminées par les côtés et les diagonales, les angles, et l'aire du quadrilatère FABC.

Observation. 4° L'ordonnée à l'origine est $\frac{-P}{M \pm 1}$, l'équation de la directrice est $My + Nx + P = 0$, la distance de l'extrémité de l'ordonnée à l'origine, à la directrice est $\frac{-P}{(M \pm 1)\sqrt{M^2+N^2}}$, donc $\sqrt{M^2+N^2} = \frac{c}{a}$; c est l'excentricité et a le $\frac{1}{2}$ axe focal; la distance du foyer à la directrice est $\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2}}$, donc $\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2}} = \frac{a^2}{c}$; de là $P = a$; $c = P\sqrt{M^2+N^2}$, $\frac{b}{a} = \sqrt{1-M^2-N^2}$, $b = \frac{1}{2}$ petit axe.

(*Voir* Roguet, t. I, p. 137).

$$a=\frac{\sin(\varphi''-\varphi''')+\sin(\varphi'''-\varphi')+\sin(\varphi'-\varphi'')}{\frac{\sin(\varphi''-\varphi''')}{r'}+\frac{\sin(\varphi'''-\varphi')}{r''}+\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{r'''}}.$$

Observation. 5° Ce problème est très-important en Astronomie. Connaissant trois observations d'une planète, rapportée au plan de son orbite, on peut déterminer les éléments géométriques de l'orbite. (*Voir* Leathéric, *Ann. de Gergonne*, t. XVII, p. 366)

XX. *Problème*. Connaissant quatre points d'une conique, trouver le lieu des foyers.

Solution. Adoptons les mêmes données et les mêmes notations qu'au problème I (p. 260); et supposons qu'il s'agisse de l'équation d'une conique passant par trois points, et dont le centre a pour coordonnés t, u; l'équation (1) (p. 261), sera celle de la courbe.

Calculons les éléments de cette courbe ; on aura

$$m=(2u-q)(2t-p)(pq-2pu-2qt),$$
$$k=mt,\ k'=mu,\ l=q^2t^2(2t-p)^2,\ l'=p^2u^2(2u-q)^2,$$
$$n=pqtu(2t-p)(2u-q),$$
$$\mathrm{L}=tu(2t-p)(2u-q)(pq-2pu-2qt)(pq-pu-qt),$$
$$\mathrm{N}=t(2t-p)+u(2u-q)-(2t-p)(2u-q)\cos\gamma\,;$$

désignant par α et β les coordonnées du foyer, on aura

$$\left.\begin{array}{l}2(\mathrm{A}-\mathrm{C})(\alpha-t)(\beta-u)+(\alpha-t)^2[\mathrm{B}-2\mathrm{C}\cos\gamma]+\\ \quad+(\beta-u)^2(2\mathrm{A}\cos\gamma-\mathrm{B})=0\ \text{(t. II, p. 429)},\end{array}\right\}\quad(1)$$
$$m^2[(\beta-u)^2\cos\gamma+(\alpha-t)(\beta-u)]=2\mathrm{L}(2\mathrm{C}\cos\gamma-\mathrm{B}),\quad(2)$$
$$\mathrm{A}=t(2t-p),\ \mathrm{B}=-(2u-q)(2t-p),\ \mathrm{C}=u(2u-q).$$

Mais la conique devant passer par un quatrième point, ayant pour coordonné x', y', on a encore entre u et t, cette équation

$$\left.\begin{array}{l}t(2t-p)y'^2-(2u-q)(2t-p)x'y'+u(2u-q)x'^2-\\ \quad-qt(2t-p)y'-pu(2u-q)x'=0.\end{array}\right\}\quad(3)$$

L'équation (1) est du quatrième degré, l'équation (2) est du huitième degré, et l'équation (3) du deuxième degré en u et t; éliminant u et t entre ces équations, on parvient à une équation entre α et β, qui peut monter au soixante-quatrième degré et ce qui n'a rien de surprenant; car chaque conique ayant quatre foyers analytiques (t. II, p. 429), l'équation finale peut renfermer des facteurs de degré pair réel, correspondant aux foyers imaginaires; circonstance qui rend toujours compliquées les solutions analytiques, où il s'agit de déterminer des foyers; tandis que le centre, point unique, donne des solutions simples; il en est de même pour le foyer dans la parabole, ainsi que nous le verrons plus loin.

XXI. *Problème.* Connaissant deux points d'une conique, une tangente et un foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient x', y'; x'', y'', les coordonnées rectangulaires des deux points, et le foyer à l'origine; et soit $dy+ex+f=0$, l'équation de la tangente, même notation que pour le problème (XIX): on a ces trois équations

$$My'+Nx'+P=r',$$
$$My''+Nx''+P=r'',$$
$$P^2(d^2+e^2)-2P(dM+eN)+f^2(M^2+N^2-1)=0 \quad \text{(t. II, p. 108)}.$$

Éliminant M et N entre ces trois équations, on arrive à une équation du second degré en P; il y a donc telles données qui peuvent rendre le problème impossible.

XXII. *Problème.* Connaissant trois points d'une conique, et une tangente, trouver le lieu des foyers.

Solution. Même notation qu'au problème XX, et soit de plus $dy+ex+f=0$ l'équation de la tangente, nous avons encore les mêmes équations (1) et (2); mais l'équation (3) sera remplacée par celle-ci :

$$l'd^2-2den+le^2+mf^2+2f(dk'+ek)=0 \quad \text{(t. II, p. 108)}.$$

Cette équation est du quatrième degré en u et t; donc l'élimination des deux variables u est entre les trois variables peut donner une équation entre α et β du 128[e] degré.

XXIII. *Problème*. Connaissant un point d'une conique, une tangente avec le point de contact et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soit x', y' les coordonnées rectangulaires du point; $d(y-y'')+e(x-x'')=0$, l'équation de la tangente y'' et x'' sont les coordonnées du point de contact; l'origine est au foyer; on a les mêmes équations que pour le problème XXI; dans la dernière équation, il faut remplacer f par $-dy''-ex''$.

XXIV. *Problème*. Connaissant deux points d'une conique, une tangente avec le point de contact, trouver le lieu des foyers.

Solution. La même que pour le problème XXII; il faut remplacer f par $-dy'-ex''$.

XXV. *Problème*. Connaissant un point d'une conique, deux tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient $dy+ex+f=0$, $d'y+e'x+f'=0$, les équations des tangentes; axes rectangulaires; origine au foyer, on a pour déterminer M, N, P les trois équations

$$My'+Nx'+P=r', \qquad (1)$$
$$P^2(d^2+e^2)-2Pf(dM+eN)+f^2(M^2+N^2-1)=0, \qquad (2)$$
$$P^2(d'^2-e'^2)-2Pf'(d'M+e'N)+f'^2(M^2+N^2-1)=0. \qquad (3)$$

On parvient par élimination à une équation en P du quatrième degré.

XXVI. *Problème*. Connaissant deux points d'une conique et deux tangentes, trouver le lieu des foyers.

Solution. On obtient la solution au moyen de l'équation (2) de la page 263.

XXVII. *Problème.* Étant données trois tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Axes rectangulaires, origine au foyer;

$$dy+ex+f=0,\ d'y+e'x+f'=0,\ d''x+e''y+f''=0;$$

équations des trois tangentes, aux équations (2) et (3) du problème XXV, il faut joindre celle-ci

$$P^2(d''^2+e''^2)-2Pf''(d''M-e''N)+f''^2(M^2+N^2+1)=0,$$

et on parvient à une équation finale en P du huitième degré.

(*La suite prochainement.*)

DE LA DIVISION ABRÉGÉE.

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége de Strasbourg.

—

J'ai prouvé (*Arithm.*, 2[e] éd. page 106 et suiv.), que la division ordonnée de Fourier donne le quotient à une unité près (en plus ou en moins), toutes les fois que le diviseur désigné n'est pas moindre que neuf fois le nombre des chiffres du quotient. L'ouvrage de M. Guy, annoncé dans le cahier d'avril (p. 208), m'a conduit à réfléchir sur la méthode abrégée ancienne, et j'ai à cet égard découvert un théorème que voici.

Si, à la droite du diviseur on supprime successivement un certain nombre de chiffres, et qu'à la droite du dividende, on supprime d'un coup le même nombre de chiffres, le quotient sera exact à une unité près (en plus ou en moins), *toutes les fois que le dernier diviseur ne sera pas moindre que la somme*

des chiffres successivement supprimés au diviseur total. Soit D le diviseur total, d son chiffre de droite ; posons

$$\left.\begin{array}{ll} D = D_1 10 + d_1, & \\ D_1 = D_2 10 + d_2,\ d_2 \text{ chiffre de droite de } D_1, & \\ \vdots & \\ D_{n-1} = D_n 10 + d_n,\ d_n, \ldots & D_{n-1}, \\ \vdots & \\ D_{i-1} = D_i 10 + d_i,\ d_i, \ldots & D_{i-1}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

soit D_i le dernier diviseur. On a

$$D = D_i 10^i + d_{i-1} 10^{i-1} + \ldots + d_2 10 + d_1.$$

Ce que j'écrirai sous forme plus abrégée, ainsi

$$D = D_i 10^i + (d_i d_{i-1} \ldots d_2 d_1), \qquad (2)$$

$d_i d_{i-1} \ldots$ étant des chiffres écrits dans le système de numération. J'emploierai cette manière d'écrire, en y ajoutant les parenthèses.

Soit C_1 le chiffre que fournit au quotient le diviseur D_1,

$C_2 \ldots\ldots$ D_2,

$\vdots$

$C_i \ldots\ldots$ D_i.

Les produits qui n'ont pas été retranchés du dividende, sont les suivants :

Celui de C_1 par d_1, et comme C_1 est le chiffre de rang i ; au quotient, ce produit vaut $C_1 \times d_1 10^{i-1}$,
celui de C_2 par $(d_2 d_1)$ qui vaut $C_2 \times (d_2 d_1) 10^{i-2}$,
enfin celui de C_i par $(d_i d_{i-1} \ldots d_1)$, valant $C_i \times (d_i d_{i-1} \ldots d_2 d_1)$.

J'appelle S la somme de ces produits, et j'ai

$$S = C_1 \times d_1 10^{i-1} + C_2 \times (d_2 d_1) 10^{i-2} + \ldots + C_i \times (d_i d_{i-1} \ldots d_2 d_1). \quad (3)$$

Soit R_1 le reste fourni par le diviseur tronqué D_1, reste qui est le dividende de D_2.

R_i le reste fourni par le diviseur D_i ;

R_i suivi des chiffres négligés au dividende, forme le reste

total, que je nomme R; si a_i, a_{i-1},... a_1 sont les chiffres en question, on a

$$R = R_i 10^i + (a_i a_{i-1} \ldots a_1), \qquad (4)$$

et R $-$ S serait le reste trouvé par la méthode rigoureuse.

Je fais provisoirement abstraction du cas singulier où il se trouve un dividende $>$ le décuple de son diviseur : ainsi $R_i < D_i$ et $R < D$; si donc S est aussi $< D$, le quotient sera exact à une unité près, en plus ou en moins. Mais dans ce cas, chaque chiffre du quotient est au plus 9, donc d'après (3);

$$S \overset{=}{<} 9[d_1 10^{i-1} + (d_2 d_1) 10^{i-2} + \ldots + (d_i d_{i-1} \ldots d_1)]. \qquad (5)$$

Il y a ici un chiffre d_1 à chaque rang, depuis le premier à droite jusqu'au rang i, ce qui fait un nombre composé de i chiffres d_1 consécutifs; ce nombre $\times$ 9, donne un produit moindre que $d_1 10_i$.

Il y a un chiffre d_2 à chaque rang, depuis le second à droite jusqu'au rang i, en multipliant par 9, on a donc à fortiori un produit $< d^i 10_i$.

Enfin le chiffre d_i au rang i, multiplié par 9, donne un résultat $< d_i 10^i$. Donc $S < 10^i[d_i + \ldots + d_1]$, et pour que S soit $< D$ qui $\overset{=}{>} D_i 10^i$, il suffit que

$$D_i \overset{=}{>} d_i + \ldots + d_1, \text{ c. q. f. d.} \qquad (6)$$

Mais on ne sait si $R - S$ est < 0 ou > 0.

J'arrive au cas où il y a un dividende $\overset{=}{>}$, à 10 fois son diviseur. Soit le diviseur $D_{n-1} = D_n .10 + d_n$; son reste peut être $D_n .10 + d_n - k$, k étant au moins $=1$; le diviseur suivant est D_n, et par suite, si on prend pour quotient 9, le reste sera $D_n + d_n - k = D_{n+1}.10 + d_{n+1} + d_n - k$; celui qui est divisé par D_{n+1} donne pour quotient 9, et pour reste

$_{n+1} + d_{n+1} + d_n - k$; continuant ainsi, on aura $R_i = D_i +$ $_i + d_{i+1} + \ldots + d_n - k < 2D_1$, d'après (6). Ainsi

$$R = (D_i + d_i + \ldots + d_n - k)10^i + (a_i \ldots a_1) < 2D. \quad (7)$$

Comme d'ailleurs $S < D$, le quotient est approché à moins le deux unités près ; je dis qu'il l'est en moins ; car en vertu le ce que $S < 10^i (d_i + \ldots + d_1)$,

$$R - S > (D_i - d_{n-1} - \ldots - d_1 - k)10^i + (a_i \ldots a_1),$$

t comme $k < d_n$, et que $D_i \overset{=}{>} d_i + \ldots + d_n + \ldots + d_1$, $R - S$ est > 0. Donc il s'ensuit qu'en admettant pour C_n, le quotient 10, ce qui augmentera le chiffre précédent d'une unité, et faisant $C_{n+1} = \ldots = C_i = 0$, on a encore le quotient à une unité près, mais on ne sait s'il est en plus ou en moins.

QUESTIONS.

1° *Une parabole assujettie à rester constamment tangente à deux droites rectangulaires fixes, son foyer glissant constamment sur une circonférence dont le centre est à l'intersection des deux axes. On demande le lieu des sommets ;*

2° *Une droite de longueur constante glisse sur deux axes rectangulaires. Lieu des intersections successives de cette droite avec elle-même ;*

3° *Un cercle roule intérieurement sur une circonférence de rayon quatre fois plus grand. Lieu d'un point de celle-ci.*

Prouver que ces trois lieux sont identiques.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

1° Soit F (*fig.* 30), le foyer dans une position particulière

(α, β) ; j'abaisse sur les axes, les perpendiculaires FC, FB et la ligne BC sera la tangente au sommet de la parabole. La perpendiculaire FO abaissée sur cette droite, donnera le point O pour le sommet ; les équations de CB et de OF sont

$$(1) \qquad (CB) \qquad \alpha y + \beta x = \alpha\beta,$$
$$(2) \qquad (FO) \qquad \beta y - \alpha x = \beta^2 - \alpha^2,$$
$$(3) \qquad \text{de plus} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

r est le rayon du cercle donné.

Des deux premières on tire

$$r^2 y^3 = \beta^3, \qquad r^2 x = \alpha^3,$$
$$\beta = \sqrt[3]{r^2 y}, \qquad \alpha = \sqrt[3]{r^2 x};$$

donc en substituant dans l'équation du cercle, il vient

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

pour le lieu cherché.

2° Soit AB (*fig.* 31), la droite de longueur constante r, l'équation de AB est ici

$$(4) \qquad \alpha y + \beta x = \alpha 6.$$

Si la droite prend une position un peu différente, α par exemple s'accroît, et β diminue d'une quantité infiniment petite, soient $d\alpha$ et $-d\beta$ ces quantités, l'équation de la droite devient

$$(\alpha + d\alpha) y + (\beta + d\beta) x = (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta),$$
$$\alpha y + d\alpha . y + \beta x + d\beta . x = \alpha\beta + \alpha d\beta + \beta d\alpha + d\alpha . d\beta,$$

simplifiant cette équation au moyen de l'équation (4), et négligeant l'infiniment petit du second ordre, l'équation devient

$$d\alpha . y + d\beta . x = \alpha d6 + \beta d\alpha,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\beta - y}{x - \alpha},$$

on a d'ailleurs

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

qui devient aussi

$$(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 = r^2,$$
$$\alpha^2 + 2\alpha d\alpha + (d\alpha)^2 + \beta^2 + 2\beta d\beta + (d\beta)^2 = r^2.$$

Simplifiant encore à l'aide de l'équation (5), et supprimant les infiniment petits du second ordre, il vient

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les deux dernières équations, il vient, toute réduction faite

$$(6) \qquad \beta y - \alpha x = \beta^2 - \alpha^2,$$

et il ne s'agit plus que d'éliminer α et β entre les équations (4), (5) et (6), qui ne sont autres que les équations (1), (2) et (4), et qui par conséquent donneront le même lieu

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

3° Soit OAB (*fig.* 32) un cercle ; CVM un autre tangent intérieurement, et de rayon quatre fois moindre; soit A l'origine du mouvement, et V le point du lieu, on aura arc CV = arc CA, donc CDV = 4COA.

Menons la ligne du centre OMDC, CV, et MV perpendiculaire, évidemment sur CV, et coupant les axes en Q et en P. Le triangle CMV, inscrit dans le cercle D montre que

$$MD = DV = DC,$$

donc

$$CDV = 2DMV,$$

il suit de là que

$$DMV = 2COA = COA + MDV,$$

donc

$$MDV = COA,$$
$$MO = MP;$$

mais $\quad MO = MC, \quad$ donc $\quad MP = MC,$

et le triangle CPO est rectangle.

On voit aisément que les triangles QPO et COP sont égaux, donc la figure OCPQ est un rectangle, et le point V est la projection du sommet C sur la diagonale QP, ce qui montre évidemment que ce lieu rentre dans le premier. Ainsi les trois lieux n'en font qu'un seul dont l'équation est

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Occupons-nous maintenant de discuter l'équation, et de construire la courbe (*fig.* 33). En la résolvant par rapport à y, on a

$$y = \pm \sqrt{\left(r^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

La courbe est donc symétrique, par rapport à l'axe des y, on voit aussi qu'elle l'est par rapport à l'axe des x, car l'équation est symétrique, en x et en y. La courbe se compose donc de quatre parties égales dans les quatre angles;

pour $\qquad x = 0, \quad y = r,$

à mesure que x croît, y décroît sans cesse, et enfin

pour $\qquad x = r, \quad y = 0,$

si on prend le coefficient angulaire

$$\text{tang}\, \alpha = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

On voit qu'il est toujours négatif, nul pour $y = 0$, infini pour $y = r$, donc la courbe est tangente aux axes en A et en B; de plus il n'y a pas de point d'inflexion, car à partir de $x = r, y = 0$, tang α croît indéfiniment depuis 0 jusqu'à $-\infty$, en restant sans cesse négative.

Si on mène la bissectrice OG de l'angle des axes, il est facile de voir que le point M où elle rencontre la courbe, est le milieu du rayon OG.

L'équation de la tangente est

$$y - y' = -\sqrt[3]{\frac{y'}{x'}}\,(x - x').$$

soit fait $y = 0$, pour avoir la distance de l'origine au pied de la tangente sur l'axe des x, on a

$$y'\sqrt[3]{x'} = \sqrt[3]{y'}\,x - \sqrt[3]{y'}.x',$$

$$x = x'^{\frac{1}{3}}y'^{\frac{2}{3}} + x' = x'^{\frac{1}{3}}\left(r^{\frac{2}{3}} - x'^{\frac{2}{3}}\right) + x' = x'^{\frac{1}{3}}\,r^{\frac{2}{3}},$$

donc

$$x^3 = r^2 x',$$

on aurait de même

$$y^3 = r^2 y',$$

donc

$$x^2 + y^2 = r^{\frac{4}{3}}x'^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{4}{3}}y'^{\frac{2}{3}} = r^2,$$

Ainsi la partie de la tangente comprise entre les axes est constamment égale au rayon du cercle circonscrit comme nous le savions déjà.

La valeur $x^3 = r^2 x'$, nous montre que cette courbe peut servir à résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles, car soient les proportions

$$r : x :: x : u,$$
$$x : u :: u : x',$$

on en tire

$$ru = x^2, \quad u^2 = xx',$$

d'où

$$x^3 = r^2 x', \quad u^3 = x'^2 r.$$

On voit donc que x se trouve ainsi connu; si on construit une courbe ayant pour génératrice la droite r, qu'on lui mène une tangente par le point dont l'abscisse est x', la distance comprise entre le centre et le pied de la tangente, sur l'axe des x, sera l'une des moyennes proportionnelles. Dès lors l'autre peut s'obtenir très-aisément.

Occupons-nous de la rectification ; on a

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}\,;$$

mais l'équation donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

donc

$$ds = \sqrt{\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}(dx)^2 + (dx)^2},$$

$$ds = \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}\sqrt{y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\,;$$

mais

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

donc

$$ds = r^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx,$$

donc

$$\int ds = r^{\frac{1}{3}} \frac{x^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} + C,$$

$$\int ds = \frac{3r^{\frac{1}{3}}}{2}\, x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Or si on fait $x = 0$ l'intégrale s'annule ; donc la constante est nulle

$$\int ds = \frac{3r^{\frac{1}{3}}}{2}\, x^{\frac{2}{3}}.$$

Si on veut avoir l'arc qui est le quart de la courbe, et compris entre les limites $x = 0$, $x = r$, on aura pour l'intégrale définie entre 0 et r,

$$\int_0^r ds = \frac{3r}{2},$$

donc la longueur du périmètre totale sera quadruple ou égale à 6 fois le rayon du cercle proposé.

Le quart de circonférence BGA a pour mesure $\frac{\pi r}{2}$, et cette quantité est plus grande que $\frac{3r}{2}$, car on a $\pi > 3$, donc l'arc de courbe BMA est un peu moins convexe que celui du cercle BGA (*).

LIEU DES INTERSECTIONS SUCCESSIVES

des ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position et son conjugué donné de grandeur seulement.

PAR M. HENRI FAURE,
élève en spéciales.

—

Soit $AB = 2a$ (*fig.* 29) le diamètre donné de grandeur et de position, $COC' = 2b$ son conjugué dans une des diverses positions qu'il peut prendre. Nous choisirons pour axe des x le diamètre AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point O à ce diamètre. De cette manière le lieu que nous obtiendrons devant être symétrique par rapport aux deux axes, l'équation qui le représente ne contiendra que les puissances paires des deux variables.

L'équation de l'ellipse qui passe par les points A, B, C, C', et qui a le point O pour centre, est de la forme :

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 - 1 = 0.$$

Nous allons déterminer les coefficients A, B, C pour une position particulière du diamètre CC'.

(*) Voir tome I, page 265 et tome II, page 342.

Posons tang BOC$=m$. Soient de plus x, y les coordonnées du point C.

Si dans l'équation (1) on fait $y=0$, $x=a$, on obtient :

$$Ca^2-1=0, \qquad \text{d'où} \qquad C=\frac{1}{a^2}.$$

Par un point quelconque K de CC' menons une parallèle à AB, en désignant par I et H les points où cette droite rencontre l'ellipse, on aura $IK=KH$. L'équation de la droite HIS étant de la forme $y=K$, si dans l'équation de l'ellipse nous faisons $y=K$, l'équation

$$Ak^2+Bkx+Cx^2-1=0,$$

donnera les abscisses des points d'intersection de la droite et de l'ellipse. Les coordonnées du point K satisfaisant à l'équation $y=mx$ de la droite CC', on a $KS=\frac{k}{m}$. Or KS est la demi-somme des racines de l'équation précédente ; donc $\frac{k}{m}=-\frac{Bk}{2C}$, et en remplaçant C par sa valeur, $B=-\frac{2}{a^2m}$.

En faisant $y=mx$ dans l'équation de l'ellipse, on a :

$$x^2=\frac{1}{Am^2+Bm+C} \qquad \text{et} \qquad y^2=\frac{m^2}{Am^2+Bm+C}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation $x^2+y^2=b^2$, puis remplaçant B et C par leurs valeurs, on tirera la valeur de A :

$$A=\frac{a^2(m^2+1)+b^2}{a^2b^2m^2}.$$

L'équation de l'ellipse devient donc :

$$(2) \quad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)m^2-2b^2xym+(a^2+b^2)y^2=0.$$

Si actuellement nous donnons à l'angle BOC un certain accroissement, la tangente de cet angle aura une certaine

valeur $m+h$, et l'équation de l'ellipse dans cette nouvelle position sera :

$$(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)(m+h)^2-2b^2xy(m+h)+(a^2+b^2)y^2=0.$$

Retranchant de cette équation l'équation (2), on a, après avoir divisé par h :

$$(3) \qquad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)(2m+h)-2b^2xy=0.$$

Tous les couples de valeurs de x et de y qui satisfont à la fois à l'équation (2) et (3) donnent les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses.

Si l'on suppose $h=0$, l'équation (3) se réduit à

$$(4) \qquad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)m-b^2xy=0,$$

et les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations (2) et (4) sont les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses dans deux positions consécutives du diamètre CC'. Si donc entre ces deux équations on élimine m, on aura l'équation du lieu géométrique cherché, puisque l'équation résultante donnera les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses dans deux positions consécutives quelconques du conjugué du diamètre AB.

Effectuant l'élimination, on a :

$$(a^2+b^2)y^2+b^2x^2-b^2(a^2+b^2)=0,$$

équation d'une ellipse dont les demi-axes sont b et $\sqrt{a^2+b^2}$.

DÉTERMINATION

des diviseurs rationnels du second degré.

PAR M. DURVILLE,
professeur au collége Saint-Louis.

—

L'extrême complication des calculs nécessaires pour la

séparation et la détermination des racines incommensurables d'une équation d'un degré même peu élevé, me dispense d'insister sur les avantages que peut présenter une méthode d'abaissement. Celle que je me propose d'exposer a pour but la recherche des diviseurs rationnels du second degré.

Soit $Fx = 0$ une équation du degré m, débarrassée de ses racines commensurables, ramenée à la forme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

et dont les coefficients sont entiers, les diviseurs rationnels du second degré devront avoir leurs coefficients entiers et seront de la forme $x^2 - px - q$.

Le quotient du polynôme Fx par $x^2 - px - q$ sera un polynôme entier ; si on représente par B_1, B_2 ..... le premier terme de chaque reste et par conséquent les coefficients successifs des termes du quotient, à partir du second, on aura les relations suivantes :

$$B_1 = p + A_1,$$
$$B_2 = pB_1 + q + A_2,$$
$$B_3 = pB_2 + qB_1 + A_3,$$
$$B_4 = pB_3 + qB_2 + A_4,$$
$$\vdots$$
$$B_{m-3} = pB_{m-4} + qB_{m-5} + A_{m-3},$$
$$B_{m-2} = pB_{m-3} + qB_{m-4} + A_{m-3}.$$

L'opération présentera un reste du premier degré $B_{m-1}x + B_m$ qui, devant être nul, quel que soit x, donnera les deux équations :

$$B_{m-1} = 0, \; B_m = 0,$$

et d'après la loi de formation :

$$B_{m-1} = pB_{m-2} + qB_{m-3} + A_{m-1} = 0,$$
$$B_m = qB_{m-2} + A_m = 0.$$

On peut, quel que soit le degré de l'équation donnée, éliminer les coefficients B_1, B_2, B_3,... etc., et obtenir les valeurs

des polynômes B_{m-1} et B_m en fonction des quantités p et q.

En effet, considérons les équations :

(1)	$B_h = pB_{h-1} + qB_{h-2} + A_h$	1
(2)	$B_{h-1} = pB_{h-2} + qB_{h-3} + A_{h-1}$	p
(3)	$B_{h-2} = pB_{h-3} + qB_{h-4} + A_{h-2}$	$p^2 + q$
(4)	$B_{h-3} = pB_{h-4} + qB_{h-5} + A_{h-3}$	$p^3 + 2pq$
	$B_{h-4} = pB_{h-5} + qB_{h-6} + A_{h-4}$	$p^4 + 3p^2q + q^2$
$\vdots$		$p^5 + 4p^3q + 3pq^2$
		$\vdots$
$(h-1)$	$B^2 = pB_1 + q + A^2$	$p^{h-1} + C_{h-2,1}p^{h-3}q + C_{h-3,2}p^{h-5}q$
(h)	$B_1 = q + A_1$	$p^h + C_{h-1,1}p^{h-2}q + C_{h-2,2}p^{h-4}q^2 + C_{h-3,3}p^{h-6}q^3 \ldots$

Multiplions l'équation (1) par 1, l'équation (2) par p, **l'équation (3) par $p^2 + q$,** l'équation (4) par $p^3 + 2pq$, et **ainsi de suite. La loi de ces fa**cteurs est évidente ; si on re**présente par a, b, c trois fa**cteurs consécutifs, le dernier **$c = pb + aq$. On pourrait, au** moyen du triangle de Pascal, **former ces facteurs. Le premi**er terme de chaque facteur a **l'unité pour coefficient, les co**efficients des seconds termes **sont la suite des nombres natu**rels, les coefficients des troi**sièmes termes sont les nombr**es figurés du second ordre, **ceux des quatrièmes termes so**nt les nombres figurés du troi**sième ordre et ainsi de suit**e. En général, le facteur par **lequel on devra multiplier** l'équation du rang K sera :

$$p^k + (k-1)qp^{k-2} + \frac{(k-2)(k-3)}{1 \quad 2} q^2 p^{k-4} + \text{etc.}\ldots$$

ou

$$p^k + C_{k-1,\,1}\,qp^{k-2} + C_{k-2,\,2}\,q^2p^{k-4} + C_{k-3,\,3}\,q^3p^{k-6}\ldots$$

dont le dernier terme sera $C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}\,q^{\frac{k}{2}}$ **si** k **est pair, et**

$C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}}\,pq^{\frac{k-1}{2}}$ **si k est impair.**

Si on ajoute toutes ces égalités après les avoir multipliées par les facteurs correspondants, les coefficients B_1, B_2..... disparaîtront et on aura :

$$B_h = \left\{\begin{array}{l|l|l|l} \;\;A_h & + A_{h-1} & p + \;\; A_{h-2} & p^2 + \;\; A_{h-3} \\ + A_{h-2}q & + 2A_{h-3} & + \; 3A_{h-4}q & + \; 4A_{h-5}q \\ + A_{h-4}q^2 & + 3A_{h-5} & + \; 6A_{h-6}q^2 & + 10A_{h-7}q^2 \\ + A_{h-6}q^3 & + 4A_{h-7} & + 10A_{h-8}q^3 & \\ \;\vdots & & \;\vdots & \end{array}\right| p^3 \ldots$$

$$\ldots\ldots + A_3 \left| p^{h-3} + A_2 \right| p^{h-2} + A_1 p^{h-1} + p^h$$
$$+ (h-2) A_1 q \quad\quad + (h-1) q$$

Si on fait $h = m - 1$ et qu'on ordonne par rapport aux puissances décroissantes de p, on aura :

$$B_{m-1} = \left\{\begin{array}{l|l|l} p^{m-1} + A_1 p^{m-2} + A_2 & p^{m-3} + A_3 & p^{m-4} \\ \quad\quad\quad\quad + (m-2)q & \quad + (m-3) A_1 q & \\ \quad + A_4 & p^{m-5} \ldots\ldots + A_{m-1} & \\ \quad + (m-4) A_2 q & \quad\quad\quad + A_{m-3}q & \\ \quad + (m-3)(m-4) q^2 & \quad\quad\quad + A_{m-5}q^2 & \\ & \quad\quad\quad\;\vdots & \end{array}\right\} = 0$$

Si on fait $h = m - 2$ et qu'on ajoute $\frac{A_m}{q}$, on aura :

$$\frac{B_m}{q} = \left.\begin{array}{l|l} p^{m-2} + A_1 p^{m-3} + A_2 & p^{m-4} \ldots\ldots + \frac{A_m}{q} \\ \quad\quad\quad\quad + (m-3)q & \quad\quad + A_{m-2} \\ & \quad\quad + A_{m-4}q \\ & \quad\quad + A_{m-6}q^2 \\ & \quad\quad\;\vdots \end{array}\right\} = 0$$

La loi de formation des termes de ces équations est facile à reconnaître.

Proposons-nous maintenant de déterminer les valeurs entières de p et q qui satisfont aux deux équations $B_{m-1} = 0$, $\frac{B_m}{q} = 0$. L'élimination de l'une des inconnues conduirait à

une équation finale du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, et exigerait des calculs qui seraient bientôt impraticables, si le degré de l'équation était un peu élevé. On peut, en suivant une méthode qui présente une très-grande analogie avec celle des racines commensurables, trouver immédiatement les solutions entières de p et q.

Je remarque que les valeurs entières de p et q, qui satisfont aux deux équations $B_{m-1}=0$, $\frac{B_m}{q}=0$ doivent aussi satisfaire aux équations

$$
\begin{aligned}
0 &= qB_{m-2} + A_m \\
0 &= pB_{m-2} + qB_{m-3} + A_{m-1} \\
B_{m-2} &= pB_{m-3} + qB_{m-4} + A_{m-2} \\
&\vdots \\
B_2 &= pB_1 + q + A_2 \\
B_1 &= p + A_1
\end{aligned}
$$

dans lesquelles les coefficients B_1, B_2, etc.... sont assujettis à être entiers ; et réciproquement les valeurs entières de p et q qui satisfont à ces m équations, en déterminant pour les coefficients B_1, B_2..... des valeurs entières, satisfont aux équations $B_{m-1}=0$ et $\frac{B_m}{q}=0$, et par conséquent sont les coefficients d'un diviseur du second degré du premier membre Fx de l'équation proposée.

Si on connaissait une valeur de q, en la substituant dans les deux équations $B_{m-1}=0$, $\frac{B_m}{q}=0$, celles-ci deviendraient fonctions de p seulement, et auraient au moins une racine entière commune : donc si on représente par G et H les termes indépendants de p dans ces deux équations, les valeurs entières de p correspondantes à la valeur de q devraient être des diviseurs communs de G et H.

De plus le quotient du premier membre $F(x)$, par le diviseur $x^2 - px - q$ devant être entier pour toute valeur entière donnée à x, $F(1)$ devra être divisible par $1-p-q$, et $F(-1)$ par $1+p-q$.

Ainsi on posera q égal à un diviseur de A_{m-1}, on substituera cette valeur dans les polynômes G et H,

$$G = A_{m-1} + A_{m-3}q + A_{m-5}q^2 + \text{etc.}\dots$$
$$H = \frac{A_m}{q} + A_{m-2} + A_{m-4}q + \text{etc.}\dots$$

On cherchera les diviseurs communs des deux nombres ainsi obtenus. Si à la valeur de q correspond une valeur entière de p, p devra être l'un de ces diviseurs. Les valeurs de p et q devront encore satisfaire aux deux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, N et N' représentant des nombres entiers. On substituera les valeurs de p et q qui auront rempli ces conditions dans les m équations ci-dessus qui devront être vérifiées et donner des valeurs entières pour les coefficients B_1, B_2.....

Supposons que l'on ait trouvé un couple de valeurs entières $p = \alpha$, $q = \beta$, c'est-à-dire qu'on ait déterminé un diviseur $x^2 - \alpha x - \beta$. Si $F_1(x)$ est le quotient de $F(x)$ par $x^2 - \alpha x - \beta$, on aura $F_1(x) = x^{m-2} + B_1 x^{m-3} + \dots + B_{m-3}x + B_{m-2}$, dont les coefficients sont connus. Si l'on procède à la recherche d'un nouveau diviseur, en représentant par C_1, C_2, C_3,... les premiers termes des restes de la division de $F_1(x)$ par $x^2 - px - q$, on aura les $m-2$ équations

$$0 = qC_{m-4} + B_{m-2},$$
$$0 = pC_{m-4} + qC_{m-5} + B_{m-3},$$
$$C_{m-4} = pC_{m-5} + qC_{m-6} + B_{m-4},$$
$$C_{m-5} = pC_{m-6} + qC_{m-7} + B_{m-5},$$
$$\vdots$$
$$C_2 = pC_1 + q + B_2,$$
$$C_1 = p + B_1.$$

Les polynômes G_1 et H_1, indépendants de p dans les deux équations qui résulteraient de l'élimination de C_1, C_2, C_3.... se formeront de G et H en remplaçant dans ceux-ci A_m, A_{m-1}..., par B_{m-2}, B_{m-3}..., ainsi

$$G_1 = B_{m-3} + B_{m-5}q + \text{etc}....$$
$$H_1 = \frac{B_{m-2}}{q} + B_{m-4} + B_{m-6}q^2 + \text{etc} ...$$

De l'équation $F(x) = (x^2 - \alpha x - \beta) F_1 x$, on tire en faisant successivement $x = 1$ et $x = -1$, $F_1(1) = \frac{F(1)}{1 - \alpha - \beta}$, $F_1(-1) = \frac{F(-1)}{1 + \alpha - \beta}$. Ainsi on aura immédiatement les valeurs de $F(1)$ et $F_1(-1)$: à chaque opération qui fera connaître un diviseur du second degré, le nombre des équations de condition diminuera de deux unités, les polynômes G_1, H_1, G_2, H_2 se réduiront, et les calculs iront en se simplifiant de plus en plus.

Pour éviter d'essayer les valeurs $p = 1$, $p = -1$, avec chacune des valeurs de q, on remarquera que si dans les équations $\frac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, on fait $p = 1$, on obtient $\frac{F(1)}{-q} = N$, $\frac{F(-1)}{2-q} = N'$, on devra donc avec $p = 1$, essayer seulement les valeurs de q qui satisfont à ces conditions, et de même avec $p = -1$, les valeurs de q qui remplissent les conditions $\frac{F(1)}{2-q} = N$, $\frac{F(-1)}{-q} = N'$.

Pour simplifier les calculs, il sera bon dans la pratique de commencer par déterminer les systèmes dans lesquels p et q sont différents de ± 1, ensuite de chercher ceux dans lesquels $q = \pm 1$, et enfin on procédera à la recherche de ceux dans lesquels $p = \pm 1$.

Application de la méthode précédente.

Soit l'équation

$$Fx = x^8 - 20x^7 + 100x^6 + 28x^5 - 466x^4 - 1440x^3 + \\ + 175x^2 + 222x - 40 = 0,$$

$$A \left\{ \begin{aligned} 0 &= qB_6 - 40, \\ 0 &= pB_6 + qB_5 + 222, \\ B_6 &= pB_5 + qB_4 + 175, \\ B_5 &= pB_4 + qB_3 - 1440, \\ B_4 &= qB_3 + qB_2 - 466, \\ B_3 &= pB_2 + qB_1 + 28, \\ B_2 &= pB_1 + q + 100, \\ B_1 &= p - 20; \end{aligned} \right.$$

$$G = 222 - 1440q + 28q^2 - 20q^3,$$

$$H = -\frac{40}{q} + 175 - 466q + 100q^2 + q^3,$$

$$F(1) = -1440,$$

$$F(-1) = 980,$$

q doit être un diviseur de 40.

1° $q = 2$,

les valeurs particulières de G et H sont :

$$G = -2706, \quad H = -369,$$

dont les diviseurs communs sont ± 3, ± 41.

Les solutions ($q = 2$, $p = 3$), ($q = 2$, $p = -3$), satisfont seules aux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, il convient de les substituer dans les équations (A).

Essayons d'abord ($q = 2$, $p = 3$). On aura :

$$B_6 = 20,$$

$$B_5 = -141,$$

$$B_4 = 134,$$

B_3 fractionnaire.

Donc ce système doit être rejeté. Il en est de même du système ($q=2$, $p=-3$), qui donne également pour B, une valeur fractionnaire.

$$2^\circ \qquad q=-2,$$

les valeurs de G et H sont :

$$G=3374, \qquad H=1519,$$

diviseurs communs ± 7.

Le système ($q=-2$, $p=7$) satisfait seul aux deux conditions $\dfrac{F(1)}{1-p-q}=N$, $\dfrac{F(-1)}{1+p-q}=N'$. Substituant ces valeurs dans les équations (A), on trouve

$B_6=-20$, $B_5=41$, $B_4=241$, $B_3=103$, $B_2=7$, $B_1=-13$,

donc Fx admet le diviseur x^2-7x+2.

Cherchons les autres diviseurs, on aura les équations de condition

$$B\quad\left\{\begin{aligned}
0 &= qC_4-20,\\
0 &= pC_4+qC_3+41,\\
C_4 &= pC_3+qC_2+241,\\
C_3 &= pC_2+qC_1+103,\\
C_2 &= pC_1+q+7,\\
C_1 &= p-13,
\end{aligned}\right.$$

$$G_1=41+103q-13q^2,$$

$$H_1=-\frac{20}{q}+241+7q+q^2,$$

$$F_1(1)=\frac{F(1)}{1-7+2}=-\frac{1440}{-4}=360,$$

$$F_1(-1)=\frac{F(-1)}{1+7+2}=\frac{980}{10}=98,$$

et q doit être un diviseur de $B_6=-20$.

-2 étant un diviseur de 20, on posera encore $q=-2$, à cette valeur ne peut répondre d'après ce qui précède que $p=7$, mais on s'assurera facilement que ce système doit

être rejeté, car $F_1(-1)$ n'est pas divisible par $1-p-q$.

$$3^\circ \qquad q=+4,$$
$$G_1=245, \quad H_1=280,$$

dont les diviseurs communs sont ± 5, ± 7.

Le système ($q=4$, $p=5$) est le seul qui remplisse les conditions $\dfrac{F_1(1)}{1-p-q}=N$, $\dfrac{F(-1)}{1+p-q}=N'$; mais substitué dans les équations (B), il donne pour C_3 une valeur fractionnaire.

$$4^\circ \qquad q=-4.$$
$$G_1=-579, \quad H_1=234,$$

diviseurs communs ± 3.

Le seul système qui doive être essayé est ($q=-4$, $p=-3$); substitué dans les équations de condition, on trouve les valeurs entières $C_4=-5$, $C_3=14$, $C_2=51$, $C_1=-16$, donc F_1x admet le diviseur x^2+3x+4.

Cherchons les diviseurs du second degré du quotient. On aura de même :

$$C \quad \begin{cases} 0=qD_2-5, \\ 0=pD_2+qD_1+14, \\ D_2=pD_1+q+51, \\ D_1=p-16, \end{cases}$$

$$G_2=14-16q, \quad H_2=-\frac{5}{q}+51+q,$$

$$F_2(1)=\frac{F_1(1)}{1+3+4}=45, \quad F_2(-1)=\frac{F_1(-1)}{1-3+4}=49,$$

d'ailleurs q doit diviser 5.

$$5^\circ \qquad q=+5,$$
$$G_2=-66, \quad H_2=+55,$$

diviseurs communs ± 11.

Le système ($q=+5$, $p=11$) satisfait seul aux deux

conditions $\frac{F_2(1)}{1-p-q}=N$, $\frac{F_2(-1)}{1+p-q}=N'$, et en substituant les valeurs de ce système dans les équations de condition (C), on obtient $D_2=1$, $D_1=-5$; donc $F_2(x)$ admet le diviseur $x^2-11x-5$, et le quotient est $x^2-D_1x+D_2$, ou x^2-5x+1: donc le premier membre de l'équation proposée est égal au produit

$$(x^2-7x+2)(x^2+3x+4)(x^2-11x-5)(x^2-5x+1).$$

Second exemple.

Soit l'équation

$$\begin{aligned}Fx = x^9 - 17x^8 + 93x^7 - 125x^6 - 340x^5 + 483x^4 +\\ + 1356x^3 - 1567x^2 + 500x - 44 = 0,\end{aligned}$$

équations de condition :

$$A\begin{cases}0 = qB_7 - 44,\\ 0 = pB_7 + qB_6 + 500,\\ B_7 = pB_6 + qB_5 - 1567,\\ B_6 = pB_5 + qB_4 + 1356,\\ B_5 = pB_4 + qB_3 + 483,\\ B_4 = pB_3 + qB_2 - 340,\\ B_3 = pB_2 + qB_1 - 125,\\ B_2 = pB_1 + q + 93,\\ B_1 = p - 17,\end{cases}$$

$$G = 500 + 1356q - 340q^2 + 93q^3 + q^4,$$

$$H = -\frac{44}{q} - 1567 + 483q - 125q^2 - 17q^3,$$

$$F(1) = 340,$$

$$F(-1) = -2880,$$

q doit être un diviseur de 44.

Soit $$q=+2,$$

$$G = 2612,\quad H = 1259,$$

pas de diviseurs communs.

$$q = -2,$$
$$G = -4300, \quad H = -2875,$$

diviseurs communs ± 5, ± 25.

Le seul système qui satisfasse aux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, est $(q = -2,\ p = +5)$: en le substituant dans les équations de condition (A), on trouve les valeurs entières $B_7 = -22$, $B_6 = 195$, $B_5 = -285$, $B_4 = -132$, $B_3 = 54$, $B_2 = 31$, $B_1 = -12$. Ainsi Fx est divisible par

$$x^2 - 5x + 2.$$

Nouvelles équations de condition :

$$\text{B} \left\{ \begin{aligned} 0 &= qC_6 - 22, \\ 0 &= pC_6 + qC_4 + 195, \\ C_6 &= pC_4 + qC_3 - 285, \\ C_4 &= pC_3 + qC_2 - 132, \\ C_3 &= pC_2 + qC_1 + 54, \\ C_2 &= pC_1 + q + 31, \\ C_1 &= p - 12. \end{aligned} \right.$$

$$G_1 = 195 - 132q + 31q^2 + q^3,$$
$$H_1 = -\frac{22}{q} - 285 + 54q - 12q^2,$$
$$F_1(1) = -170, \quad F_1(-1) = -360,$$

q doit diviser 22.

Il convient d'essayer encore $q = -2$, pour cette valeur

$$G_1 = 575, \quad H_1 = -430,$$

diviseurs communs ± 5.

Le système $(q = -2,\ p = +5)$ est le seul qui doive être essayé, car l'autre système $(q = -2,\ p = -5)$, a déjà été rejeté : substitué dans les équations B, il donne les valeurs

entières $C_5=-11$, $C_4=70$, $C_3=38$, $C_2=-6$, $C_1=-7$, donc x^2-5x+2, est encore diviseur.

Nouvelles équations de conditions :

$$\mathrm{C}\left\{\begin{array}{l} 0=qD_3-11, \\ 0=pD_3+qD_2+70, \\ D_3=pD_2+qD_1+38, \\ D_2=pD_1+q-6, \\ D_1=p-7, \end{array}\right.$$

$$G_2=70-6q+q^2,$$

$$H_2=-\frac{11}{q}+38-7q,$$

$$F_2(1)=-85, \quad F_2(-1)=-45,$$

et q doit être un diviseur de 11.

Soit donc $$q=+11,$$
$$G_2=125, \quad H_2=-40,$$

diviseurs communs ± 5.

Les deux systèmes ($q=+11$, $p=5$) ($q=+11$, $p=-5$), doivent être rejetés.

$$q=-11.$$
$$G_2=257, \quad H_2=116,$$

pas de diviseurs communs.

Il faut maintenant essayer les systèmes de valeurs dans lesquels $q=\pm 1$.

Pour $q=1$, $G_2=65$, $H_2=20$, diviseurs communs ± 5; les valeurs ($q=1$, $p=5$), ($q=1$, $p=-5$), satisfont aux conditions $\frac{F_2(1)}{1-p-q}=N$, $\frac{F_2(-1)}{1+p-q}=N'$, mais substituées dans les équations (C), elles ne les vérifient pas.

Pour $q=-1$, $G_2=77$, $H_2=56$, diviseurs communs ± 7. Le système ($q=-1$, $p=-7$), doit être rejeté, le second ($q=-1, p=7$) doit être essayé; substituant ces valeurs de p

et q dans les équations (C), elles sont satisfaites et donnent :

$$D_3 = -11, \quad D_2 = -7, \quad D_1 = 0.$$

Donc le quotient de $F_2(x)$ par x^2-7x+1 est $x^3-7x-11$; ainsi le premier membre de l'équation proposée.

$$Fx = (x^2 - 5x + 2)^2 (x^2 - 7x + 1) (x^3 - 7x - 11).$$

Je me propose dans un numéro prochain d'étendre la méthode précédente à la recherche des diviseurs rationnels du troisième degré.

THÉORÈME

sur les polaires des courbes du second degré.

PAR A. DESCOS,
Élève externe du Collége Louis-le-Grand.

—

Sur le plan d'une ligne du second ordre on donne trois points, non en ligne droite ; on construit les polaires de chacun de ces points par rapport à la courbe : ces polaires formeront par leurs intersections un triangle : on joint chacun des sommets du triangle au pôle du côté opposé ; les trois droites ainsi menées se coupent en un même point.

Soient A′, B′, C′ (*fig.* 43) les trois points donnés : BC, AC, AB, leurs polaires : il faut démontrer que AA′, BB′, CC′ passent en un même point.

Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ l'équation de la courbe, rapportée aux axes AB, AC, les deux coordonnées du point C′ pôle de la droite dont l'équation est

$$y = 0,$$

sont :

$$C' \begin{cases} x''' = \dfrac{DE - 2BF}{BE - 2CD} \\[2mm] y''' = \dfrac{4CF - E^2}{BE - 2CD} \end{cases}$$

Les deux coordonnées du point B' pôle de la droite dont l'équation est

$$x=0,$$

sont :

$$B'\left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{4AF-D^2}{BD-2AE} \\ y'' &= \frac{DE-2BF}{BD-2AE} \end{aligned}\right.$$

Je mène maintenant une droite arbitraire BC non parallèle aux axes ; l'équation de cette droite sera :

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1, \quad \text{ou} \quad y=-\frac{b}{c}x+b.$$

Ainsi on aura, pour déterminer x', y' coordonnées du pôle de la droite, les deux équations

$$\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D}=\frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{Dy'+Ex'+2F}{2Ay+Bx'+D}=-b,$$

ou bien

$$(2Ab-Bc)y'+(Bb-2Cc)x'=Ee-Db,$$
$$(2Ab+D)y'+(Bb+E)x'=-Db-2F;$$

d'où l'on tire :

$$A'\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(2AEb+DE-BDb-2BF)c-(D^2-4AF)b}{k} \\ y' &= \frac{(DE-2BF)b-(E^2-4CF-2CDb+BEb)c}{k} \end{aligned}\right. \quad (*).$$

Formons les équations des droites CC', AA', BB', nous aurons :

$$CC'\ldots(DE-2BF)y+[E^2-4CF+b(BE-2CD)]x=b(DE-2BF),$$
$$BB'\ldots[D^2-4AF+c(BD-2AE)]y+(DE-2BF)x=c(DE-2BF),$$
$$AA'\ldots[(2AEb+DE-BDb-2BF)c-(D^2-4AF)b]y,$$
$$-[(DE-2BF)b-(E^2-4CF-2CDb+BEb)c]x=0.$$

(*) Ces coordonnées sont calculées symétriquement, t. II, p. 304, XIX. Tm.

En multipliant la première équation par c, la seconde par b, et retranchant la seconde de la première, on trouve la troisième : donc l'une des équations est une conséquence des deux autres ; les trois équations admettant une solution commune, les droites qu'elles représentent se coupent au même point.

Remarque. Ce théorème généralise la propriété connue du triangle circonscrit à une courbe du second degré.

Note. Ce théorème est un cas particulier de cet autre théorème énoncé par M. Chasles (Gergonne, t. XIX, p. 65) : — Si par rapport à une même surface du second degré on prend les pôles des trois faces d'un angle trièdre, les plans conduits par ses arêtes et les pôles des faces respectivement opposées se coupent tous trois suivant la même droite.

En combinant le théorème de M. Descos avec la théorie des polaires et l'hexagramme de Pascal, on conclut que le système des côtés des triangles ABC, A'B'C' se coupant en neuf points, excluant les sommets ; les trois points donnés par les intersections des côtés AB, A'B' ; AC, A'C', BC, B'C' sont sur une même droite, et les six autres points sur une même conique. Tm.

THÉORÈME

sur le cercle principal de l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

PAR M. CH. EM. CASTEL,
élève du collége royal de Versailles.

—

Dans l'ellipse, le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque, comme diamètre, est tangent au cercle principal.

Démonstration géométrique. Soient F, F' (*fig*. 36) les deux

foyers de l'ellipse ; menons un rayon vecteur quelconque F'T. Si nous joignons F'T, et que nous prolongions cette ligne ; qu'en T nous menions la tangente à la courbe, et que du foyer F nous abaissions la perpendiculaire FB sur la tangente ; en la prolongeant jusqu'à la rencontre C de F'T ; le triangle TCF sera isocèle, à cause de la propriété qu'a la tangente d'être bissectrice de l'angle FTC. On aura donc FB = BC ; d'ailleurs FO = OF' ; donc la ligne OB est parallèle à F'C. A cause de ce parallélisme, on a donc FM : MT :: FO : OF' ; donc FM = MT ; le point M est donc le milieu du rayon vecteur FT, ce sera donc le centre du cercle décrit sur cette droite comme diamètre. D'un autre côté, la ligne OB est égale au demi-grand axe de l'ellipse ; le point B appartient donc au cercle principal ; il appartient aussi au cercle décrit sur TF comme diamètre ; puisque l'angle TBF est droit. D'ailleurs, il est situé sur la ligne des centres ; la distance des centres OM est égale à la différence des rayons ; donc les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

Démonstration analytique. Soient x', y' les coordonnées du point T ; cherchons l'équation du cercle décrit sur TF comme diamètre. Ce cercle a pour centre le point M dont les coordonnées sont $\frac{y'}{2}$ et $\frac{x'+c}{2}$, c étant l'abscisse du foyer. D'ailleurs, le rayon de ce cercle est MF ; son carré est donc égal à $\frac{y'^2}{4}+\frac{(c-x')^2}{4}$; on a donc pour l'équation de ce cercle :

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(x-\frac{x'+c}{2}\right)^2=\frac{y'^2}{4}+\frac{(c-x')^2}{4}$$

ou

$$y^2+x^2-yy'-x(x'+c)+\frac{(c+x')^2-(c-x')^2}{4}=0,$$

$$y^2+x^2-yy'-x(x'+c)+cx'=0. \qquad (1)$$

Combinons cette équation avec $x^2+y^2=a^2$ (2), afin d'avoir l'intersection du cercle qu'elle représente avec le cercle principal ; retranchons les deux équations l'une de l'autre, il vient :

$$yy'+x(x'+c)-cx'=a^2;$$

d'où l'on tire :

$$y'=\frac{a^2+cx'-x(x'+c)}{y'},$$

et en portant cette valeur dans l'équation (2), on aura, pour l'équation que donnent les x d'intersection :

$$x^2+\frac{(a^2+cx')^2+x^2(x'+c)^2-2x(x'+c)(a^2+cx')}{y'^2}=a^2,$$

$$x^2[y'^2+(x'+c)^2]-2x(c+x')(a^2+cx')+(a^2+cx')^2-a^2y'^2=0 \quad (3).$$

Examinons l'expression du binôme B^2-4AC ; nous aurons pour ce binôme :

$$(c+x')^2(a^2+cx')^2-[y'^2+(c+x')^2][(a^2+cx')^2a^2y'^2]$$

ou

$$y'^2[a^2y'^2+a^2(c+x')^2-(a^2+cx')^2]$$

ou

$$y'^2(a^2y'^2+a^2x'^2+a^2c^2-a^4-c^2x'^2), \qquad (4)$$

$$y'^2(a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2), \qquad (5)$$

quantité qui est nulle, puisque le point x', y' se trouve sur l'ellipse. Le premier membre de l'équation (3) est donc un carré parfait ; les deux racines sont donc égales, et par conséquent les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

Scolie. Remarquons que pour passer de l'ellipse au cas de l'hyperbole, on aurait absolument les mêmes calculs à faire ; seulement c^2 ne serait plus a^2-b^2, mais a^2+b^2 ; en remplaçant c^2 par cette valeur dans le polynôme (4), on obtient :

$$y'^2(a^2y'^2-b^2x'^2-a^2b^2).$$

La quantité entre parenthèses n'est autre chose que l'équa-

tion de l'hyperbole ayant a et b pour axes, dans laquelle x et y ont été remplacés par x' et y'. Si donc on suppose que le point x', y' appartient à l'hyperbole, cette quantité sera nulle. L'équation (3) aura donc aussi ses racines égales dans le cas de l'hyperbole, et par conséquent le cercle construit sur le rayon vecteur du point, est encore tangent au cercle qui a l'origine pour centre, et pour rayon le demi-axe a.

Corollaire. Soit F, F (*fig.* 37) les deux foyers, T un point de l'ellipse ; menons les deux rayons vecteurs FT, F'T ; et sur ces deux rayons vecteurs, comme diamètres, décrivons deux cercles qui seront tangents au cercle principal en C et en E. Aux points E et C menons les tangentes BD, DC au cercle principal, et joignons le point D, où ces tangentes se rencontrent, au point T. La ligne DT prolongée devra passer par le deuxième point d'intersection K des deux cercles : mais l'angle TKF est un angle droit ; donc la ligne DT est perpendiculaire sur l'axe des x.

On peut remarquer aussi que les trois points E, T, C, c'est-à-dire le point de la courbe et les points de contact du cercle principal avec les cercles décrits sur les deux rayons vecteurs de ce point, comme diamètres, sont en ligne droite.

En effet, les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente à la courbe, ont leurs pieds sur le cercle principal ; ces pieds doivent aussi se trouver sur les cercles qui ont pour diamètres les deux rayons vecteurs du point T ; ils se trouvent donc à la rencontre de ces cercles avec le cercle principal. Réciproquement les points de rencontre sont les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente au point T ; ils se trouvent donc sur cette tangente ; par conséquent ces points de rencontre et le point T sont en ligne droite.

Hyperbole. Nous avons étendu à l'hyperbole la démonstration analytique que nous avions donnée pour l'ellipse. On

peut aussi donner pour cette courbe une démonstration géométrique.

Menons les deux rayons vecteurs FT, F'T (*fig* 38) d'un même point, et en ce point menons la tangente à la courbe. Elle coupera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs. Si donc nous abaissons du foyer F une perpendiculaire sur cette tangente, en la prolongeant jusqu'à la rencontre de F'T, nous aurons FB = BC. D'ailleurs, OF=OF'; donc la ligne OB est parallèle à F'T ; elle divisera donc aussi en deux parties égales le rayon vecteur FT ; le point M où elle rencontre le rayon vecteur est donc le centre du cercle décrit sur ce rayon comme diamètre. Ce cercle passera en B. Comme OB est égal à la moitié de F'C, c'est-à-dire à a, le cercle principal passera aussi en B. La distance des centres de ces deux cercles est OM, les deux rayons OB et BM ; la la distance des centres est donc égale à la somme des rayons ; donc les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

On peut faire ici la même remarque que sur l'ellipse. Les tangentes au cercle principal, menées aux points de rencontre de ce cercle avec les deux autres, se coupent en un point qui est situé sur l'ordonnée du point T prolongée.

De plus, les points de contact des cercles se trouvent sur la tangente au point T.

Parabole. Enfin le même théorème s'étend aussi à la parabole. Mais alors le rayon du cercle principal est devenu infini ; la circonférence de ce cercle s'est transformée en une tangente à la courbe, au point où l'axe la coupe. Si l'on prend cette tangente pour axe des y, on pourra dire encore : que le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque, comme diamètre, est tangent à l'axe des y.

Démonstration géométrique. On sait que le pied de la perpendiculaire, abaissée du foyer sur la tangente, se trouve sur l'axe des y. Soit donc (*fig*. 39) B le point où la tangente

en un point quelconque T coupe l'axe des y; le cercle décrit sur le rayon vecteur FT, comme diamètre, passera par le point B. D'ailleurs, on sait que la hauteur AB est égale à la demi-ordonnée du point T; si donc par le point B on mène une perpendiculaire à l'axe des y, elle ira passer par le milieu N de l'ordonnée TK; par suite par le milieu du rayon vecteur TF, c'est-à-dire par le centre du cercle. Donc réciproquement le rayon MB est perpendiculaire sur l'axe des y; donc le cercle est tangent à cet axe. C. Q. F. D.

Démonstration analytique. Soit

$$y^2=2px$$

l'équation de la parabole. Menons le rayon vecteur d'un point x', y', et cherchons l'équation du cercle décrit sur ce rayon vecteur comme diamètre. Ce centre a pour centre un point dont les coordonnées sont $\frac{y'}{2}$ et $\frac{x'}{2}+\frac{p}{4}$; le carré de son rayon est $\frac{y'^2}{4}+\left(\frac{x'}{2}-\frac{p}{4}\right)^2$; son équation sera donc :

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(x-\frac{2x'+p}{4}\right)^2=\frac{y'^2}{4}+\frac{(2x'-p)^2}{16},$$

ou en développant, et faisant $x=0$, afin d'avoir l'intersection du cercle avec l'axe des y,

$$y^2-yy'+\frac{(2x'+p)^2-(2x'-p)^2}{16}=0,$$

$$y^2-yy'+\frac{px'}{2}=0.$$

Or on a $y'^2=2px'$; d'où $px'=\frac{y'^2}{2}$, l'équation devient donc :

$$y^2-yy'+\frac{y'^2}{4}=0.$$

Le premier nombre est un carré; les racines sont donc égales; donc le cercle est tangent à l'axe des y. C. Q. F. D.

Note. Soit O l'origine des coordonnées rectangulaires d'une

courbe algébrique plane, et M l'un des points de cette courbe ; quelle est l'enveloppe du cercle décrit sur OM comme diamètre? L'intersection de ce cercle avec la tangente en M est évidemment le point de contact du cercle avec son enveloppe. Car le point infiniment voisin de M est encore sur la tangente ; ainsi l'enveloppe cherchée est donc aussi le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes. Or, dans le théorème ci-dessus, on sait que le lieu est le cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre ; donc, etc. (voir t. II, p. 436). Tm.

RÉDUIRE A L'HORIZON L'ANGLE DE DEUX DROITES.

PAR M. A. EUDES,
professeur au collége royal d'Angers.

—

Pour abréger, désignons par V et H les plans de projection.

1er Cas. Aucune des deux droites n'est horizontale.

Soient AB, AC (*fig.* 40), ces deux droites qui se coupent au point A, et qui percent H respectivement en B et en C ; prenons pour V le plan vertical qui contient l'une des deux droites, AB par exemple ; en sorte que xy (*fig.* 1), étant la ligne de terre, et $A\alpha$ étant la verticale du point A, la droite AB fait en A avec $A\alpha$ l'angle $BA\alpha$, un des angles donnés ; la projection de AB est xy, il s'agit de trouver la projection de AC ; ce qui se réduit à trouver le point C où cette droite vient percer H, puisqu'alors αC sera cette projection et $B\alpha C$ sera l'angle demandé.

Concevons que le plan vertical qui contient AC tourne autour de $A\alpha$ comme axe pour venir s'appliquer sur V ; AC viendra se placer en AC', qui fait l'angle $C'A\alpha$, un des angles

donnés, et le point C dans ce mouvement n'étant pas sorti de H, qui est perpendiculaire à l'axe de rotation $A\alpha$ sera venu se placer en C', intersection de AC' avec xy, après avoir décrit dans H une circonférence dont le centre est α et le rayon $\alpha C'$; réciproquement le point C' rétabli dans sa véritable position se trouvera donc en quelque point de cette circonférence.

Un second rabattement de AC va nous donner un second lieu du point C.

Qu'on fasse tourner le plan même des droites (AB, AC), autour de AB pour l'appliquer sur V ; la droite AC viendra se placer en AC'' qui fait avec AB l'angle BAC'', le troisième des angles donnés, et le point C tombera à une distance AC'' égale à AC' ; ces deux longueurs sont les rabattements de la même distance AC.

En relevant ce point C'' pour le rétablir dans sa véritable position, il ne sortira pas du plan perpendiculaire à l'axe de rotation AB, perpendiculaire par conséquent à V, lequel plan a pour trace $C''\gamma$, perpendiculaire à AB ; le point C'' rétabli en sa vraie position, devra donc faire sa projection verticale en quelque point de cette trace $C''\gamma$; ce point devant d'ailleurs appartenir à H, sa projection verticale est quelque part sur xy; cette projection est donc le point γ d'intersection de la perpendiculaire $C''\gamma$ à AB avec xy.

Élevant alors en γ une perpendiculaire à xy, le point C sera l'intersection de cette perpendiculaire et de la circonférence ($\alpha C'$), et l'angle demandé sera $B\alpha C$.

Comme vérification on observe que BC'' est le rabattement de BC, et doit lui être égal.

La construction devient impossible si le point γ tombe en dehors du cercle ($\alpha C'$), et il en sera ainsi lorsque $BAC'' < BAC'$ ou lorsque $BAC'' > BAI$, c'est qu'en effet l'impossibilité est dans la question même ; les deux droites AB, AC dans leur

vraie position, forment avec la verticale $A\alpha$ un angle trièdre dont les trois faces $BA\alpha$, BAC, $CA\alpha$ doivent satisfaire aux conditions $BAC > BA\alpha + CA\alpha$ et $BAC < BA\alpha + CA\alpha$, lesquelles reviennent à $BAC'' > BAC'$ et $BAC'' < BAI$.

2° *Cas.* L'une des deux droites est horizontale ;

1° On prend pour V le plan vertical qui contient cette horizontale (AB par exemple).

La droite AB (*fig.* 41), sera dans ce cas parallèle à xy ; il n'y aura d'ailleurs rien à changer aux constructions précédentes, ainsi que l'indique la figure. $C'\alpha C$ sera l'angle cherché; la vérification seule manquera ; il y aura impossibilité dans les mêmes circonstances.

2° On prend pour V le plan vertical de celle des deux droites qui n'est pas horizontale de AB, par exemple.

Comme AC est horizontale et ne rencontre plus H ; on cherche les projections d'un point quelconque C de cette droite pris à une distance arbitraire AC du point A (*fig.* 42), en sorte que le premier rabattement autour de $A\alpha$ qui donnait dans les cas précédents la longueur de AC est ici inutile, puisque d'ailleurs la distance AC devant se projeter sur H en vraie grandeur, la projection horizontale de ce point C sera un des points de la circonférence décrite du point α comme centre avec AC pour rayon ; il suffira donc de rabattre AC autour de AB, puis la construction précédente s'appliquera en remarquant que la projection verticale du point C devant se trouver sur la parallèle à xy passant par le point A, sera à l'intersection (C') de cette parallèle et de la perpendiculaire $C''\gamma$ à l'axe AB ; en abaissant la perpendiculaire CC' à xy, le point d'intersection de cette perpendiculaire et de la circonférence (αC) sera la projection horizontale du point C, et l'angle $B\alpha C$ sera l'angle cherché. La vérification manquera encore et il y aura impossibilité dans les mêmes circonstances.

PROPRIÉTÉ DU FOYER DE LA PARABOLE.

PAR M. F. M. PAIGNON.

Si par le foyer d'une parabole, on mène une perpendiculaire à son axe et que l'on prenne, à partir du foyer, sur cette perpendiculaire, deux distances égales, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les tangentes est constant.

L'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

l'équation d'une tangente au point (x', y') sera

$$yy' = p(x + x').$$

La perpendiculaire δ abaissée du foyer sur cette tangente aura pour expression

$$\delta = \frac{p(p + 2x')}{2\sqrt{p^2 + y'^2}}.$$

Appelons $2b$ la distance des deux points pris sur la perpendiculaire à l'axe passant par le foyer ; la hauteur δ' du trapèze sera la projection de la ligne $2b$ sur la tangente ; on aura donc

$$\delta' = \frac{2pb}{\sqrt{p^2 + y'^2}},$$

on trouvera par conséquent pour la surface du trapèze

$$\delta\delta' = pb,$$

expression indépendante des coordonnées x', y' et qui démontre le théorème énoncé.

Cette propriété caractérise la parabole. En effet si l'on

cherche généralement quelle est la courbe telle que le trapèze compris entre la ligne qui joint deux points donnés, la tangente et les perpendiculaires abaissées de ces points sur la tangente, soit équivalent à un carré donné m^2, on trouve pour solution la parabole.

En prenant pour axes la droite qui joint les deux points donnés et la perpendiculaire élevée en son point milieu, l'équation différentielle de la courbe cherchée sera :

$$\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} \times \frac{2b}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = m^2,$$

on en déduit en posant

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$y = px + \frac{m^2}{2b}(1+p^2).$$

Différentiant, on a

$$\left(x + \frac{m^2}{b}p\right) dp = 0,$$

équation à laquelle on pourra satisfaire de deux manières :

1° En posant

$$dp = 0,$$

d'où

$$p = k;$$

(k désignant une constante arbitraire), et par suite

$$y = kx + \frac{m^2}{2b}(1+k^2),$$

intégrale générale qui représente un système de lignes droites ;

2° En posant

$$x + \frac{m^2}{b}p = 0,$$

solution singulière qui donne en intégrant

$$x^2 = \frac{2m^2}{b}\left(\frac{m^2}{2b} - y\right),$$

équation qui démontre le théorème énoncé. On démontrerait d'une manière analogue la proposition suivante et sa réciproque.

Si l'on prend sur l'axe d'une parabole et à partir du foyer deux distances égales, et que des points ainsi obtenus, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes, on formera un trapèze dont la surface variera en raison inverse de la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe, qui sera par conséquent minimum, quand on considérera la tangente au sommet, et qui n'aura pas de maximum.

Note. Ces propriétés sont des conséquences directes de cette proposition. L'aire d'un trapèze est double de l'aire du triangle qui a pour base un côté non parallèle et pour sommet le milieu du côté opposé. Dans le cas actuel ce milieu est sur la tangente au sommet de la parabole et dans les autres coniques il est sur le cercle à diamètre focal. Tm.

ANNONCES.

—

1. *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante.* Suivi des éléments du calcul différentiel résumés à un point de vue purement algébrique, par Ernest Lamarle, ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'Université de Gand. Liége, 1843, VIII, p. 128, in-8°, 1 pl.

En attendant l'analyse de cet ouvrage, nous transcrivons l'opinion d'un juge compétent, d'une grande autorité.

« M. Lamarle est bien connu de l'Académie pour divers travaux, et en particulier pour un mémoire sur la flexion des pièces chargées debout, dont elle a ordonné l'insertion dans le recueil des *Savants étrangers*. Le nouvel ouvrage qu'il donne aux géomètres, a surtout pour objet, comme son titre l'indique, l'étude approfondie des premiers principes de l'analyse transcendante, et de la métaphysique qui les éclaire et les domine. D'après le talent de l'auteur, élève distingué de l'école Polytechnique, on doit être assuré d'y trouver des remarques utiles pour l'enseignement, et des discussions philosophiques instructives pour les savants eux-mêmes, qui parfois négligent trop cette partie importante de la science. » (*Comptes rendus*, juin 1845, n° 22, p. 1642.) Nous croyons qu'on a singulièrement embrouillé cette métaphysique, en s'obstinant à définir l'infiniment petit, chose aussi indéfinissable que l'infiniment grand; et à vouloir rendre claire l'idée *certaine*, *innée*, du coefficient différentiel; le sentiment du *moi*, de *l'existence*, sont des notions qui ont le plus grand degré de certitude possible; qui peut les rendre claires? Les efforts que font les métaphysiciens pour expliquer *la certitude*, introduisent une source inépuisable d'obscurité dans toutes les sciences, sans en excepter les mathématiques.

Trigonométrie et géométrie analytique; par P. Lenthéric, professeur à la faculté des sciences et au collége royal de Montpellier. Ouvrage autorisé par le conseil royal de l'instruction publique, pour l'enseignement dans les colléges de l'Université. Montpellier, 1841, in-8°, p. 480, 5 pl., lith.; chez Bachelier, libraire à Paris.

Tous les ouvrages élémentaires étant rédigés aujourd'hui pour apprendre aux élèves à répondre aux examens, doivent avoir et ont en effet la même physionomie. Tous sont

modelés sur le programme des connaissances exigées pour l'école Polytechnique. Et comme la partie de ce programme, relative à la géométrie analytique, nous semble très-arriérée, l'enseignement l'est également; et il est heureux qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire, que l'enseignement réponde aux exigences officielles. Car le premier devoir d'un professeur, est de faciliter aux élèves l'entrée de la carrière et d'assurer leurs succès. L'ouvrage que nous annonçons renferme beaucoup de problèmes d'examen, et aussi quelques théories générales; nous citerons les méthodes pour la détermination des centres et des diamètres des courbes exprimées par des équations algébriques et rationnelles; pour mener des tangentes, pour trouver des asymptotes; les propriétés des diamètres conjugués sont démontrées sans le secours de la transformation des coordonnées; ce qui donne plus de rapidité, fait gagner du temps, économie si précieuse dans les examens. On remarque des facilités du même genre dans les formules trigonométriques.

THÉORÈMES DE M. CAUCHY ET D'EULER

Sur les réseaux polygonaux et sur les polyèdres,

d'après M. GRUNERT (Crelle, t. II, p. 367. 1827).

—

I. Soit un réseau polygonal situé ou non dans un même plan; et soit A le nombre des côtés, S le nombre des sommets et F le nombre des figures, supposons qu'il survienne une nouvelle figure de k côtés, ayant k' côtés en commun avec le premier réseau, et k'' non communs; représentons par A′, S′, F′ les nombres qui dans le second réseau sont analogues aux nombres C, S, F, dans le premier réseau. On a évidemment ces équations

$$k = k' + k'',$$
$$A' = A + k'',$$
$$F' = F + 1,$$
$$S' = S + k'' - 1.$$

Le nouveau réseau ayant k' côtés en communs, a aussi $k'+1$ sommets en commun, et par conséquent $k''-1$ sommets non communs; ce qui donne la quatrième équation, et l'on déduit $S'+F'-A'=S+F-A$; donc $S+F-A$ est constant; mais pour une seule figure $S=A$ et $F=1$; donc $S+F-A=1$; théorème de M. Cauchy.

II. Si dans un polyèdre de F faces, A arrêts et S sommets, nous supprimons une face, le polyèdre devient un réseau, le nombre des figures est $F-1$, donc $S+F-1+A=1$, ou $S+F=A+2$; théorème d'Euler. Tm.

QUESTION PROPOSÉE.

98. Soit n_3 le nombre des faces triangulaires; n_4 le nombre des faces quadrangulaires, etc., d'un polyèdre et N le nombre des diagonales du polyèdre; faisant

$$n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots = L,$$
$$1.3.n_3 + 2.4n_4 + 3.5n_5 + 4.6n_6 + \text{etc}\ldots = M,$$

on a
$$8N = (2+L)(4+L) - 4M,$$

et pour les polyèdres réguliers, en particulier

	N
Tétraèdre.....	0,
Hexaèdre.....	4,
Octaèdre......	3,
Dodécaèdre...	100,
Icosaèdre.....	36,

(Gentil, *chef d'institution*.)

GRAND CONCOURS DE 1845. (*V.* t. III, p. 377).

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

Mathématiques spéciales.

Étant donné un cercle, et un point situé dans son intérieur, on imagine que sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe, et qui passe par le point donné; on demande 1° l'équation générale de ces ellipses; 2° le lieu géométrique de leurs foyers; 3° le lieu des extrémités de leurs petits axes.

Mathématiques élémentaires.

Soient dans un même plan deux cercles qui ne se coupent point, O et O′ leurs centres, AB, A′B′ leurs diamètres, qui tombent tous deux sur la droite qui passe par les deux centres.

1° On demande de prouver qu'il existe sur cette droite, deux points C et D, tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle est égal au carré du rayon de ce cercle, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = \overline{\mathrm{OA}}^2, \quad \mathrm{O'C}.\mathrm{O'D} = \overline{\mathrm{O'A'}}^2.$$

2° Soit comme dans la figure le cas où l'un des cercles O tombe en dedans de l'autre O′; on peut d'un point P pris sur le diamètre AB du cercle intérieur, élever à ce diamètre une perpendiculaire qui rencontre les deux cercles en M et M′ : or si l'on considère les distances de ces points à l'un ou à l'autre des deux points C et D ci-dessus déterminés, et par exemple au point C, on demande de prouver que le

rapport de ces distances est constant, quelle que soit la position du point P, et que le carré de ce rapport est égal au rapport des distances du point C aux centres des deux cercles, c'est-à-dire, que l'on a

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CM'}^2} = \frac{CO}{CO'}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

99. Soient un hyperboloïde, son cône asymptotique et un plan principal commun ; tout plan tangent à l'hyperboloïde, perpendiculaire au plan principal, retranche du cône asymptotique un cône fermé, de volume constant ; démontrer le théorème général dont celui-ci est un corollaire.

Tm.

100. Soit un arc continu, sans points singuliers, et sa corde ; si l'on joint le point de l'arc où la tangente est parallèle à la corde, aux deux extrémités de la corde, on forme un triangle dont l'aire est plus grande que la moitié de l'aire du segment.

101. Quatre droites dans un même plan forment quatre triangles ; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs, les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

102. Quatre points situés sur une circonférence sont, pris trois à trois, les sommets de quatre triangles ; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs ; ces quatre points sont sur une seconde circonférence égale à la première.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les foyers et centres des coniques.

(Suite. V. p. 338.)

XXVIII. *Théorème.* Le lieu des foyers d'une conique, passant par un point fixe et touchant trois droites dans un même plan, est une ligne du sixième degré.

Démonstration. Prenons les données et la notation relatives au théorème XV (p. 307), on a donc l'équation

$$(ty' - ux')^2 + 2un'x' + 2tn'y' + n'^2 - 2n'x'y' = 0, \quad (1)$$

soient α, β les coordonnées du foyer, nous avons trouvé :

$$\beta^2 \cos\gamma + \alpha\beta = \frac{2L}{m^2}(2C\cos\gamma - B),$$

$$\alpha^2 \cos\gamma + \alpha\beta = \frac{2L}{m^2}(2A\cos\gamma - B) \text{ (t. II, p. 429)};$$

mais ces valeurs de α et β sont relatives au centre placé à l'origine ; dans le cas actuel, il faut remplacer α et β par $\alpha - t$ et $\beta - u$, et considérant que $l = l' = 0$, et alors $\frac{4AL}{m^2} = t^2$, $\frac{4CL}{m^2} = u^2$, $\frac{4BL}{m^2} = -2ut - 2n'$; faisant ces substitutions, il vient :

$$\left.\begin{aligned} \alpha u + (2\alpha\cos\gamma + \beta)t &= \alpha^2\cos\gamma + \alpha\beta - n' \\ (2\beta\cos\gamma + \alpha)u + \beta t &= \beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - n' \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

On a de plus :

$$-2den' + f^2 + 2fdu + 2eft = 0, \quad (3)$$

où

$$n' = a + bt + cu,$$

a, b, c sont des quantités connues, les équations (2) deviendonc :

$$u(\alpha+c)+t(2\alpha\cos\gamma+\beta+b)=\alpha^2\cos\gamma+\alpha\beta-a,$$
$$u(2\beta\cos\gamma+\alpha+c)+t(\beta+b)=\beta^2\cos\gamma+\alpha\beta-a;$$

d'où

$$\frac{u}{M}=\frac{t}{N}=\frac{1}{P},\ P=2(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2+b\beta+c\alpha),$$
$$M=\beta(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)+b(\beta^2-\alpha^2)-2a\alpha,$$
$$N=\alpha(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)+c(\alpha^2-\beta^2)-2a\beta.$$

Mettant la valeur de n' dans l'équation (1), elle prend cette forme :

$$A'u^2+B'ut+C't^2+D'u+E't+F'=0;$$

les coefficients sont connus ; remplaçant ensuite u et t par les valeurs trouvées, on obtient une équation du sixième degré en α et β, et qui est le lieu des foyers

Observation. Lorsque $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, les équations (2) se réduisent à une seule équation ; mais les valeurs qu'on a trouvées pour t et u subsistent toujours ; parce qu'on a divisé par $\cos\gamma$ les deux termes de la fraction qui donne la valeur soit de α, soit de β ; on peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat, en soustrayant les équations (2) membre à membre, l'une de l'autre, et on obtient :

$$2\beta u-2\alpha t=\beta^2-\alpha^2; \qquad (4)$$

équation qui ne dépend pas de γ.

XXIX. *Théorème* Le lieu des foyers d'une conique touchant quatre droites données est une ligne du troisième degré.

Démonstration. Même système de coordonnées que dans le paragraphe précédent ; le lieu des centres est une droite, soit $a'+b't+c'u=0$, l'équation de cette droite (p. 308), remplaçant t et u par leurs valeurs, il vient :

$$\left.\begin{array}{l}(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)(c'\beta+b'\alpha)+(\beta^2-\alpha^2)(cb'-b'c)-\\-2aac'-2a\beta b'+2a'(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2+b\beta+c\alpha)=0,\end{array}\right\}\quad(5)$$

équation du troisième degré, lieu des foyers.

La courbe passe par l'origine, c'est-à-dire par l'intersection de deux côtés du quadrilatère ; elle passe donc également par les cinq autres points d'intersections, ce qu'on pouvait prévoir. Car, chaque diagonale représente une conique satisfaisant à la question, et ayant son centre au milieu de la diagonale, et ses foyers aux extrémités.

La courbe n'a qu'une asymptote, parallèle à la droite des centres ; deuxième espèce d'Euler, et comprenant les sept hyperboles *défectives* de Newton, parmi lesquelles on rencontre la *cissoïde* des anciens et le *folium* de Descartes.

Faisant $\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2=z^2$, et remplaçant a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}z^2[\beta dd'(f'-e'f)+\alpha ee'(f'd-d'f)+def'^2-d'e'f^2]+\\+ff'[de'-ed')(\beta^2-\alpha^2)+\beta(ef'-e'f)+\alpha(df'-d'f)]=0.\end{array}\right\}\quad(6)$$

L'équation de la tangente à l'origine est donc

$$y(ef'-e'f)+x(df'-d'f)=0,$$

l'équation de la diagonale qui passe par l'origine est

$$y(df'-d'f)+x(ef'-e'f)=0,$$

ainsi ces deux droites font des angles égaux avec la bissectrice de l'angle des axes ; on peut donc, sans que la courbe soit tracée, mener des tangentes aux six points d'intersection des côtés du quadrilatère.

Passons aux coordonnées polaires, on a $\beta\sin\gamma=z\sin\varphi$, $\alpha\sin\gamma=z\sin(\varphi+\gamma)$; d'où

$$\left.\begin{array}{l}z^2[dd'(f'e-e'f)\sin\varphi+ee'(f'd-d'f)\sin(\varphi+\gamma)]+\\+z[(def'^2-d'e'f^2)\sin\gamma+ff'(de'-ed')\sin(2\varphi+\gamma)]+\\+ff'[(ef'-fe')\sin\varphi+(df'-fd')\sin(\varphi+\gamma)]=0;\end{array}\right\}\quad(7)$$

équation facile à construire.

Corollaire. Lorsque $d = e' = 0$, le quadrilatère devient un parallélogramme et l'équation (6) se réduit à

$$d^2e(\beta^2 - \alpha^2) + \beta ef' - \alpha d'f = 0;$$

qui appartient à une hyperbole équilatère concentrique au parallélogramme, et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles du parallélogramme.

XXX. *Théorème.* Le lieu des centres d'une conique ayant un foyer fixe et une corde fixe, est une ligne du troisième degré.

Démonstration. Même notation qu'au problème XIX (p. 322); t et u étant les coordonnées du centre, on a :

$$t(M^2 + N^2 - 1) = -PN, \quad u(M^2 + N^2 - 1) = -PM,$$
$$My' + Nx' + P = r', \quad My'' + Nx'' + P = r'',$$

ces deux dernières équations donnent $M = a + bP$, $N = c + dP$,

$$y'x'' - x'y'' = \frac{r'x'' - r''x'}{a} = \frac{x' - x''}{b} = \frac{r''y' - r'y''}{c} = \frac{y'' - y'}{d},$$

et $M^2 + N^2 - 1 = e + fP + gP^2$ où e, f, g représentent des quantités connues; mettant ces valeurs dans celles de t et u, on obtient :

$$P^2(gt + d) + P(ft + c) + et = u,$$
$$P^2(gu + b) + P(fu + a) + eu = 0;$$

éliminant

$$f'(cu - at)^2(gt + d) + (cu - at)(bt - du)(ft + c) + et(bt - du)^2 = 0.$$

équation du troisième degré, lieu des centres.

Le foyer mobile décrit évidemment une courbe semblable à celle du centre, de dimension double et semblablement située par rapport au foyer fixe.

XXXI. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique ayant un foyer fixe et une corde fixe, passant par ce foyer, est une conique

Démonstration. Même notation qu'au problème XIX

(p. 322); et prenons la corde fixe pour axe des x; faisons $y=0$ dans l'équation (1) de la page 323, on a :

$$x^2(1-N^2)-2PNx-P^2=0;$$

mais les racines de cette équation sont x' et x'', ainsi P et N sont des quantités connues ; on a :

$$t=-\frac{PN}{M^2+N^2-1},\ u=-\frac{PM}{M^2+N^2-1};$$

éliminant M, on obtient $N^2u^2+t^2(N^2-1)+PNt=0$, conique dont le centre est au foyer fixe et le foyer mobile décrit une conique semblable et semblablement située par rapport au foyer fixe.

Corollaire. Dans l'hyperbole, on peut avoir $x''=\infty$, alors $N^2=1$, et la conique devient une parabole.

XXXII. *Théorème.* Le lieu des foyers d'une conique passant par les extrémités d'un diamètre fixe, et ayant un axe principal constant de grandeur, est une conique.

Démonstration. Prenons le centre pour origine, le diamètre fixe de longueur $2d$ pour axe des x, et les coordonnées rectangulaires :

1° Ellipse, et $2b$ le petit axe principal donné ; α et β les coordonnées du foyer ; l'équation de l'ellipse est

$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0$, donc $Cd^2+F=0$, ou $4CLd^2+4FL=0$,

donc $$-\frac{l'}{m}d^2+\frac{n^2}{m^2}-\frac{ll'}{m^2}=0\ (1),\ (\text{t. I, p. 490});$$

on a de plus :

$$\alpha^2=-\frac{l}{m}-b^2,\ \beta^2=-\frac{l'}{m}-b^2,\ (\text{t. II, p. 430})\ \text{et}\ \alpha\beta=\frac{n}{m},$$

(t. II, p. 429).

Éliminant entre ces trois équations et l'équation (1), $\frac{l}{m}$, $\frac{l'}{m}$, $\frac{n}{m}$, il vient, toute réduction faite :

$$\alpha^2b^2+\beta^2(b^2-d^2)=b^2(d^2-b^2);$$

lieu des foyers ; on a essentiellement $a > b$, donc ce lieu est une hyperbole, concentrique aux ellipses :

2° Ellipse, et $2a$ le grand axe principal donné ; alors

$$\alpha^2 = \frac{l'}{m} + a^2, \quad \beta^2 = \frac{l}{m} + a^2, \quad \alpha\beta = \frac{n}{m};$$

éliminant $\frac{l'}{m}$, $\frac{l}{m}$, $\frac{n}{m}$, entre ces équations et l'équation (1), il vient $\alpha^2(a^2 - d^2) + a^2\beta^2 = a^2(a^2 - d^2)$; on $a > d$; donc le lieu est une ellipse.

3° Hyperbole ; si l'axe $2b$ qui ne rencontre pas est donné, il suffit de changer $+b^2$ en $-b^2$, et l'équation du lieu cherché est $\alpha^2 b^2 + \beta^2(b^2 + d^2) = b^2(b^2 + d^2)$; c'est celle d'une ellipse. Si l'axe focal $2a$ est donné, l'équation du lieu est $a^2(a^2 - d^2) + \alpha^2\beta^2 = a^2(a^2 - d^2)$, on a essentiellement $a < d$; ainsi le lieu cherché est une hyperbole.

On peut avoir $d = \infty$; c'est alors une asymptote qui est donnée ; le lieu du foyer est une droite parallèle à l'asymptote, si l'axe qui ne rencontre pas est donné, et une droite perpendiculaire à l'asymptote, si l'axe focal est donné.

Remarque I. C'est le problème du concours général (p. 369), je ne sais pourquoi on a restreint le sujet à l'ellipse et à l'axe focal seulement. Quant aux sommets, nous en parlerons plus loin.

Remarque II. Si, au lieu de donner un axe principal, on donne le produit des axes principaux ou la somme algébrique de leurs carrés, le lieu du foyer est une ligne du quatrième degré et dans le dernier cas, une *cassinoïde*, concentrique aux coniques et ayant ses foyers sur le diamètre perpendiculaire au diamètre fixe, et dans le premier cas l'équation du lieu est

$$d^2\alpha^2\beta^2 + s^4 d^2(\alpha^2 - \beta^2) = s^4(d^4 - s^4),$$

s^2 est le produit des carrés des demi-axes principaux.

(*La suite prochainement.*)

NOTE

Sur la relation entre les deux rayons et la distance des deux centres de deux circonférences, l'une inscrite et l'autre circonscrite au même polygone.

(D'après M. Charles-Gustave-Jacob Jacobi, professeur à Kœnigsberg; Crelle, t. III, p. 376, an 1828.) (*)

—

I. Euler a le premier indiqué la relation qui existe entre les deux rayons et la distance des deux centres de deux circonférences, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un triangle (*Nov. Comm. Petr.*, t. I, 1747—48). D'où l'on déduit avec facilité la proposition réciproque, que lorsque cette relation existe, il est possible d'inscrire à l'une des circonférences un triangle qui soit circonscrit à l'autre circonférence, et cela quel que soit le point de départ du triangle inscrit; et par conséquent quand le problème est possible, la relation existe, et quand le problème est impossible, la relation n'existe pas. (*Voir* t. I, § 19, p. 86).

II. Guidé par des considérations organiques empruntées à Maclaurin et à Braikenridge, M. Poncelet a établi ce théorème général. « Quand un polygone quelconque est à » la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une » autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent » de la même propriété; ou plutôt tous ceux qu'on essayerait » de décrire à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux mêmes et réciproquement, etc. (*Prop. proj.* » p. 361, 1822). »

(*) L'illustre auteur des *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, 1829.

III. Nicolas Fuss, auteur d'un éloge d'Euler, prononcé le 23 oct. 1783, a publié en 1792, dans les *Nova acta Petr.*, quelques nouveaux problèmes sur les *quadrilatères* simultanément circonscriptibles et inscriptibles, et a donné en même temps la relation analytique y relative.

IV. En 1798, le même analyste a inséré, dans les *Nova acta*, un mémoire intitulé *de Polygonis symmetricè irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis*. Il indique les relations analytiques pour des polygones, depuis le triangle jusqu'à l'octogone inclusivement; mais pour des polygones seulement, tels que le diamètre commun aux deux circonférences passe par un sommet du polygone, et le divise par conséquent symétriquement. D'après cette restriction, Fuss croyait que ses solutions n'étaient pas générales. M. Jacobi fait observer que depuis la découverte du théorème de M. Poncelet, ces solutions ont acquis le mérite de la généralité. Car, d'après ce théorème, on peut toujours placer les polygones de manière à satisfaire à la condition voulue par Fuss. Voici les résultats.

$r =$ rayon du cercle inscrit; $\mathrm{R} =$ rayon du cercle circonscrit; $a =$ distance des centres, $\mathrm{R} + a = p$, $\mathrm{R} - a = q$.
Nombre des côtés.

3; $pq = 2r(a+q)$,

4; $(p^2 - r^2)(q^2 - r^2) = r^4$,

5; $p^3q^3 + p^2q^2r(p+q) - pqr^2(p+q)^2 - r^3(p+q)(p-q)^2 = 0$,

6; $3p^4q^4 - 2p^2q^2r^2(p^2+q^2) = r^4(p^2-q^2)^2$,

7; $$2pqr[pq - r(p-q) - 2r^2]\sqrt{(p-r)(p+q)}$$
$$+ 2r[p^2q^2 - r^3(p^2+q^2)]\sqrt{(q-r)(p+q)}$$
$$= \pm[pq - r(p-q)][p^2q^2 + r^2(p^2-q^2)],$$

8; $[r^2(p^2+q^2) - p^2q^2]^4 = 16p^4q^4r^4(p^2-r^2)(q^2-r^2)$.

V. M. Steiner, ayant pour système, et qu'il suit avec beaucoup de bonheur, de tout trouver lui-même, avant de

prendre connaissance de ce qu'ont fait les autres, a publié des relations pour des polygones de 4, 5, 6 et 8 côtés (Crelle, t. II, p. 287, 1827); M. Jacobi a vérifié que ses résultats, excepté pour l'octogone étaient identiques avec ceux de Fuss. Il est probable que le résultat très-compliqué de M. Steiner pour l'octogone est fautif; il n'a pas donné le polygone de 7 côtés, le plus difficile de tous les huit.

VI. Le but principal de ce mémoire, est de rattacher la recherche de la *relation* à la théorie des fonctions elliptiques. L'illustre géomètre parvient à ce théorème: « R et r étant » les rayons des deux cercles dont l'un est inscrit et l'autre » est circonscrit à un polygone de n côtés, et a étant la » distance des deux centres; si l'on détermine π et α par les » équations : $\cos\alpha = \frac{r}{R+r}$; $\pi^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2-r^2}$, l'on a tou- » jours $\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\pi^2\sin^2\varphi}} = \frac{i}{n}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\pi^2\sin^2\varphi}}$; où i dé- » signe le nombre des tours que fait le polygone dans le » périmètre du cercle; cette équation exprime en même » temps l'équation de condition qui existe entre R, r, a.

VII. Dans le même mémoire, l'auteur donne une construction géométrique pour la multiplication et l'addition des fonctions elliptiques. Nous nous occupons d'une traduction complète de cette production de génie.

GÉNÉRALISATION

de la théorie des nombres associés *et théorèmes y relatifs.*

(D'après M. Lejeune-Dirichlet (Crelle, t. III, p. 390. 1828.)

—

1. *Observation préliminaire.* Dans tout ce qui suit, il ne

s'agit que de nombres entiers ; la lettre p est exclusivement consacrée à désigner un nombre premier ; $a = b$ désigne que a est égal à b ; $a \dot{=} b$ désigne que a est un multiple de b ; $a \dot{<} b$ désigne que a n'est pas un multiple de b. Ces symboles ne sont pas ceux de l'auteur.

II. *Définition d'Euler*. Si l'on a $mn - 1 \dot{=} p$; m et n étant moindres que p, m et n sont dits nombres *associés* (*voir* N[lles] Ann., t. III, p. 193, et Prouhet, t. IV, p. 273).

III. *Définition générale de M. Lejeune-Dirichlet*. Si $mn - a \dot{=} p$; $a \dot{<} p$; et m et $n < p$; m et n sont des nombres *associés* ; lorsque $a = 1$; cette définition rentre dans celle d'Euler.

IV. Soit $[p-1]$ le produit continuel de 1 jusqu'à $p-1$ inclus. Chaque facteur m de ce produit a son associé n dans le même produit, relativement à p, et n'en a qu'un ; à moins que m ne soit égal à n, cas que nous réservons ; le produit se partage donc en $\frac{p-1}{2}$ groupes de nombres *associés* ; donc on a ce théorème :

$$[p-1] - a^{\frac{p-1}{2}} \dot{=} p.$$

Les moyens de démonstration sont les mêmes qu'on a employés pour établir le théorème de Wilson (t. III, p. 194).

V. Venons au cas où $m = n$; donc $m^2 - a \dot{=} p$; on aura évidemment aussi $(p-m)^2 - a \dot{=} p$; m et $p-m$ sont les deux seuls nombres qui soient associés à eux-mêmes, *associés doubles* (*Voir* p. 273). S'il y avait un troisième x, on aurait donc : $x^2 - m^2 = (x-m)(x+m) \dot{=} p$, congruence impossible. Il reste donc $\frac{p-3}{2}$ groupes de nombres associés inégaux ; ainsi l'on a :

$$[p-1] - a^{\frac{p-3}{2}} m(p-m) \dot{=} p, \text{ ou bien } [p-1] + a^{\frac{p-3}{2}} m^2 \dot{=} p ;$$

mais $$m^2 = \dot{p} + a\,;$$

donc $$[p-1] + a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p}.$$

VI. *Définition du* RÉSIDU QUADRATIQUE. On dit que le nombre a est résidu quadratique du nombre premier p, lorsqu'on peut satisfaire à cette congruence : $x^2 - a = \dot{p}$; il est évident que l'unité est résidu quadratique d'un nombre premier quelconque. Il suffit de faire $x = 1$; en général, si a est un carré, il est résidu quadratique par rapport à un nombre premier quelconque ; on fait x égal à la racine carrée de a.

VII. Les deux théorèmes (IV et V) peuvent se réunir en un seul ; savoir : $[p-1] \pm a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p}$; le signe supérieur a lieu lorsque a est résidu quadratique relativement à p ; et le signe inférieur lorsque a n'est pas résidu quadratique.

VIII. *Théorème de Wilson*. Lorsque $a = 1$; on a donc $[p-1] + 1 = \dot{p}$.

IX. *Théorème d'Euler*. $[p-1] = \dot{p} - 1$; donc $-1 \pm a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p}$; ou changeant les signes, $a^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 = \dot{p}$; le signe supérieur lorsque a n'est pas résidu quadratique, et le signe inférieur lorsque a est résidu quadratique.

X. *Théorème de Fermat*. $a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} \mp 1$; élevant au carré on a donc $a^{p-1} - 1 = \dot{p}$.

Observation. M. Lejeune-Dirichlet donne une seconde démonstration du théorème de Fermat, que M. Catalan a trouvée de son côté, par les considérations sur les fractions périodiques (t. I, p. 463, et t. IV, p. 273). Tm.

—

Avis concernant les tables de Callet.

Le logarithme naturel de 1099 est fautif : au lieu de 7,0021(1)5954403, il faut lire : 7,002155954403. On trouve

cette rectification dans le Journal de Crelle, t. IV, p. 291. Elle est signalée par M. le professeur Gudermann de Clèves.

LES TROIS RACINES

de l'équation du troisième degré $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ *déduites des formules de Cardan, lorsque* $a_0 = 0$.

(D'après M. Bonniakowski (Crelle, t. III, p. 347).

—

Soit l'équation $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Faisons $x = y - \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^2}$, il vient $y^3 + py + q = 0$,

ou

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\frac{a_1^2}{a_0^2}; \quad q = \frac{2}{27}\frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{1}{3}\frac{a_1a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0},$$

et les trois valeurs de x sont :

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \alpha\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha\sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \alpha^2\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha^2\sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

α est une racine cubique imaginaire de l'unité.

$$A = \frac{1}{27}a_1^3 - \frac{1}{6}a_1a_2a_0 + \frac{1}{2}a_3a_0^2;$$

$$B = A^2 + \left(\frac{a_2a_0}{3} - \frac{1}{9}a_1^2\right)^3.$$

Faisant $a_0 = 0$, il vient : $A = \frac{1}{27}a_1^3$; $B = 0$;

d'où $\quad x = \infty; \quad x = \frac{0}{0}; \quad x = \frac{0}{0}.$

Pour trouver la véritable valeur du symbole $\frac{0}{0}$, il faut, d'après la règle du calcul différentiel, connaître la valeur de $\frac{dA}{da_0}$ et de $\frac{dB}{da_0}$.

Or $\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6}a_1a_2 + a_3a_0$, et faisant $a_0 = 0$, on a :

$$\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6}a_1a_2.$$

On a : $$\frac{dB}{da_0} = 2A\frac{dA_0}{da_0} + \left(a_3a_0 - \frac{1}{9}a_1^2\right)^2 a_2;$$

donc $$\frac{dB}{da_0} = 0.$$

Faisant $z = \frac{\frac{dB}{da_0}}{\sqrt{B}}$, pour $a_0 = 0$, on a $z = \frac{0}{0}$;

d'où

$$\sqrt{B}.\frac{dz}{da_0} + \frac{1}{2}z . B^{\frac{1}{2}}\frac{dB}{da_0} = \frac{d^2B}{da_0^2};$$

d'où.

$$z^2 = \frac{2d^2B}{d^2a^0} - 2\sqrt{B}.\frac{dz}{da^0};$$

faisant $a_0 = 0$, on trouve :

$$z^2 = 4\left[\frac{2}{27}a_3a_1^3 - \frac{1}{2.27}a_2^2a_1^2\right];$$

différentiant la seconde valeur de x d'après a_0, il vient :

$$a_0\frac{dx}{da_0} + x = -\frac{1}{3}\alpha\left[A + \sqrt{B}\right]^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{dA}{da_0} + \frac{dB}{da_0}.B^{-\frac{1}{2}}\right] -$$
$$-\frac{1}{3}\alpha^2\left[\frac{dA}{da_0} - \frac{dB}{da_0}.B^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Faisant $a_0 = 0$, et remplaçant les diverses quantités par les valeurs trouvées ci-dessus, on a, toute déduction faite :

$$x = -\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}};$$

la seconde valeur s'obtient en changeant le signe du radical ; or ces deux valeurs sont les racines de l'équation

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

C. Q. F. T. Tm.

SOIXANTE THÉORÈMES

sur les coniques inscrites dans un quadrilatère et autant sur les coniques circonscrites à un quadrilatère.

—

1. Avec les six coefficients d'une équation du second degré à deux variables, on peut former les six fonctions m, n, k, k', l, l', qu'on rencontre dans toutes les propriétés des coniques, et dont nous avons fait connaître les relations mutuelles (t. I, p. 489). Ces relations donnent toujours les solutions les plus simples, les plus rapides, les plus fécondes. Voici un exemple frappant de cette fécondité. Il suffit de connaître les rapports de cinq de ces quantités à la sixième, pour que la conique soit complétement déterminée. Soit une conique inscrite dans un quadrilatère et rapportée à des axes quelconques, et soit $dy + ex + f = 0$ l'équation d'un côté du quadrilatère ; les trois autres droites ont des équations analogues, avec les mêmes lettres, mais accentuées, d', d'', d''', etc. Ce côté étant tangent, on a la relation :

$$mf^2 - 2den + 2fek + 2fdk' + le^2 + l'd^2 = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)}$$

et trois équations semblables pour les trois autres côtés. Choisissons m pour le comparer aux cinq autres quantités ; nous avons donc quatre équations du premier degré entre les cinq rapports :

$$\frac{n}{m},\ \frac{k}{m},\ \frac{k'}{m},\ \frac{l}{m},\ \frac{l'}{m}.$$

Éliminant, par la formule de Cramer, trois quelconques de ces rapports, on obtient une équation toujours du premier degré entre les deux rapports restants. Considérant ces deux rapports restants comme les coordonnées courantes d'un point, il s'ensuit que le lieu géométrique de ce point est une droite. Les cinq rapports, pris deux à deux, fournissent dix combinaisons. On a donc dix points pour chacun desquels le lieu géométrique est une droite. Nous avons choisi m pour dénominateur commun ; mais on peut prendre pour cela une quelconque des six quantités ; il existe donc soixante points différents, et qui ont pour lieux géométriques soixante droites différentes, qui peuvent donner matière à autant d'énoncés de théorèmes. Or la théorie des polaires réciproques nous apprend qu'à chaque propriété d'une courbe inscrite dans un polygone correspond une propriété d'une conique circonscrite à un polygone homonyme. On a donc cent vingt théorèmes. Toutefois ces cent vingt théorèmes ne sont qu'une richesse spécieuse ; ils se réduisent aux deux théorèmes suivants.

II. *Théorème.* Le lieu géométrique du pôle d'une droite fixe, relativement à une conique inscrite dans un quadrilatère, est une droite.

Démonstration. Choisissons k pour le dénominateur commun, et $\frac{l}{k}$ et $\frac{n}{k}$ pour les deux rapports restants (1) ; le lieu du point qui a ces deux rapports pour coordonnées est donc une droite ; mais ces coordonnées sont celles du pôle de l'axe des y, qui représente une droite quelconque ; donc, etc. La construction de la droite est facile. Soit ABCD le quadrilatère, D' la droite donnée ; la diagonale AC représente une ellipse inscrite ; pour avoir le pôle de D' relativement à cette ellipse, il faut prolonger AC jusqu'à ce qu'elle rencontre D' en un point E ; prendre entre A et C un point F harmoniquement conjugué à E ; de sorte que C, F, A, E soient quatre points

harmoniquement placés ; et F sera le pôle de D'. On fera de même pour la diagonale BD ; on a ainsi deux points de la droite des pôles. En se servant de la troisième diagonale, on obtient un troisième point, en ligne droite avec les deux premiers ; théorème de géométrie élémentaire, utile exercice. Si la droite D' se transporte à l'infini, ses pôles sont les centres des coniques, le point F est au milieu de la diagonale, et on retombe sur le théorème de Newton.

III. *Théorème*. L'enveloppe de la polaire d'un point fixe, prise relativement à une conique circonscrite à un quadrilatère, est un point fixe.

Démonstration. Faisant usage des propriétés des polaires réciproques, on voit que ce théorème est une conséquence immédiate du théorème précédent. Soit ABCD le quadrilatère, et E le point fixe ; soit F l'intersection des côtés opposés AB, CD ; menons EF, et un rayon FG harmoniquement conjugué à FE ; de sorte que FE, FD, FG, FA forment un faisceau harmonique ; le point fixe cherché est sur FG. On fera la même construction pour les deux autres côtés opposés AD, BC ; on a donc deux droites sur lesquelles se trouve le point d'enveloppe des polaires.

On peut encore employer au même but les deux diagonales AC, BD ; ce qui donne lieu aussi à un théorème de géométrie élémentaire.

Lorsque le point donné s'éloigne à l'infini, sa polaire devient un diamètre conjugué à celui sur lequel se trouve le point. On a donc cette proposition : Si par tous les centres des coniques circonscrites à un même quadrilatère, on mène des diamètres parallèles, les diamètres sont respectivement conjugués par un même point fixe.

Remarque. Nous donnerons incessamment la théorie des polaires réciproques. Doublant nos richesses et économisant la moitié du travail, cette brillante invention de M. Ponce-

let, géomètre français, n'est pas admise dans l'enseignement français, dans ce qu'on appelle l'instruction classique.

IV. *Théorème.* L'enveloppe de la polaire d'un point, prise par rapport à une conique inscrite dans un quadrilatère, est une ligne du troisième degré.

Démonstration. $Dy + Ex + 2F = 0$ est la polaire de l'origine. Remplaçant les coefficients par leurs valeurs, il vient :

$$(k'l + kn)y + (kl' + k'n)x + n^2 - ll' = 0. \qquad (1)$$

Faisons $\frac{n}{m} = z$; les quatre équations relatives aux quatre côtés du quadrilatère donnent (t. II, p. 108) :

$$\frac{k}{m} = az + b\,; \quad \frac{k'}{m} = a'z + b'; \quad \frac{l}{m} = a''z + b''; \quad \frac{l'}{m} = a'''z + b'''.$$

Les a et les b sont des quantités connues. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient une équation de cette forme :

$$y(pz^2 + qz + r) + x(p'z^2 + q'z + r') + p''z^2 + q''z + r'' = 0. \quad (2)$$

Les p, q, r sont des quantités connues ; dérivant par rapport à z, on a :

$$2z(py + p'x + p'') + qy + q'x + q'' = 0.$$

Eliminant z entre cette équation et l'équation (2), le résultat est une équation du troisième degré, répondant à l'enveloppe de la polaire de l'origine, qui représente un point quelconque du plan ; donc, etc. Les termes du troisième degré sont $(py + p'x)(qy + q'x)^2$; la courbe est donc de la sixième ou de la septième espèce d'Euler (Int. in An., t. II, p. 120).

Corollaire. Si, par tous les centres des coniques inscrites à un quadrilatère, on mène des diamètres parallèles, les diamètres respectivement conjugués enveloppent une ligne du troisième degré.

V. *Théorème*. Le lieu des pôles d'une droite fixe, relativement à des coniques circonscrites à un quadrilatère, est une ligne du sixième degré.

Démonstration. Par les polaires réciproques ; toutefois lorsque la droite s'éloigne à l'infini, le lieu des pôles est du second degré ; il devient le lieu des centres (p. 304). Tm.

—

Mnémonique des six fonctions élémentaires.

VI Ces fonctions, base analytique de la théorie des coniques, sont des dérivées premières de la fonction L. En effet, on a :

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC) ;$$

d'où

$$\frac{dL}{dA} = l' ;\ \frac{dL}{dB} = -n ;\ \frac{dL}{dC} = l ;\ \frac{dL}{dD} = k' ;\ \frac{dL}{dE} = k ;\ \frac{dL}{dF} = m.$$

Ces équations sont utiles aussi quand il s'agit de questions *de maximis* et *de minimis* sur L et dans de certaines questions de haute analyse. Tm.

ESSAI

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique.

(Suite. V. p. 173.)

—

IX.

Calculons la distance mm_1.

Soient $P = c$, $P = c + dc$, deux courbes infiniment voisines, comprises entre $P = A$ et $P = 0$.

La partie $\mu\mu_1$ de la tangente mG interceptée par ces deux courbes sera d'abord, en appelant dn la distance normale des deux courbes comptée à partir du point μ, où la première de ces courbes est rencontrée par la tangente mG, et par φ celui des deux angles positifs que la tangente de cette courbe au point μ, fait avec la partie positive de l'axe des x, pour lequel $\sin(\theta - \varphi)$ est positif (*) :

$$\mu\mu_1 = \frac{dn}{\sin(\theta - \varphi)};$$

mais x, y et $x + dx$, $y + dy$ étant les coordonnées respectives des deux points μ et ν, on a :

$$\frac{dx}{\frac{dP}{dx}} = \frac{dy}{\frac{dP}{dy}} = \frac{dn^2}{\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy} = \pm \frac{dn}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}},$$

et

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{ay}dy = dc,$$

d'où l'on tire

$$dn = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}},$$

on peut donc écrire :

$$\mu\mu_1 = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}\sin(\theta - \varphi)},$$

(*) Nous devons dire que la partie de la tangente à la courbe $P - C$, qui détermine l'angle φ est toujours du même côté de mG; cela résulte de ce que les tangentes aux courbes $P - C$ ne peuvent être parallèles à l'axe des x, ni coïncider avec mG, or voici comment ce dernier point peut être établi : si mG pouvait être tangente à une courbe $P - C$, cette courbe couperait en deux points la courbe $P - \frac{A}{B}Q$, sous le même angle d'ailleurs ; on pourrait donc trouver une autre courbe $P - C$, n'ayant qu'un point commun avec $P - \frac{A}{B}Q$, et coupant cette dernière sous des angles égaux, ce qui est impossible, car cette courbe aurait un point anguleux.

le signe $\pm$ étant évidemment celui de dc. De là on déduit la longueur cherchée :

$$mm_1 = \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi)};$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis la courbe $P = A$ jusqu'à la courbe $P = 0$.

X.

Maintenant, pour que cette expression soit plus grande que la valeur de ρ :

$$\rho = \frac{\pm A}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2} \sin(\theta - \varphi_1)} =$$

$$= \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2} \sin(\theta - \varphi_1)} \quad (*),$$

il suffit que l'expression positive

$$(6) \quad \sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi)$$

aille en diminuant, à mesure qu'en suivant la tangente mG on s'éloigne du point m, ce qui exige que pour un pareil déplacement, la différentielle de l'expression (6) soit négative.

Or la différentielle dont il s'agit a pour valeur :

$$-\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right\} \cos(\theta - \varphi) d\varphi + \sin(\theta - \varphi) \left(\frac{dP}{dx} d.\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} d.\frac{dP}{dy}\right.$$

(*) Pour pouvoir dire que $\pm A = \int \pm dc$, il faut que c varie dans le même sens quand on parcourt la droite mm_1, or si cela n'était pas, il faudrait que c pût rester constant dans le passage d'un point de mm_1 à un point de la même ligne infiniment voisin du premier, ou bien que mm_1 pût être tangente à une courbe $P = C$, ce qui a été démontré être impossible.

indépendamment du facteur $\left\{ \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$, qui ne peut rien au signe; d'ailleurs

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tang}\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}, \text{ d'où } d\varphi = \frac{\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dy} - \frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dx}}{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2};$$

substituant, il vient :

$$-\cos(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dy} - \frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dx}\right)$$
$$+\sin(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dy}\right);$$

ou effectuant les différentiations, et divisant par la différentielle de la variable indépendante,

$$-\cos(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}\cos\theta + \frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dy^2}\sin\theta - \frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dx^2}\cos\theta - \frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}\sin\theta\right)$$
$$+\sin(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dx^2}\cos\theta + \frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}\sin\theta + \frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}\cos\theta + \frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dy^2}\sin\theta\right).$$

Ce que l'on peut, en négligeant le facteur positif $\left(\frac{dP}{dy}\right)^2$, mettre sous la forme :

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\,\dfrac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx} + \sin\theta\,\dfrac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy}\right\} \\ +\sin(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\,\dfrac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy} - \sin\theta\,\dfrac{d\,\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx}\right\}, \end{array} \right.$$

en remarquant que

$$\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}=\frac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dy^2}=-\frac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2,$$

en vertu de la relation

$$\frac{d^2P}{dx^2}=-\frac{d^2P}{dy^2}.$$

XI.

L'expression (7) peut se mettre sous une forme beaucou[p] plus simple. Remarquons d'abord que cette expression re-vient à

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l}-\cos(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\dfrac{d\,\text{tang}\,\varphi}{dx}+\sin\theta\dfrac{d\,\text{tang}\,\varphi}{dy}\right\}\\-\sin(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\dfrac{d\,\text{tang}\,\varphi}{dy}-\sin\theta\dfrac{d\,\text{tang}\,\varphi}{dx}\right\}.\end{array}\right.$$

Or considérons la courbe représentée par une équatio[n] de la forme $\text{tang}\,\varphi=c$, et passant par le point μ de la tan[-]gente mG, dont les coordonnées sont les valeurs de x e[t] de y qui se trouvent dans l'expression (7) ; soit χ l'un de[s] deux angles positifs que la tangente de cette courbe a[u] point x, y fait avec la partie positive de l'axe des x, on aura

$$\text{tang}\,\chi=-\frac{\frac{d.\,\text{tang}\,\varphi}{dx}}{d.\frac{\text{tang}\,\varphi}{dy}};$$

d'où

$$\sin\chi = \frac{-\dfrac{d.\tang\varphi}{dx}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{d.\tang\varphi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d.\tang\varphi}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{\dfrac{d.\tang\varphi}{dy}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{d.\tang\varphi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d.\tang\varphi}{dy}\right)^2}};$$

déterminons le signe placé devant le radical, nous avons :

$$\frac{\sin\chi}{\dfrac{d.\tang\varphi}{dx}} = \frac{-\cos\chi}{\dfrac{d.\tang\varphi}{dy}} = \frac{\sin\chi dx - \cos\chi dy}{\dfrac{d.\tang\varphi}{dx}dx + \dfrac{d.\tang\varphi}{dy}dy} =$$

$$= \frac{\sin\chi dx - \cos\chi dy}{d.\tang\varphi}.$$

Supposons que dx et dy soient les accroissements de x et de y qui se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la portion de la tangente à la courbe P=C, qui détermine l'angle φ, si nous supposons que la courbe P=C, occupe la position que nous lui avons donnée dans la fig. B (*), on aura :

$$dx = h\cos\varphi, \quad dy = h\sin\varphi, \quad d.\tang\varphi = -k,$$

h et k étant des quantités infiniment petites positives. Donc, si nous prenons χ de manière que $\sin(\chi-\varphi)$ soit positif, ce qui revient à considérer la partie de la tangente à la courbe $\tang\varphi = C$, située au-dessus de la tangente à la courbe P=C, on aura :

$$\sin\chi = -g\,\frac{d.\tang\varphi}{dx}, \quad \cos\chi = g\,\frac{d.\tang\varphi}{dx},$$

(*) Je me suis assuré que toutes les autres positions conduisaient au même résultat.

g étant un nombre positif. Il faudra donc prendre alors les signes supérieurs dans les expressions de $\sin\chi$ et $\cos\chi$, écrites plus haut, ce qui donnera :

$$\sin\chi = \frac{-\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right)^2}};$$

d'où

$$\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx} = -\sin\chi \sqrt{\left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy} = \cos\chi \sqrt{\left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right)^2},$$

d'où substituant dans l'expression (8), et supprimant le facteur positif $\sqrt{\left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right)^2}$, il vient :

$$\cos(\theta-\varphi)(\cos\theta\sin\chi-\sin\theta\cos\chi)-\sin(\theta-\varphi)(\cos\theta\cos\chi+\sin\theta\sin\chi);$$

ce qui revient à

$$\cos(\theta-\varphi)\sin(\chi-\theta)-\sin(\theta-\varphi)\cos(\chi-\theta),$$

ou enfin

$$(9) \qquad \ldots \sin(\chi+\varphi-2\theta).$$

XII.

Sous la forme que nous venons d'obtenir, il est facile de reconnaître que la différentielle de l'expression (6) ne peut être supposée indéfiniment négative, mais qu'au contraire elle finira toujours par être positive, et qu'elle est même positive si les conditions du § III se trouvent remplies.

Remarquons pour cela que lorsqu'une courbe $\tang \varphi = c$, touche une courbe $P = cQ + c_1$, il y a au point de contact une inflexion pour la courbe $P = cQ + c_1$: en effet cette dernière courbe fait, comme on l'a dit au § IV, le même angle avec toutes les courbes $P = c$; or si deux points consécutifs de $P = cQ + c_1$, appartiennent à la courbe $\tang \varphi = c$, qui est le lieu des points pour lesquels les tangentes aux courbes $P = c_0$ sont également inclinées sur l'axe des x, il est évident qu'il y aura deux points consécutifs de $P = cQ + c_1$, où la tangente sera la même, et par conséquent une inflexion pour cette courbe. Cela étant, concevons la courbe $P = cQ + c_1$, qui passe par le point μ, et dont la tangente en ce point fait un angle χ avec la partie positive de l'axe des x, cette courbe touchera la courbe $\tang \varphi = c$ qui passe au point μ, et par conséquent admettra un point d'inflexion en ce point μ, donc si contrairement à ce que nous voulons établir, on avait :

$$\sin(\chi + \varphi - 2\theta) < 0 \quad \text{ou} \quad \chi - \theta < \theta - \varphi \quad \text{ou} \quad \chi - \varphi < 2(\theta - \varphi);$$

d'où
$$\theta - \varphi > \frac{\chi - \varphi}{2}.$$

Il ne serait pas vrai de dire, comme le supposent les conditions du § III, que la tangente mG de la courbe $P = \frac{A}{B} Q$, fait avec toutes les courbes $P = c$, comprises entre celle de ces courbes qui passe au point m, et celle qui passe au point de rencontre m_1 de mG avec la courbe $Q = 0$, des angles plus petits que la moitié du plus petit de ceux que forment avec la courbe $P = 0$, ou les courbes $P = c$, celles des courbes $P = cQ + c_1$, qui ont des points d'inflexion dans le contour. Nous conclurons donc que les conditions supposées étant remplies, la différentielle de l'expression (6) est positive, et par conséquent que la valeur approchée de ρ, déduite des équations (4) et (5) est plus grande que la partie mm_1 de la

tangente mG à la courbe $P = \frac{A}{B} Q$, comprise entre le point de contact m et la courbe $P = 0$.

XIII.

Je dis maintenant que la valeur de ρ est plus petite que la partie mm_1 de la tangente mG, comprise entre le point m et le point où cette ligne rencontre la courbe $Q=0$. Pour le faire voir, calculons cette longueur : soient $Q=c$, $Q=c+dc$, deux courbes infiniment voisines et comprises entre $Q=B$ et $Q=0$; la partie dp de la tangente mG comprise entre ces deux courbes, pourra être mise sous la forme :

$$dp = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)},$$

θ et φ représentant les mêmes angles que ci-dessus, et le signe $\pm$ de dc, étant choisi de manière que dp soit positif, et par conséquent étant celui de dc, puisque $\theta \quad \varphi$ est positif, et de plus, plus petit que $90°$, d'après les conditions du § III.

Or on a :

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dy}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx},$$

on peut donc encore écrire :

$$dp = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)},$$

d'où l'on déduit :

$$mm_1 = \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)}.$$

L'intégrale étant étendue depuis la courbe $Q = B$ jusqu'à la

courbe $Q=0$. Maintenant pour que cette longueur soit plus grande que

$$\rho=\frac{-B}{\frac{dB}{d\alpha}\cos\theta+\frac{dB}{d\beta}\sin\theta}=\int\frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2}\sin(90+\theta-\varphi_o)}\ (*),$$

il suffit que l'expression positive

$$(10)\qquad \sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+\left(\frac{dP}{dy}\right)^2}\sin(90+\theta-\varphi)$$

aille en diminuant à mesure qu'en suivant la tangente mG on s'éloigne du point m, ce qui exige que pour un pareil déplacement la différentielle de l'expression (10) soit négative. Or cette expression se déduisant de l'expression (6) par l'échange de θ en $90+\theta$, on voit sans aucun calcul que le signe de la différentielle sera celui de l'expression (9), dans laquelle on aura changé θ en $90+\theta$, c'est-à-dire celui de l'expression

$$\sin(\chi+\varphi-2\theta-180)=-\sin(\chi+\varphi-2\theta).$$

Signe qui est — d'après ce qui a été démontré au § XII. Ainsi comme nous l'avions annoncé, la partie mm_1 de la tangente mG comprise entre les deux courbes $Q=B$, $Q=0$, est plus petite que la valeur approchée de ρ.

(*La fin prochainement.*)

NOTE

sur les racines commensurables fractionnaires.

—

Théorème. $\frac{\alpha}{\beta}$ étant une quantité *commensurable irréductible*, racine de l'équation

$$Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots A_m=0,$$

(*) Nous admettons encore ici que $\pm B=\int\pm dc$, c'est-à-dire que les courbes $Q=C$ ne peuvent être tangentes à mG ; il en résulterait en effet que $\theta-\varphi$ pourrait être droit, ce qui est impossible.

$A, A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$ sont des coefficients entiers, on aura les conditions suivantes :

$$A=\dot{\beta};\quad A_m=\dot{\alpha};\quad A\alpha+A=\dot{\beta};\quad A\alpha^2+A_1\alpha\beta+A_2=\dot{\beta}^2;$$
$$A\alpha^3+A_1\alpha^2\beta+A_2\alpha+A_3=\dot{\beta}^3\ldots\ldots$$

et enfin :

$$A\alpha^m+A_1\alpha^{m-1}\beta+A_2\alpha^{m-2}\beta^2+\ldots\ldots A_{m-1}\alpha\beta^{m-1}+A_m\beta^m=\dot{\beta}^m=\dot{0}.$$

Démonstration. La dernière équation est évidente, puisqu'elle exprime que $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine. Tous les termes, le premier excepté, sont divisibles par β ; donc $A\alpha^m$ est aussi divisible par β ; mais α^m est premier avec β ; donc A est divisible par β ; ainsi $A=\dot{\beta}$. Le même genre de raisonnement fait voir que $A_m=\dot{\alpha}$. La somme des deux premiers termes doit être divisible par β ; divisant cette somme par α^{m-1}, le quotient $A\alpha+A_1$ est donc divisible par β. La somme des trois premiers termes doit être divisible par β^2 ; divisant cette somme par α^{m-2}, le quotient $A\alpha^2+A_1\alpha\beta+A_2$ sera divisible par β^2, et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Corollaire I. $\frac{A}{\beta}$ et $\frac{A_m}{\alpha}$ doivent être des nombres entiers ; et de même,

$$\frac{A\alpha}{\beta}+A_1;\quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2}+A_1\frac{\alpha}{\beta}+A_2;\quad \frac{A\alpha^3}{\beta^3}+A_1\frac{\alpha^2}{\beta^2}+A_2\frac{\alpha}{\beta}+A_3;\ \ldots\ldots$$

La loi de déduction de ces quantités est évidente.

On a donc ces diverses conditions pour reconnaître si $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine ; et si une seule manque, alors on est sûr que la quantité essayée n'est pas racine.

Corollaire II. Si $\beta=1$, ces critériums deviennent illusoires ; alors, on cherche des critériums, en considérant α comme diviseur, et on tombe sur la méthode connue (*voir* t. II, p. 523). On sait d'ailleurs qu'on peut toujours ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines commensurables entières.

Corollaire III. Le théorème subsiste lorsque α et β sont des expressions littérales n'ayant point de diviseur commun.

Observation. Le théorème peut se démontrer directement à l'aide du théorème de M. Gauss sur le produit de deux polynômes (t. III, p. 47); car le polynôme donné étant entier et divisible par $x-\frac{\alpha}{\beta}$ doit donner un quotient à coefficients entiers; mais ces divers coefficients sont :

$$\frac{A\alpha}{\beta}+A_1;\quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2}+A_1\frac{\alpha}{\beta}+A_2;\ \ldots..$$

donc, etc. Tm.

RAYONS DE COURBURE DANS LES CONIQUES.

D'après le professeur Strehlke (Crelle, tom. II, pag. 380. 1827).

I. *Lemme.* Soit $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ l'équation d'un cercle, axes rectangulaires; α, β; α', β'; α'', β'' étant les coordonnées de trois points pris sur la circonférence, on déduit :

$$2p+\frac{2(\beta-\beta')}{\alpha-\alpha'}q=\alpha+\alpha'+\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'},$$

$$2p+\frac{2(\beta-\beta'')}{\alpha-\alpha''}q=\alpha+\alpha''+\frac{\beta^2-\beta''^2}{\alpha-\alpha''}.$$

II. Soit $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires; α,β; α',β'; α'',β'' trois points pris sur cette ellipse. Faisant $x=a\cos\varphi$, on aura $y=b\sin\varphi$; donc aussi :

$$\alpha=a\cos\varphi,\ \beta=b\sin\varphi;\quad \alpha'=a\cos\varphi',\ \beta=b\sin\varphi';$$
$$\alpha''=\cos\varphi'',\ \beta''=b\sin\varphi'';$$

d'où

$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2},$$
$$\alpha+\alpha'=a(\cos\varphi+\cos\varphi'),$$
$$\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'}=-\frac{b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi').$$

Faisant passer une circonférence par ces trois points, on aura, d'après le lemme I :

$$2p-\frac{2b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2}q=\frac{a^2-b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi'),$$

$$2p-\frac{2b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi''}{2}q=\frac{a^2-b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi'');$$

d'où l'on tire :

$$q=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2};$$

et de là :

$$p=\frac{a^2-b^2}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\left[\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}-\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\right]$$

et $$r=(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2.$$

Faisant $\varphi=\varphi'=\varphi''$, on a pour le cercle osculateur :

$$q=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi;\quad p=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\varphi;$$

$$R=\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

III. *Hyperbole*. Soit $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ l'équation; faisant :

$$\alpha=\frac{a}{\cos\varphi};\quad \beta=b\tang\varphi;$$

$$\alpha'=\frac{a}{\cos\varphi'};\quad \beta'=b\tang\varphi';$$

$$\alpha''=\frac{a}{\cos\varphi''};\quad \beta''=b\tang\varphi'';$$

et procédant de la même manière, on trouve finalement :

$$q=-\frac{a^2+b^2}{b}\tang^3\varphi;\quad p=\frac{a^2+b^2}{a\cos\varphi^3};\quad R=\frac{(a^2\tang^2\varphi+b^2\sec^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

IV. *Parabole*. Soit $y^2=px$ l'équation ;

$$\beta^2=p\alpha,$$
$$\beta'^2=p\alpha',$$
$$\beta''^2=p\alpha'';$$

d'où l'on tire :

$$q=-\frac{4\alpha^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}};\quad p=\frac{6\alpha+p}{2};\quad R=\frac{(p+4\alpha)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}.$$

(*Voir* Gerono, t. II, p. 170.)

PROBLÈME.

Trouver le lieu des foyers des différentes ellipses assujetties à être tangentes à quatre droites données.

PAR M. VAUQUELIN,
Élève de mathématiques spéciales au collége de Saint-Louis,
classe de M. AMIOT.

Soit ABCD le quadrilatère donné. Je prends pour axe des x une des tangentes AD, et pour axe des y une perpendiculaire AY à AD menée par le point où cette dernière droite coupe la tangente contiguë AB.

Ceci posé, soient F, F′ deux foyers appartenant à une des ellipses en question, et soient x, y les coordonnées du point F; x', y' celles du point F′.

On sait que le produit des deux perpendiculaires abaissées des deux foyers d'une ellipse sur une tangente à cette courbe est constant et égal à b^2, b étant la moitié du petit axe de l'ellipse. Or les distances des points F, F′ à chacune des tangentes s'expriment facilement en fonction des coordonnées de ces points et des coefficients constants qui entrent dans l'équation de cette tangente. Ainsi, en égalant successivement à b^2 chacun des quatre produits, on aura quatre équations entre les quantités b^2, x', y', x, y et des coefficients connus. On pourra donc éliminer les trois quantités b^2, x', y' entre ces quatre équations, et l'équation résultante en x, y sera celle du lieu cherché.

Telle est la marche que j'ai adoptée pour résoudre la question. J'effectue rapidement les calculs.

Le produit des distances de F et de F' à AD est yy'. Ainsi on a la relation :

$$yy' = b^2. \qquad (1)$$

Soit $y = mx$ l'équation de AB ; le produit des distances correspondantes sera :

$$\frac{(y - mx)}{\sqrt{m^2 + 1}} \times \frac{(y' - mx')}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

On aura donc :

$$\frac{(y - mx)(y' - mx')}{m^2 + 1} = b^2. \qquad (2)$$

Soient enfin $y = m_1 x + n_1$ l'équation de BC et $y = m_2 x + n_2$ celle de CD, on aura pareillement :

$$\frac{(y - m_1 x - n_1)(y' - m_1 x' - n_1)}{m_1^2 + 1} = b^2, \qquad (3)$$

$$\frac{(y - m_2 x - n_2)(y' - m_2 x' - n_2)}{m_2^2 + 1} = b^2. \qquad (4)$$

Éliminant b^2 entre ces quatre équations, on aura les trois nouvelles équations :

$$yy' = \frac{(y - mx)(y' - mx')}{m^2 + 1},$$

$$yy' = \frac{(y - m_1 x - n_1)(y' - m_1 x' - n_1)}{m_1^2 + 1},$$

$$yy' = \frac{(y - m_2 x - n_2)(y' - m_2 x' - n_2)}{m_2^2 + 1}.$$

Chassant les dénominateurs, simplifiant et ordonnant par rapport à x', y', on obtient :

$$y'(my + x) + x'(y - mx) = 0,$$

$$y'(m_1^2 y + m_1 x + n_1) + x'(m_1 y - m_1^2 x - m_1 n_1) = -$$
$$-(n_1 y - n_1 m_1 x - n_1^2),$$

$$y'(m_2^2 y + m_2 x + n_2) + x'(m_2 y - m_2^2 x - m_2 n_2) = -$$
$$-(n_2 y - n_2 m_2 x - n_2^2).$$

Pour éliminer x', y' entre ces trois équations, je prends

dans la première x' en fonction de y', et portant cette valeur de x' dans les autres, j'ai :

$$y'[(mx-y)(m_1^2y+m_1x+n_1)+(my+x)(m_1y-m_1^2x-m_1n_1)]=-\\-(mx-y)(n_1y-n_1m_1x-n_1^2),$$

$$y'[(mx-y)(m_2^2y+m_2x+n_2)+(my+x)(m_2y-m_2^2x-m_2n_2)]=-\\-(mx-y)(n_2y-n_2m_2x-n_2^2).$$

En divisant ces deux dernières équations, membre à membre, chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport à x et y, on obtient, toutes réductions faites :

$$\left.\begin{array}{l} y^3[m_1n_2(m-m_1)-m_2n_1(m-m_2)]+x^3[n_2(m-m_1)-n_1(m-m_2)]mm_1 \\ +y^2x[n_2(m-m_1)-n_1(m-m_2)]m_1m_2+yx^2[n_2m_1(m-m_1)-n_1m_2(m-m_2)] \\ +y^2[n_2^2m_1(m_1-m)-n_1^2m_2(m_2-m)-n_1n_2m(m_1-m_2)]+2xyn_1n_2(m_2-m_1) \\ +x^2[mn_1n_2(m_1-m_2)+m_1n_2^2(m_1-m)+m_2n_1^2(m-m_2)] \\ +y[n_2^2n_1(1+mm_1)-n_1^2n_2(1+mm_2)]+x[n_2^2n_1(m_1-m)-n_1^2n_2(m_2-m)] \end{array}\right\}=0.$$

Cette équation est du troisième degré et ne peut pas, en général, se décomposer en facteurs. Donc, dans le cas général, la courbe est du troisième degré. Il est bon d'observer qu'elle passe par l'origine. Or, si on avait pris pour axe des x une autre tangente, et pour axe des y une perpendiculaire à cette tangente menée par le point où elle coupe la tangente contiguë, on aurait eu un résultat de même forme. Donc :

La courbe passe par les quatre sommets du quadrilatère que forment les quatre tangentes (*).

On pourrait, du reste, s'en assurer directement en portant dans l'équation de la courbe, les coordonnées des points d'intersection ; mais la remarque précédente en dispense.

L'équation, dans toute sa généralité, offrirait une discussion peu intéressante ; mais quelques hypothèses particulières sur la position des droites vont donner des résultats assez curieux.

(*) Et par les deux autres du quadrilatère complet (p. 373). Tm.

En supposant, par exemple, BC parallèle à AD, on a $m_1 = 0$. Cette hypothèse réduit l'équation à :

$$\left.\begin{array}{l} y^3(m_2-m)m_2-yx^2(m-m_2)m_2-[n_1m_2(m_2-m)-n_2mm_2]y^2 \\ -[mm_2n_2-m_2n_1(m-m_2)]x^2+2xyn_2m_2 \\ +[n_2^2-n_1n_2(1+mm_2)]y-[n_2^2m+n_1n_2(m_1-m)]x \end{array}\right\}=0.$$

Si on suppose, de plus, que CD soit parallèle à AB, ce qui revient à faire $m_2 = m$ dans l'équation précédente, on aura :

$$m^2y^2-m^2x^2+2mxy=[n_2-n_1(1+m^2)]y-n^2mx=0. \quad \text{(A)}$$

Cette courbe est du deuxième degré. De plus, si on forme la quantité $B^2 - 4AC$, on a $B^2 - 4AC = 4m^2 + 4m^4$, quantité essentiellement positive. Ainsi la courbe est une hyperbole. Mais alors le quadrilatère est un parallélogramme. Donc :

Le lieu des foyers des ellipses assujetties à être tangentes aux quatre côtés d'un parallélogramme est une hyperbole qui jouit de la propriété de passer par les quatre sommets du parallélogramme.

On peut supposer que ce parallélogramme devienne rectangle. Pour cela, il faut faire m infini. Mais on aura alors une indétermination provenant de ce que n_2 devient aussi infini. Pour parer à cet inconvénient, je remarque, en reprenant l'équation, que l'ordonnée à l'origine pour la droite CD est $a = -\frac{n_2}{m_2}$, d'où $n_2 = -m_2a$, et comme ici $m_2 = m$, $n_2 = -ma$. Portant cette valeur dans l'équation (A), elle devient :

$$m^2y^2 - m^2x^2 + 2mxy - [ma + m(1+m^2)]y + m^2ax = 0.$$

Divisant par m^2 et faisant $m = \infty$, on a :

$$y^2 - x^2 - n_1y + ax = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, l'hyperbole est équilatère. Elle est

d'ailleurs facile à construire ; car ses axes sont parallèles aux côtés du rectangle, et son centre est le centre même de ce rectangle.

Enfin on peut imaginer que le rectangle devienne un carré, et pour cela il suffit de faire $n_1 = a$.

Alors l'équation devient :

$$y^2 - x^2 - ay + ax = 0\,;$$

d'où

$$(y - x)(y + x) - a(y - x) = 0\,;$$

et par suite :

$$(y - x)(y + x - a) = 0.$$

Ce qui donne les deux équations distinctes :

$$y - x = 0, \quad y + x - a = 0,$$

qui sont celles des deux diagonales du carré.

Il est bon de remarquer que dans tous les cas les points qui appartiennent véritablement aux foyers ne forment qu'une *portion* de la courbe totale (*).

SUR LES FRACTIONS CONTINUES.

Mon cher M. Terquem,

Je me vois forcé, à mon grand regret, de répondre à la lettre de M. Guilmin, contenue dans le dernier numéro des *Annales*; cette nouvelle réponse sera, du reste, mon dernier mot : il est temps de mettre fin à une polémique ennuyeuse pour M. Guilmin, pour moi, et peut-être aussi pour vos lecteurs.

(*) Les autres points appartiennent aux coniques ex-inscrites (p. 372, XXIX). Tm.

M. Guilmin dit en commençant : « Il m'a semblé que M. Catalan démontrait trop longuement une proposition d'algèbre élémentaire, j'ai cru utile aux élèves d'en donner une démonstration plus simple. »

M. Guilmin avait parfaitement le droit de trouver ma démonstration trop longue ; et il a bien fait de chercher, par deux fois, à en donner une qui fût plus simple. A-t-il atteint le but qu'il poursuivait ? C'est ce que nous verrons tout à l'heure.

Il ajoute · « Cette démonstration, M. Catalan ne l'a pas comprise ; cependant il paraît l'avoir étudiée avec tant de bonne volonté, que je me fais un plaisir de lui venir en aide. »

M. Guilmin qui, à ce qu'on m'assure, et ce dont je suis fâché, a pris au sérieux quelques plaisanteries, bien qu'elles ne s'adressassent qu'à sa note, M. Guilmin, dis-je. me plaisante à son tour : cela est de bonne guerre. Je pourrais riposter ; mais je préfère la logique aux épigrammes, et je continue.

Si je n'ai pas, la première fois, compris la démonstration donnée par M. Guilmin, ce n'est pas tout à fait ma faute : M. Guilmin le sait bien ; aussi, après le préambule que je viens de citer, fait-il une nouvelle rédaction de la démonstration dont il s'agit, rédaction aussi claire que l'autre était obscure.

Malheureusement, M. Guilmin regarde comme évidente la proposition qui est l'objet même du débat, et il fait un long calcul pour prouver une chose évidente. La première démonstration péchait par la forme : celle-ci, si je ne me trompe, pèche par le fond ; et, chose assez singulière, elle est à la fois incomplète et surabondante. C'est ce que je vais tâcher de faire voir.

Supposons, pour prendre d'abord un exemple très-simple, qu'ayant démontré la convergence de la série

$$a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots,$$

on veuille trouver la *valeur* de cette série, c'est-à-dire *la limite finie et déterminée vers laquelle tend la somme des* n *premiers termes*, *lorsque* n *augmente indéfiniment.* Si l'on représente par x cette valeur, il me paraît évident que l'on peut écrire, sans aucun calcul :

$$x = a + ax;$$

car la série pourrait se mettre sous la forme :

$$a + a(a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots).$$

Ainsi, dans cet exemple, la seule difficulté consiste à faire voir que, pour $a < 1$, la série a une valeur.

Soit, en second lieu, la fraction continue périodique

$$a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}$$

S'il a été démontré que, le nombre des périodes augmentant indéfiniment, les réduites successives s'approchent sans cesse d'une limite finie et déterminée x, on aura *évidemment* :

$$x = a + \frac{1}{x}.$$

Mais ce qui n'est pas évident, ce qui exigeait une démonstration, c'est que toute fraction continue composée d'un nombre illimité de termes, *a une valeur*. M. Guilmin ne paraît pas avoir envisagé la question de cette manière ; aussi, comme je l'ai déjà dit, admet-il la proposition qu'il s'agissait précisément de démontrer, et s'attache-t-il, par compensation, à faire voir que

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}$$

et cela était assez peu nécessaire.

Permettez-moi, monsieur, de faire ici quelques remarques

sur des fractions continues différentes de celles que l'on considère ordinairement ; remarques qui pourront servir à éclaircir encore la question.

Soit la fraction continue très-simple :

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\dots}}}$$

Si l'on termine cette fraction au premier terme, au second terme, etc., on trouve successivement :

$$1,\quad 0,\quad \infty,\quad 1,\quad 0,\quad \infty,\quad \ldots..$$

Ces quantités sont périodiques : il n'y a donc pas lieu de chercher une valeur pour la fraction, et c'est à tort que l'on écrirait :

$$x=1-\frac{1}{x}.$$

Soit ensuite la fraction continue :

$$-1+\cfrac{6}{-1+\cfrac{6}{-1+\cfrac{6}{-1+\dots}}}$$

On trouve successivement :

$$-1,\quad -7,\quad -\frac{13}{7},\quad -\frac{55}{13},\quad -\frac{138}{55},\quad \ldots..$$

Il n'est nullement évident que ces nombres tendent vers une limite x, et *à priori*, rien ne fait supposer que l'on puisse écrire :

$$x=-1+\frac{6}{x}.$$

Si, dans le premier exemple, le raisonnement ordinaire conduit à un résultat absurde, et si, dans le second, le même

raisonnement conduit à un résultat qui est peut-être faux, il est donc absolument indispensable, dans la théorie élémentaire des fractions continues, de faire voir qu'une fraction de la forme $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}$ a une valeur.

Considérons plus généralement la fraction périodique

$$\cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \text{etc.}}}}}$$

En admettant que cette fraction ait une valeur x, nous aurons :

$$x = \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - x}}$$

d'où

$$x^2 + (b - a - 1)x + a = 0.$$

Il est, je pense, assez facile de démontrer :

1° Que si cette équation a ses racines réelles, la fraction continue a une valeur égale à l'une des deux racines de cette équation ;

2° Que si l'équation a ses racines imaginaires, la fraction n'a pas de valeur, c'est-à-dire que les réduites se reproduisent périodiquement, en passant par l'infini.

Agréez, etc. E. Catalan.

Paris, 10 juillet 1845.

SUR LE MOYEN

d'obtenir l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires, lorsque cette courbe est donnée par sa tangente.

PAR M. TURQUAN,
Professeur au Collége royal de Pontivy.

En disant qu'une courbe est donnée par sa tangente, j'entends qu'elle est donnée par une équation $f(a, y, p) = 0$, entre les coordonnées x, y, du point de contact, et la tangente trigonométrique p de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x.

Je supposerai que l'équation f soit algébrique, et j'admettrai qu'en un point donné d'une courbe quelconque, on ne puisse mener qu'une seule tangente, à moins que le point donné ne soit un point multiple ou un point conjugué. Or une courbe ne peut avoir qu'un très-petit nombre de semblables points.

Il résulte de là que si l'équation f est d'un degré pair par rapport à p, elle doit avoir des racines égales pour des valeurs d'x et d'y qui répondent à un point de la courbe ; car, si cela n'était pas, il arriverait qu'en chaque point donné, quand même il ne serait ni un point conjugué, ni un point multiple, on ne pourrait mener aucune tangente, ou l'on en pourrait mener plusieurs.

Par conséquent, le polynôme dérivé de f par rapport à p, doit être nul. Il suffira donc d'éliminer p entre f et sa dérivée par rapport à p, pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires.

Cette démonstration ne s'applique pas au cas où l'équa-

tion f est d'un degré impair. Mais la suivante, plus générale, s'appliquera à tous les cas.

Remplaçons p par p', et supposons que p' représente l'inclinaison d'une sécante. Pour que cette sécante puisse caractériser la courbe, elle ne doit point rester quelconque, mais elle doit être assujettie à remplir certaines conditions, par exemple, à sous-tendre constamment un arc de grandeur donnée. Or cet arc pouvant être compté à droite ou à gauche du point donné xy, il en résulte qu'à un même point donné sur la courbe répondent deux de ces sécantes, et par conséquent, deux valeurs réelles de p', et cela quel que soit l'arc sous-tendu.

Si maintenant l'arc sous-tendu devient nul, la sécante devient tangente, et à chaque valeur d'x et d'y ne répondra plus qu'une valeur de p'. Je dis que cependant le degré de l'équation f n'aura pas changé. Car p' désignant l'inclinaison de la sécante, et p l'inclinaison de la tangente, on pourra poser $p'=p+\pi$;
d'où

$$0=f(x,y,p')=f(x,y,p+\pi)=f(xy,p)+\frac{\pi}{1}f'(xy,p)+$$

$$+\frac{\pi^2}{1.2.}f''(x,y,p)+\ldots \text{ etc.}$$

Et quand la sécante sera devenue tangente, c'est-à-dire quand π sera devenu nul, l'équation se réduira à

$$f(x,y,p)=0.$$

Ainsi le degré de l'équation ne change pas, et à chaque valeur d'x et d'y répond une valeur de moins pour p. Donc, deux valeurs de p sont devenues égales.

Quand l'équation f est du second degré par rapport à p, on peut trouver l'équation de la courbe sans élimination; car soit

$$p^2+p\varphi(x,y)+\psi(xy)=0;$$

on aura en résolvant par rapport à p,

$$p = -\frac{1}{2}\varphi(x,y) \pm \sqrt{\frac{\varphi(x,y)^2}{4} - \psi(x,y)}.$$

Et comme les valeurs de p doivent être égales, on doit avoir

$$\frac{\varphi(x,y)^2}{4} = \psi(x,y)$$

c'est l'équation demandée.

Pour exemple proposons-nous ce problème : Trouver une courbe telle que le produit des distances de sa tangente à deux points fixes soit égal à une surface donnée b^2.

En désignant par $2c$ la distance des deux points fixes, et par p l'inclinaison de la tangente en un point quelconque, on trouvera facilement l'équation suivante :

$$(y - px)^2 = p^2(c^2 + b^2) + b^2,$$

ou

$$p' - \frac{2xy}{x^2 - b^2 - c^2} \pm \sqrt{\frac{x^2y^2 - (y^2 - b^2)(x^2 - b^2 - c^2)}{(x^2 - b^2 - c^2)^2}}.$$

Et par suite pour l'équation de la courbe

$$x^2y^2 - (y^2 - b^2)(x^2 - b^2 - c^2) = 0;$$

et toute réduction faite

$$(c^2 + b^2)y^2 + b^2x^2 = b^2(c^2 + b^2).$$

Équation d'une ellipse dont l'origine est au centre, et qui a pour axes b, et $\sqrt{c^2 + b^2}$.

On résoudrait de la même manière le problème suivant : Quelle est la courbe qui jouit de cette propriété, que, en prenant pour axe des abscisses, la ligne qui joint deux points fixes, les ordonnées de la tangente correspondantes à ces points fixes, aient un produit constant égal à b^2.

Note. Le problème proposé est indéterminé. Il y a une infinité de courbes qui satisfont à la question ; l'enveloppe de

toutes ces courbes y satisfait aussi ; et c'est l'équation de cette enveloppe qui est ici indiquée ; souvent cette enveloppe suffit, par exemple, dans cette question traitée par M. Raabe (Crelle, t. I, p. 330, 1826) : Étant donnée une conique et un point fixe dans son plan, trouver une seconde courbe telle, que chaque point de la conique soit également éloigné de la seconde courbe et du point fixe. On parvient à une équation différentielle du premier ordre ; il est évident qu'une solution particulière résout aussi le problème ; si le point fixe est un foyer, la solution particulière est un cercle, que, par analogie avec ce qui existe dans la parabole, M. Raabe a désigné sous le nom de *cercle directeur*. (Voir Blum. t. II, p. 60).

RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX

de l'hélicoïde gauche.

PAR M. F. M. PAIGNON.

—

Parmi les surfaces conoïdes, trouver celle en chacun des points de laquelle les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires.

L'équation différentielle des conoïdes est :

$$px + qy = 0.$$

On en déduit, par la différentiation :

$$rx + p + sy = 0,$$
$$sx + ty + q = 0.$$

Eliminant x et y entre ces trois équations, on obtient :

$$p^2t + q^2r - 2pqs = 0.$$

La condition pour que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires est d'ailleurs :

$$(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs=0.$$

Si entre cette équation et la précédente, on élimine tour à tour t et r, on obtient les deux équations :

$$(1) \qquad r(p^2-q^2)+2pqs=0,$$

$$(2) \qquad t(p^2-q^2)-2pqs=0.$$

On peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$(p^2-q^2)\frac{dp}{dx}+2pq\frac{dq}{dx}=0.$$

On en déduit par l'intégration, en désignant par Y une fonction arbitraire de y :

$$(3) \qquad Y=\frac{p}{p^2+q^2}.$$

On déduit de même de l'équation (2) :

$$(4) \qquad X=\frac{q}{p^2+q^2},$$

(X désignant une fonction arbitraire de x).

Des équations (3) et (4) on déduit :

$$p=\frac{Y}{X^2+Y^2},$$

$$q=\frac{X}{X^2+Y^2}.$$

Or on doit avoir entre p et q la relation

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},$$

qui devient, après toutes les réductions effectuées :

$$\frac{dX}{dx}=-\frac{dY}{dy},$$

relation qui ne peut être satisfaite qu'en posant :

$$\frac{dX}{dx}=a,$$

(a désignant une constante arbitraire).

On a donc :

$$X = ax + b,$$
$$Y = -ay + c,$$

(b et c représentant aussi des constantes arbitraires).

On a alors pour p et q les valeurs suivantes :

$$p = \frac{c - ay}{(ax+b)^2 + (c-ay)^2},$$

$$q = \frac{ax+b}{(ax+b)^2 + (c-ay)^2}.$$

L'équation différentielle de la surface cherchée est donc :

$$dz = \frac{(c-ay)\,dx}{(ax+b)^2 + (c-ay)^2} + \frac{(ax+b)\,dy}{(ax+b)^2+(c-ay)^2}.$$

On trouve en l'intégrant et désignant par e une constante arbitraire :

$$\frac{ax+b}{c-ay} = tg\,(e - az).$$

On voit alors que la surface cherchée est un *hélicoïde gauche*. On pouvait d'ailleurs, en partant de l'équation de l'hélicoïde, reconnaître l'existence de cette propriété ; mais le problème résolu prouve que cet hélicoïde est la seule surface conoïde jouissant de la propriété énoncée.

Note. Ce problème a aussi été traité par M. Catalan (Journal de l'École polytechnique, cahier 29, p. 127, 1843, et Liouville, VII, 203, 1842).

NOTE

Sur la démonstration de la proposition XI du livre IV de la Géométrie de Legendre.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Rappelons d'abord l'énoncé de cette proposition :

Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons.

Pour démontrer ce théorème, Legendre suppose tour à tour qu'au lieu de *circ.* R : *circ.* *r* :: R : *r*, on ait, s'il est possible, R : *r* :: *circ.* R : *circ.* *r'*, *r'* étant en premier lieu moindre que *r*, ensuite plus grand, et il fait voir que ces deux hypothèses conduiraient à des résultats absurdes.

Les partisans de la méthode des limites attaquent cette démonstration, en ce que l'on y suppose implicitement *qu'il y a des circonférences de toutes les grandeurs.* Telle est l'objection reproduite par M. Catalan, dans la préface de son excellent traité de géométrie, où il expose d'ailleurs que le mode de démonstration connu sous le nom de *réduction à l'absurde* lui paraît avoir un vice radical, savoir qu'il n'indique en aucune manière le chemin que l'on aurait pu prendre pour trouver tel ou tel théorème.

On a certainement exagéré les difficultés de cette *réduction à l'absurde*, et je crois exprimer une opinion vraie en disant que les démonstrations où ce principe est employé, ne sont pas plus longues que les démonstrations par la méthode des limites, pourvu que l'on tienne compte des explications préliminaires nécessitées par cette méthode même. Dans beaucoup de cas, elles sont plus courtes, et leur uniformité présente à l'enseignement des avantages incontestables.

J'avoue cependant que la méthode des limites fait mieux voir la route suivie pour découvrir la vérité. Mais celle des infiniment petits atteint bien plus parfaitement ce but, et sans doute, si elle n'est pas écrite dans les traités élémentaires, c'est qu'elle se présente naturellement, et fournit les notions que la réduction à l'absurde achève de démontrer. Il ne pouvait entrer dans les vues de Legendre, d'écrire ce que tout le monde aperçoit intuitivement ; l'illustre géomètre n'a dû insister que pour établir les choses en toute rigueur.

Ces réflexions étaient nécessaires pour montrer qu'il est

permis de préférer à la méthode des limites, le principe d'exhaustion, ce beau fleuron de la géométrie ancienne. Je reviens maintenant au théorème, objet de cette note, dont on a dit que la démonstration par la réduction à l'absurde n'est pas rigoureuse.

Puisque l'on ne veut point admettre qu'il y ait des circonférences de toutes les grandeurs, je ne supposerai pas un quatrième terme plus grand ou moindre que *circ.* r, mais je dirai :

Supposons, s'il est possible, qu'on ait *circ.* R : *circ.* r :: R : r', r' étant un rayon moindre que r. Comme il y a évidemment des rayons, sinon des circonférences de toutes les grandeurs, cette manière de présenter la démonstration écartera la difficulté.

A la circonférence dont le rayon est r', que je suppose décrite concentriquement à *circ.* r, circonscrivez un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas *circ.* r. Circonscrivez à *circ.* R un polygone semblable, on aura entre les périmètres de ces polygones, et les rayons des cercles inscrits *pol.* R : *pol.* r' :: R : r', et comme on a supposé *circ.* R : *circ.* r :: R : r', on aura aussi *circ.* R : *circ.* r :: *pol.* R : *pol.* r', proportion impossible, puisque *circ.* R est moindre que *pol.* R, et *circ.* r plus grand que *pol.* r', donc, etc. Ce qu'on vient de dire suffit pour achever la démonstration.

Il y a donc des circonférences et des cercles de toutes les grandeurs, conclusion qui lève une grande partie des objections du genre de celle qui a été faite par M. Catalan. Cet exemple fait voir comment il semble que Legendre aurait admis implicitement, dans les démonstrations de plusieurs propositions importantes, des vérités tout aussi difficiles à prouver que celles qui font l'objet de ces propositions. Tout le traité de Legendre peut être mis, par des moyens analogues, à l'abri de ce reproche.

Dans ce qui précède, je n'ai touché en rien à la définition du rapport de deux quantités incommensurables entre elles, ce sera l'objet d'une autre note.

Note. Nous croyons que le principe si évident d'Arbogast suffit à tout, au passage des dimensions *courbes* aux dimensions *rectilignes*, et au passage du commensurable à l'incommensurable ; savoir : que deux quantités constantes sont égales, lorsqu'elles sont comprises entre deux limites variables, et dont la différence peut devenir moindre qu'aucune quantité donnée. Ce principe a le mérite de la clarté, de la rigueur, de l'universalité, de l'uniformité, et même de la brièveté. Nous attribuons ce principe au célèbre analyste de Strasbourg, parce qu'il est énoncé dans un mémoire présenté à l'Institut, et non encore publié, sur les principes du calcul infinitésimal ; mémoire qui sert de base aux travaux les plus récents, et à l'enseignement *polytechnique* actuel de cette partie de la science (Voir *Calc. des dérivations*, préface, XII, note 1800; et *Lacroix*, *Calc. diff.*, tome I, § 239).

Ainsi dans le cas actuel $\frac{C}{R}$ est compris entre $\frac{P}{R}$ et $\frac{p}{R}$; P et p sont deux polygones réguliers de même nom, l'un circonscrit, l'autre inscrit ; de même $\frac{C'}{R'}$ est compris entre $\frac{P'}{R'}$ et $\frac{p'}{R'}$; or $\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}$; $\frac{p}{R}=\frac{p'}{R'}$; donc $\frac{C}{R}$ et $\frac{C'}{R'}$, sont entre les mêmes limites variables $\frac{P}{R}$ et $\frac{p}{R}$, et on sait que $P-p$ peut descendre au-dessous de toute grandeur donnée ; donc $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$. La démonstration d'Euclide que $\frac{\text{cercle R}}{R^2}$ est un rapport constant, n'est pas sujette à l'objection faite contre la démonstration de Legendre (*Euclide*, XII, prop. 2) ; là on lit aussi une propo-

sition que j'ai dit erronément n'être pas dans Euclide (t. III, p. 587, *observation*); l'illustre géomètre Alexandrin ne s'occupe pas du rapport $\frac{\text{circonf. R}}{\text{R}}$; il était probablement arrêté par la difficulté de démontrer que $P-p$ peut devenir plus petit qu'aucune quantité donnée; la découverte de la constance de ce rapport est un des nombreux titres d'Archimède à l'immortalité; il a trouvé que cercle $R=\frac{1}{2}$ R circonf. R; or $\frac{\text{cercle R}}{\text{R}^2}$ est constant; donc $\frac{\text{circonf. R}}{\text{R}}$, est aussi un rapport constant double du premier.

Tm.

THÉORÈME

sur le triangle situé dans le plan d'une conique.

—

I. *Problème.* Etant données deux sécantes dans le plan d'une conique, mener par leur point d'intersection deux autres sécantes simultanément conjuguées harmoniques par rapport aux premières sécantes et conjuguées par rapport à la conique.

Solution. Soient MN, MP les deux sécantes données; je prends MN pour axe des x et MP pour axe des y; et soient $y=px$, $y=qx$ l'équation des deux autres sécantes; l'équation de la conique est à six termes; les nouvelles sécantes devant être conjuguées harmoniques par rapport aux axes, on a $p+q=0$ (*Voir* t. II, p. 306, *Observation*). Les mêmes sécantes devant être conjuguées par rapport à la conique, on a:

$$Ap^2-C=0 \text{ (t. I, p. 495)};$$

d'où $$p=\sqrt{\frac{C}{A}};$$

ainsi le problème est toujours possible dans l'ellipse et la parabole ; pour l'hyperbole, le problème n'est possible que lorsque A et C sont de même signe, c'est-à-dire lorsque les deux sécantes axes sont toutes deux simultanément parallèles à des diamètres qui rencontrent ou qui ne rencontrent pas.

Soit r le produit des segments formés par sécante MN, et s le produit des segments formés par la sécante MP, pris à partir de M, on aura :

$$p=\sqrt{\frac{s}{r}}\ \text{(t. III, p. 511)};$$

α étant l'angle que forme la troisième sécante avec l'axe des x, et α' l'angle qu'elle forme avec l'axe des y, on a :

$$p=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\sqrt{\frac{s}{r}};$$

il est évident qu'une sécante entre dans l'angle des coordonnées de même signe, et l'autre dans l'angle adjacent. Lorsque les deux axes donnés sont des tangentes, la sécante intérieure devient un diamètre.

II. *Théorème*. Un triangle ABC étant situé dans le plan d'une conique, si par le sommet A on mène deux sécantes simultanément conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC, et conjuguées par rapport à la conique ; de même aux sommets B et C ; les trois sécantes intérieures se coupent en un même point ; de même deux sécantes extérieures partant des sommets A et B, et la sécante intérieure partant de C : en tout, quatre points de rencontre.

Démonstration. Soient α et α' les angles que forme la sécante intérieure partant de A avec les côtés AC et AB ; β et β' les angles que forme la sécante en B avec BA et BC ; γ et

γ' les angles que fait la sécante en C avec CB et CA; $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'}$ est égal au rapport des segments formés en A, sur AB et AC suffisamment prolongés (1). De même $\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\beta'}$ et $\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma'}$ pour les segments formés en B et en C; donc $\frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{\sin^2\alpha' \sin^2\beta' \sin^2\gamma'}$ est égal au produit des trois rapports segmentaires. Mais d'après le théorème de Carnot, ce produit est égal à l'unité; donc $\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'} = \pm 1$, le signe supérieur indique que les trois sécantes intérieures se rencontrent en un même point, et le signe inférieur est relatif à la seconde partie du théorème. Mais pour l'hyperbole, le théorème ne subsiste qu'avec la restriction signalée ci-dessus.

Observation I. Lorsque les côtés du triangle sont des tangentes à la conique, un des quatre points de rencontre est le centre de la conique, et les trois autres points de rencontre sont les centres respectifs de coniques semblables à la conique donnée, semblablement située et touchant les côtés du triangle; propriétés faciles à démontrer.

Observation II. Lorsque la conique est un cercle, le théorème donne la propriété élémentaire des bissectrices des angles d'un triangle; et par la méthode des projections, ce théorème élémentaire suffit pour établir le théorème relatif à l'ellipse, mais non pour les deux coniques à branches infinies.

Observation III. Le théorème subsiste également lorsque le triangle ABC est inscrit dans la conique; alors le rapport segmentaire se trouvant sous la forme de $\frac{0}{0}$ a une valeur déterminée (t. III, p. 512).

SUR L'ÉVALUATION

du volume d'un parallélipipède à une base sphérique.

D'après Euler (*).

I. Soient O le centre d'une sphère; OA, OB, deux rayons à angle droit; M un point sur OA; N un point sur OB. Ayant construit le rectangle OMPN, on le prend pour base d'un parallélipipède droit, qu'on prolonge jusqu'à la sphère. Il s'agit d'évaluer le volume de cette portion de la sphère.

II. Désignons par OO', MM', PP', NN' les quatre arêtes du parallélipipède.

Faisons OM $= m$; m et n sont plus petits que r;
ON $= n$;
OO' $= r =$ rayon de la sphère;

on aura :

$$MM'^2 = r^2 - m^2 = m'^2;$$
$$PP'^2 = r^2 - m^2 - n^2 = p'^2;$$
$$NN'^2 = r^2 - n^2 = n'^2;$$
$$\frac{m}{n'} = \sin u;$$
$$\frac{n}{m'} = \sin v;$$
$$\frac{mn}{m'n'} = \sin t,$$

V = le volume du parallélipipède sphérique.

On a :

$$6V = 2mnp' + 2r^2[mu + nv - rt] + nn'^2 u + mm'^2 v.$$

(*) N. Comm. Petrop., tome XIV, p. 80, an. 1769.

III. Lorsque le point P est sur la sphère, alors $m^2+n^2=r^2$: $m=n'$; $n=m'$; et l'on a :

$$6V=\pi r^2(m+n-r)+\frac{\pi}{2}mn(m+n);$$

ce qui atteint le maximum lorsque $m=n$; et alors

$$m^2=\frac{r^2}{2}=n^2,\ \ 6V=\frac{\pi r^3}{4}[5\sqrt{2}-4].$$

SUR LES LIGNES

APLANÉTIQUES, LEMNISCATES, CAUSTIQUES, ETC.

—

1. Lemme I. L'enveloppe d'un cercle assujetti à passer par un point fixe, et à avoir son centre sur une droite fixe est, outre le 1er point fixe, un second point fixe, symétrique au premier, relativement à la droite.

2. Lemme II. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une ligne plane quelconque, et à passer par un point fixe, situé dans le même plan, le lieu du point symétrique au point fixe, relativement aux tangentes à la ligne donnée, est la courbe enveloppe du cercle ; plus le point fixe lui-même.

Démonstration. Le cercle mobile, dans deux positions infiniment voisines, peut être considéré comme se mouvant sur la tangente ; or le point d'intersection de ces deux cercles, est le point de contact du cercle mobile avec son enveloppe ; donc...

3. Lemme III. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une droite fixe, et à toucher constamment une seconde droite, situées l'une et l'autre dans le même plan, a pour enveloppe, outre cette seconde droite, une troisième droite fixe ;

la première droite est la bissectrice des deux autres. Pour chaque position particulière du cercle mobile, le point de contact avec son enveloppe est le point symétrique, relativement à la première droite, du point où le cercle touche la seconde droite.

4. Lemme IV. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une ligne plane, et à toucher constamment une seconde ligne, située dans le même plan, pour chaque position particulière du cercle mobile, le point de contact avec l'enveloppe est le point symétrique du point de contact avec la seconde ligne, relativement à la tangente à la première ligne, menée par le centre du cercle; c'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

5. *Définition*. Une ligne *aplanétique* est l'enveloppe d'un cercle variable de grandeur, et dont le centre décrit une ligne plane nommée *directrice*, et qui touche constamment une seconde ligne située dans le même plan, et qu'on peut nommer ligne *polaire*.

6. Si, conservant la même directrice, on prend la ligne aplanétique pour ligne polaire, celle-ci deviendra une ligne aplanétique; donc ces deux lignes sont conjuguées relativement à la directrice; étant données deux lignes planes quelconques, on peut, généralement parlant, les considérer comme conjuguées, relativement à une ligne directrice; ainsi deux droites sont *aplanétiquement* conjuguées, relativement à leur bissectrice; deux cercles sont aplanétiquement conjugués, en prenant pour directrice une hyperbole, etc.

7. Lorsque la ligne polaire se réduit à un point fixe, on rentre dans le cas du lemme II.

8. Pour mener une tangente à une ligne aplanétique, par un point situé sur la ligne, il suffit de mener une tangente au cercle mobile, répondant à ce point.

9. *Problème*. Étant donnée l'équation d'une conique direc-

trice, et les coordonnées d'un pôle, trouver l'équation de la ligne aplanétique, conjuguée au pôle.

Solution. Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$, l'équation de la conique; les axes sont rectangulaires; et soient a et b les coordonnées du pôle; abaissant du pôle une perpendiculaire sur une tangente à la conique, passant par le point (x',y'), et doublant cette perpendiculaire, on aura un point de l'enveloppe (lemme).

Or, l'on a :

$$y'[2Ay+Bx+D]+x'[2Cx+By+E]=-Dy-Ex-2F,$$

équation de la tangente;

$$y'[By-2Ax-Bb+2Aa]+x'[2Cy-Bx-2Cb+Ba]=$$
$$=-Ey+Dx+Eb-Da;$$

équation d'une perpendiculaire à la tangente, abaissée du pôle.

De là on tire :

$$y'=\frac{k'(y^2+x^2)-y(l'+bk')+x(n-k'a)-na+bl'}{T}$$

$$x'=\frac{k(y^2+x^2)+y(n-kb)-x(l+bk)-nb+al}{T},$$

$$T=m(y^2+x^2)-y(k'+mb)-x(k+ma)+bk'+ak;$$

substituant les valeurs de y', x', dans l'équation de la conique, on a l'équation du lieu de la projection du pôle sur la tangente. Pour faciliter le calcul, nous devons faire connaître cinq nouvelles *identités* qui se présentent très-souvent.

1. $Al'^2-Bnl'+Cn^2+Dl'k'-Enk'+Fk'^2=Al'^2-Bnl'+$
$+Cn^2-Fk'^2+k'[Dl'-En+2Fk']=Al'^2-Bnl'+$
$+Cn^2-Fk'^2=Ll'$.

2. $An^2-Bnl+Cl^2-Dnk+Flk+Fk^2=Ll$.

3. $2Ak'l'+B[kl'-k'n]-2Ckn+D[ml'+k'^2]+F[kk'-mn]+$
$+2Fmk=l'[2Ak'+Bk+Dm]-n[2Ck+Bk'+Em]+k'[Dk'+$
$+Ek+2mF]=2Lk'$.

4. $-2Ak'n+B[k'l-kn]+2Ckl+D[kk'-mn]+E[ml+k^2]+$
$+2Fmk'=2Lk.$

5. $-2Al'n+B[ll'+n^2]-2Cln+D[l'k-nk']+E[lk'-nk]+$
$+2Fkk'=-n[2Al'-Bn+2Cl]+Bll'-2Fkk'+k[Dl'-En]-$
$-k'[Dn-El]+4Fkk'=-2Ln;$

effectuant le calcul, et après avoir divisé tous les termes par le facteur commun L, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} m(y^2+x^2)^2-2(mb+k')y^3-2(ma+k)x^3-2y^2x(am+k)- \\ -2x^2y(bm+k')+y^2[mb^2+4bk'+2ka+l']+2xy[mab+kb+ \\ +k'a-n]+x^2[ma^2+4ak+2k'b+l]+2y[-k'b^2-kab- \\ -l'b+na]+2x[-ka^2-k'ab-la+nb]+b^2l'+a^2l- \\ -2nab=0. \end{array}\right\} (1)$$

Remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$, on obtient l'équation de la courbe aplanétique cherchée.

Corollaire I. La ligne donnée par l'équation (1) est donc une ligne semblable à la courbe aplanétique, semblablement placée, de dimension moitié moindre ; et le pôle est le centre d'homologie.

Remarque. L'intersection de la courbe (1) avec la conique, donne les pieds des normales menées par le point (a, b) à la conique ; nous savons d'ailleurs que ces points sont déterminés par l'intersection de la conique avec une hyperbole équilatère (p. 17, t. II) ; qui est aussi le lieu géométrique de l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point (a, b) sur une tangente, avec le diamètre passant par le point de contact. (Poncelet, *Propriétés projectives*, p. 288, § 492.)

Corollaire II. En prenant la ligne (1) pour ligne polaire, le pôle devient l'aplanétique conjuguée ; ainsi, la ligne doit passer par le pôle (lemme 6). En effet, l'équation est satisfaite en faisant $x=a$ et $y=b$; ce qu'on pouvait prévoir par les valeurs de x' et y', qui se réduisent par ces substitutions à $\frac{0}{0}$.

Corollaire III. Lorsque m n'est pas nul, les termes du quatrième degré ne peuvent s'anéantir ; donc pour l'ellipse et l'hyperbole l'aplanétique est toujours une courbe fermée.

Corollaire IV. Si le pôle se confond avec l'origine, alors l'équation (1) devient :

$$\left.\begin{array}{l} m(y^2+x^2)^2-2k'y^3-2kx^3-2ky^2x-2k'x^2y+l'y^2- \\ \quad -2nxy+lx^2=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Lorsque l'origine est un foyer, l'on a, comme on sait, $l=l'$; $n=0$; l'équation divisible par y^2+x^2 devient celle du cercle

$$m\,(y^2+x^2)-2k'y-2kx+l=0\,,$$

cercle concentrique à la conique et passant par les extrémités de l'axe focal. Dans la parabole, le cercle se change dans la droite, ayant pour équation $2k'y+2kx-l=0$, qui est la tangente au sommet.

Corollaire V. Passant aux coordonnées polaires, l'équation (2) donne, après avoir divisé par z^2 :

$$mz^2-2z(k'\sin\varphi+k\cos\varphi)+l'\sin^2\varphi-2n\sin\varphi\cos\varphi+l\cos^2\varphi=0\,;$$

d'où :

$$mz=k'\sin\varphi+k\cos\varphi\pm2\sqrt{\mathrm{L}(\mathrm{A}\cos^2\varphi-\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi+\mathrm{C}\sin^2\varphi)}$$

(*Voir* les identités, t. I, p. 490).

1° *Ellipse.* La quantité sous le radical ne peut jamais devenir nulle et reste essentiellement positive. Donc z est toujours réelle : autrement une droite menée par l'origine coupe la courbe en deux points. Pour que z soit nulle, il faut que l'on ait $l'\sin^2\varphi\cos\varphi-2n\sin\varphi\cos\varphi+l\cos^2\varphi=0$; ce qui donne :

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{n\pm2\sqrt{\mathrm{FL}}}{m}.$$

Lorsque l'origine est dans l'intérieur de la courbe, FL est négatif ; par conséquent, lorsque l'équation est débarrassée de z^2, la courbe ne passe point par l'origine ; mais lorsque l'origine est extérieure à la courbe, le produit FL étant positif

(t. II, p. 112), la courbe passe par l'origine, qui est alors un point multiple ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque alors on peut mener par l'origine deux tangentes à l'ellipse. Il est possible aussi de mener par la même origine deux, trois ou quatre normales (t. II, p. 22, 23). Ainsi, selon la position de l'origine, la ligne aplanétique touchera l'ellipse en deux, trois ou quatre points : il est évident qu'elle n'a aucun point dans l'intérieur de l'ellipse.

L'origine étant au centre, et rapportant l'ellipse à ses axes principaux, il vient :

$$mz = 2\sqrt{L(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)}.$$

2° Désignant le grand axe par a et le petit axe par b, on aura :

$$z^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

a est toujours un maximum ; et tant qu'on a $a^2 < 2b^2$, b est aussi un maximum ; la courbe aplanétique est comprise entre l'ellipse et les côtés du rectangle circonscrit à l'ellipse. Mais lorsque a^2 est supérieur à b^2, b devient un minimum, et il y a à l'extrémité du petit axe un point de rebroussement ; et lorsque $a^2 = 2b^2$, les extrémités du petit axe sont des centres de courbure (t. II, p. 79), et l'ellipse est la projection d'un cercle incliné de 45° sur le plan de l'ellipse ; et dans ce cas, b est encore un maximum. En général, pour que y devienne égal à b, il faut avoir $x = 0$ ou $x^2 = a^2 - 2b^2$.

L'aire de la courbe est égale au demi-cercle construit sur la corde du cadran elliptique.

$zd\varphi$ est l'élément d'un arc elliptique ; seconde espèce de transcendante elliptique.

2° *Hyperbole.* La quantité sous le radical peut devenir nulle et par conséquent devenir imaginaire ; on obtient ainsi pour tang φ deux limites :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{B \pm \sqrt{m}}{2C}.$$

on peut supposer $B = 0$. On voit donc que les droites limites sont perpendiculaires aux asymptotes et se confondent avec elles, lorsque l'hyperbole est équilatère.

Lorsque l'origine est au centre, l'équation devient, après avoir divisé par z^2 :

$$z^2 = a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi\ ;$$

ce centre est un point d'inflexion ; la courbe a la forme d'un huit de chiffre, plus connu sous le nom de *lemniscate*, mot dérivé du grec, où il signifie une rosette de ruban. Si $b > a$, la lemniscate est dans l'angle des asymptotes, qui sont sécantes. Si $b = a$, les asymptotes deviennent tangentes ; et pour $b < a$, la lemniscate coupe les asymptotes en deux points, outre l'origine qui est un point double (p. 142).

L'équation aux coordonnées rectangulaires est :

$$(y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2\ ;$$

résolvant par rapport à x, on conclut facilement que la valeur maxima de y est $\frac{a^2}{2c}$, qui répond à l'abscisse

$$x^2 = \frac{a^2\,(a^2 + 2b^2)}{4(a^2 + b^2)}.$$

Si nous désignons, dans le cercle dont le rayon est un, par σ la longueur numérique de l'arc dont la tangente trigonométrique est $\frac{a}{b}$, l'aire totale de la lemniscate est :

$$\frac{1}{2}\,\sigma(a^2 - b^2) + \frac{1}{4}\,(a^2 + b^2)\sin 2\sigma.$$

Lorsque l'hyperbole est équilatère (lemniscate de Bernoulli), cette expression se réduit à :

$$\frac{1}{4}\,(a^2 + b^2).$$

$\frac{d\varphi}{z}$ est l'élément de la première espèce de transcendante elliptique.

Faisant $a^2 = b^2 = 2a'^2$, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$[y^2+(x-a')^2]\,[y^2+(x+a')^2]=a'^4.$$

Donc la lemniscate de Bernoulli est aussi une Cassinoïde, ayant ses deux foyers sur l'axe transverse, à une distance du centre égale à $\frac{a}{\sqrt{12}}$.

10. On peut donner, dans certains cas particuliers, aux équations de la tangente et de la normale, des formes très-avantageuses, surtout pour résoudre promptement des problèmes aux examens.

Soit l'équation de l'ellipse, rapportée aux axes principaux,

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

On voit facilement qu'en prenant :

$$x = \frac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}; \qquad y = \frac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}},$$

x et y sont les coordonnées d'un point de l'ellipse ; or, en ce point, on a :

$$y = mx + \sqrt{m^2a^2+b^2} \;(1),\text{ équation de la tangente ;}$$

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{c^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}} \;(2),\quad \text{id. de la normale ;}$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

La forme (1) est une suite de l'équation (18) (t. II, p. 108), et on trouve la forme (2) en supposant $y = -\frac{1}{m}x + p$ (3) et déterminant p de manière que l'intersection des droites (1) et (3) soit sur l'ellipse.

Probl. I. Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur une tangente à l'ellipse.

Solution. La parallèle à la normale a pour équation :

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x');$$

éliminant m entre cette équation et l'équation (1), il vient :

$$[y(y-y')+x(x-x')]^2=a^2(x-x')^2+b^2(y-y')^2,$$

équation du lieu cherché.

Probl. II. Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur la normale.

Solution. $$y-y'=m(x-x'),$$

équation de la parallèle à la tangente ; éliminant m entre cette équation et l'équation (2), il vient :

$$[y(y-y')+x(x-x')]^2[a^2(y-y')^2+b^2(x-x')^2]=c^4(x-x')^4,$$

équation du lieu cherché.

Parabole. Équation $y^2=2px$; axes rectangulaires.

$x'=\frac{p}{2m^2}$; $y'=\frac{p}{m}$, équations d'un point de la parabole ;

$y=mx+\frac{p}{2m}$, équation de la tangente ;

$y=-\frac{x}{m}+\frac{p}{m}+\frac{p}{2m^3}$, équation de la normale ;

$$2x(x-x')^2+2y(y-y')(x-x')+p(y-y')^2=0;$$
$$2(y-y')^3y+2(y-y')^2x(x-x')=2p(y-y')^2(x-x')+p(x-x')^3.$$

La première équation est celle de la projection du point quelconque (x', y') sur la tangente, et la seconde sur la normale.

Faisant $$x'=y'=0,$$

la première équation devient :

$$2x^3+2y^2x+py^2=0,$$

équation de la cissoïde.

(*La suite prochainement.*)

Tm.

THÉORÈME

Sur le triangle inscrit dans une conique.

—

Théorème I. Un triangle étant inscrit dans une conique, si par chaque sommet on mène une droite respectivement conjuguée au côté opposé, les trois droites se coupent en un même point.

Démonstration. Soit ABC, le triangle inscrit; prenons AB pour axe des x, et AC pour axe des y; l'équation de la conique sera : $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=0$; on aura ainsi coordonnées du point A ; $x=0$; $y=0$;

Id. B; $x=-\frac{E}{C}$; $y=0$,

Id. C; $x=0$; $y=-\frac{D}{A}$;

équation de la droite AB ; $y=0$,

AC, $x=0$,

BC, $AEy+CDx+DE=0$;

ayant égard à l'équation (5) (*Nouvelles Annales*, tome I, p. 495), il vient :

équation de la droite conjuguée à

AC, passant par B; $2ACy+BCx+BE=0$,

AB, Id. C; $ABy+2ACx+BD=0$,

BC, Id. A; $Ak'y-Ckx=0$.

Éliminant D et E des deux premières équations, on obtient la troisième ; par conséquent les trois droites passent par le même point.

Observation I. Cette propriété connue pour le cercle, peut être transportée par les projections, dans l'ellipse, mais non dans les deux autres coniques.

Observation II. En suivant la même marche, on démontre facilement, que les droites conjuguées respectivement à ces côtés, et passant par les milieux de ces côtés, se rencontrent aussi en un point, qui est sur la même droite que le point précédent et le centre de gravité du triangle; théorème d'Euler généralisé.

Tm.

GRAND CONCOURS (année 1845).

Etant donné un cercle, et un point dans son intérieur, on suppose que sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe, et qui passe par le point donné : On demande

1° *L'équation générale de ces ellipses.*

2° *Le lieu géométrique de leurs foyers.*

3° *Le lieu géométrique des extrémités de leurs petits axes.*

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. COULLARD-DESCOS (AUBIN-ÉMILE),
Né à Paris, le 28 février 1826.
(Élève externe du collége royal de Louis-le-Grand. — Classe de M. Richard.)

—

Je prendrai pour axe des x, une droite passant par le centre du cercle donné, et par le point donné M : pour axe des y, une perpendiculaire à cette droite menée par le centre. Soit a le rayon du cercle, et d la distance AM.

1° Je considère (*Fig.* 44), un diamètre quelconque BC, faisant avec l'axe des x un angle ω : soit BMC l'ellipse ayant le diamètre DE pour axe : si on la rapporte aux axes rectangulaires Ax', Ay', son équation sera de la forme

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Pour déterminer b, remarquons que cette courbe passe par le point M, dont les coordonnées par rapport aux axes Ax', Ay', sont AP et —MP ; ou en fonction de l'angle va-

riable ω, $d\cos\omega$ et $-d\sin\omega$. Ainsi, nous aurons l'identité :

$$a^2d^2\sin^2\omega+b^2d^2\cos^2\omega=a^2b^2,$$

d'où

$$b^2=\frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega}.$$

Remplaçant b^2 par sa valeur dans l'équation (1), nous aurons :

$$a^2y^2+\frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega}x^2=\frac{a^4d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega},$$

ou en supprimant a^2 de part et d'autre, et chassant les dénominateurs,

$$(2)\qquad (a^2-d^2\cos^2\omega)y^2+d^2\sin^2\omega . x^2=a^2d^2\sin^2\omega.$$

Telle est l'équation d'une ellipse quelconque BMC, ayant pour axe un diamètre du cercle, faisant avec l'axe des x un angle ω, et passant par le point M : cette ellipse étant rapportée au diamètre Ax' pris pour axe des x, et au diamètre perpendiculaire Ay' pris pour axe des y : pour obtenir l'équation de la même courbe, rapportée aux axes primitifs Ax, Ay, il suffira de remplacer x, y par

$$x\cos\omega+y\sin\omega,$$
$$-x\sin\omega+y\cos\omega;$$

ce qui donne toutes réductions faites,

$$(\text{E})\ldots\ \left\{(a^2-d^2)\cos^2\omega+d^2\sin^2\omega\right\}y^2-2(a^2-d^2)\sin\omega\cos\omega . xy+$$
$$+a^2\sin^2\omega . x^2-a^2d^2\sin^2\omega=0.$$

On peut vérifier, ce qui est assez évident de soi-même, que l'axe dirigé suivant le diamètre Ax' est un grand axe : quand, comme on le suppose ici, le point M est intérieur au cercle. En effet, la demi-longueur de cet axe $=a$; celle de son conjugué,

$$=\frac{ad\sin\omega}{\sqrt{a^2-d^2\cos^2\omega}}<\frac{ad\sin\omega}{\sqrt{d^2(1-\cos^2\omega)}}=\frac{ad\sin\omega}{a\sin\omega}=a.$$

2° Cherchons maintenant le lieu géométrique des foyers : pour l'obtenir, considérons l'équation (2) ; en désignant par ρ la demi-excentricité de l'ellipse qu'elle représente, ou la distance du centre au foyer F, nous aurons évidemment :

$$(3) \qquad \rho^2 = a^2 - \frac{a^2 d^2 \sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega} = \frac{a^4 - a^2 d^2 \cos^2\omega - a^2 d^2 \sin^2\omega}{a^2 - d^2 \cos^2\omega} =$$

$$= \frac{a^2(a^2 - d^2)}{a^2 - d^2\cos^2\omega}.$$

Nous avons ainsi l'expression de ρ en fonction des quantités connues a et d, et de l'angle ω que fait avec l'axe des x la droite AF ; par conséquent on pourra regarder... (3) comme l'équation polaire du lieu des foyers : le pôle étant à l'origine, et l'axe polaire dirigé suivant l'axe des x.

Si l'on voulait avoir le lieu des points F', il suffirait de remplacer dans... (3) ω par $\omega - 180°$, ce qui n'altérera pas ρ, puisque le cosinus de l'angle variable n'y entre qu'au carré.

Pour reconnaître facilement ce que représente l'équation (3), repassons des coordonnées polaires, aux coordonnées rectilignes : ce passage peut ici s'effectuer très-simplement. En effet, chassons les dénominateurs, il viendra :

$$a^2\rho^2 - d^2\rho^2\cos^2\omega = a^2(a^2 - d^2,$$

ou bien

$$a^2(\rho^2\cos^2\omega + \rho^2\sin^2\omega) - d^2\rho^2\cos^2\omega = a^2(a^2 - d^2);$$

mais

$$\rho\cos\omega = x, \quad \rho\sin\omega = y,$$

donc

$$a^2(x^2 + y^2) - d^2x^2 = a^2(a^2 - d^2);$$

ou bien

$$(F) \qquad a^2y^2 + (a^2 - d^2)x^2 = a^2(a^2 - d^2),$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

L'axe dirigé suivant Ax, a pour longueur $2a$, et son conjugué a pour longueur $2\sqrt{a^2-d^2}$.

Ainsi, par le point donné M (fig. 45), j'élèverai une perpendiculaire à BC qui rencontrera la circonférence en H : par le point H, je mènerai une parallèle à BC, qui coupera Ay en D ; puis je prendrai le symétrique E de D par rapport au centre A : DE sera le petit axe ; car

$$DE = 2.AD = 2\sqrt{a^2-d^2}.$$

D'ailleurs le grand axe = BC : connaissant les deux axes de l'ellipse donnée par l'équation (F), on pourra facilement la construire.

La figure AMHD est un rectangle ; par conséquent DM = AH = AB : donc le point donné M, et son symétrique M', par rapport au centre sont les deux foyers de l'ellipse .. (F).

On pouvait parvenir à ces résultats par des considérations géométriques. Considérons une des ellipses en question (*Fig.* 45) : soit IK son grand axe ; soient F et F' ses deux foyers : nous aurons :

$$MF + MF' = 2a.$$

Mais les deux droites MM' et FF' se coupent mutuellement en deux parties égales : donc, les quatre points F, M, F', M', sont les sommets d'un parallélogramme ; par conséquent

$$MF' = FM' :$$

ainsi

$$MF + MF' = MF + M'F = 2a.$$

Donc le point F appartient à une ellipse ayant pour grand axe BC, et pour foyers les deux points M et M'.

3° Cherchons enfin le lieu géométrique des extrémités des petits axes : en nommant ρ la distance AD (*Fig.* 44), nous avons trouvé :

$$\rho^2 = \frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega};$$

pour avoir l'équation polaire du lieu cherché, il est clair qu'il suffit de changer ω en $\omega - 90°$; ce qui donnera :

$$\rho^2 = \frac{a^2 d^2 \cos^2\omega}{a^2 - d^2 \sin^2\omega},$$

ou en extrayant la racine carrée,

$$(E') \qquad \rho = \frac{ad \cos\omega}{\sqrt{a^2 - d^2 \sin^2\omega}}.$$

La courbe représentée par cette équation, est évidemment symétrique par rapport à l'axe polaire, et à une perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire : de sorte que pour avoir la forme de la courbe, il suffira de faire croître ω depuis 0 jusqu'à 90 : si l'on fait $\omega = 0$, $\rho = d$: donc, le lieu passe par le point M : pour toutes les valeurs réelles de ω, le dénominateur ne sera jamais nul; par conséquent, toutes les valeurs de ρ sont finies, et la courbe est limitée dans tous les sens. D'ailleurs pour $\omega = 90°$, $\rho = 0$; donc, la courbe passe par l'origine, et comme on peut regarder Ay comme la limite des positions d'une sécante variable, tournant autour de l'un de ses points d'intersection A avec la courbe, jusqu'à ce que l'autre vienne se confondre avec le premier, on peut affirmer que la courbe est tangente à l'axe des y; ce qui donne l'arc de courbe AEM (*Fig*. 46). Il est facile maintenant de tracer la courbe entière. Elle n'a aucun point commun avec le cercle : c'est ce qu'il est très-facile de vérifier.

En cherchant la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe fait avec le rayon vecteur du point de contact, on reconnaît que cette tangente devient infinie pour $\omega = 0$; en effet, on trouve en posant $\frac{d}{a} = e$:

$$\text{tang. } \delta = \frac{\cos\omega\,(1 - e^2 \sin^2\omega)}{\sin\omega\,(e^2 - 1)}.$$

Par conséquent la tangente en M est perpendiculaire à l'axe des x.

Si l'on supposait le point M sur la circonférence, il est clair alors que les ellipses qui satisferaient aux conditions du problème, ne seraient autre chose que le cercle donné : par conséquent, on devrait trouver pour lieu des extrémités des petits axes, le cercle lui-même. C'est en effet ce qui arrive : car la supposition de $d=a$, réduit... (E') à $\rho=a$.

Conservons les mêmes axes, et voyons ce que deviendraient les lieux dont nous venons de nous occuper, dans le cas où le point M serait extérieur au cercle. Alors d est $>a$. L'équation générale de toutes les ellipses ayant un diamètre du cercle pour axe, et passant par le point donné, est encore l'équation (E) : seulement, dans ce cas, $2a$ est le petit axe de chaque ellipse. C'est ce qu'on reconnaîtra par un calcul analogue au précédent.

Le lieu des foyers est une hyperbole (*Fig.* 47) dont l'axe transverse a pour longueur $2\sqrt{d^2-a^2}$, et l'axe non transverse, $2a$. On reconnait encore que M et M' sont ses deux foyers. Par des considérations géométriques, on démontre facilement que le lieu des foyers a des branches infinies, et que le coefficient angulaire des asymptotes $=\dfrac{a}{\sqrt{d^2-a^2}}$.

Le lieu des extrémités des petits axes est le cercle lui-même (*Fig.* 48) ; celui des extrémités des grands axes a pour équation :

$$\rho=\frac{ad\cos\omega}{\sqrt{a^2-d^2\sin^2\omega}};$$

et comme $a<d$, ce lieu se compose de quatre branches infinies. Celles qui sont d'un même côté de l'axe des y se raccordent aux points M et M' ; et elles ont en ces points des tangentes perpendiculaires à l'axe des x. Les branches Mz et

$M'\nu'$ ont une asymptote commune qui passe par l'origine, et dont la direction est donnée par l'équation $\sin\omega = \frac{a}{d}$: ($\omega < 90°$). Les deux autres branches ont aussi une asymptote commune qui passe par l'origine, et dont la direction est donnée par l'équation $\sin\omega = \frac{a}{d}$: ($\omega > 90°$). Enfin, on peut remarquer que ce dernier lieu a un point conjugué qui est l'origine A : car pour des valeurs de ω peu différentes de $90°$, ρ est imaginaire ; et $\omega = 90°$ donne $\rho = 0$.

DE LA THÉORIE DES DIVISEURS RATIONNELS.

(Suite, voyez p. 339.)

PAR M. DURVILLE,
professeur au collége Saint-Louis.

Soit une équation

$$Fx = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots\ldots + A_m = 0,$$

dont les coefficients sont entiers ; proposons-nous d'étendre la méthode des diviseurs du second degré à la détermination des diviseurs rationnels du troisième, du quatrième degré, etc. du polynôme Fx.

Comme Fx est entier, tout diviseur rationnel de Fx est entier ainsi que le quotient correspondant ; soit $x^3 - px^2 - qx - r$ un diviseur du troisième degré, et soient B_1, B_2, ... B_{m-3} les coefficients des différents termes du quotient à partir du second, et par conséquent les premiers termes des restes successifs que présente l'opération de la division. Le dernier reste sera du second degré, et en suivant l'analogie des notations, il doit être représenté par $B_{m-2}x^2 + B_{m-1}x + B_m$,

et comme il doit être nul pour toute valeur donnée à x, il donne lieu aux trois équations de condition $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$, qui doivent être satisfaites simultanément par le système des valeurs entières de p, q, r, coefficients du diviseur du troisième degré.

On trouve entre les quantités B_1, B_2, B_3, ... B_m, les relations :

$$A\left\{\begin{aligned}
&B_1 = A_1 + p,\\
&B_2 = A_2 + pB_1 + q,\\
&B_3 = A_3 + pB_2 + qB_1 + r,\\
&B_4 = A_4 + pB_3 + qB_2 + rB_1,\\
&\vdots\\
&B_{m-3} = A_{m-3} + pB_{m-4} + qB_{m-5} + rB_{m-6},\\
0 = {}&B_{m-2} = A_{m-2} + pB_{m-3} + qB_{m-4} + rB_{m-5},\\
0 = {}&B_{m-1} = A_{m-1} + qB_{m-3} + rB_{m-4},\\
0 = {}&B_m = A_m + rB_{m-3},
\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, m équations entre les $m-3$ coefficients B_1, B_2.... B_{m-3} du quotient, et les trois coefficients p, q, r du diviseur. Il faut trouver des valeurs entières de p, q, r qui satisfassent à ces équations, en déterminant aussi des valeurs entières pour les coefficients B_1, B_2, etc. du diviseur.

Proposons-nous d'abord d'éliminer les $m-3$ coefficients B_1, B_2 .... et d'obtenir les trois équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ en fonction seulement des quantités p, q, r.

Je remarque que si l'on fait le développement de $(x^3-px^2-qx-r)^{-1}$ ou du quotient $\dfrac{1}{x^3-px^2-qx-r}$, on trouve une série récurrente du troisième ordre :

$$x^{-3} + px^{-4} + \left.\begin{matrix} p^2 \\ +q \\ \end{matrix}\right|\, x^{-5} + \left.\begin{matrix} p^3 \\ +2pq \\ +r \end{matrix}\right|\, x^{-6} \ldots$$

et si on représente les coefficients successifs par $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots.$ la loi de ces coefficients sera exprimée par l'égalité :

$$\varphi_n = p\varphi_{n-1} + q\varphi_{n-2} + r\varphi_{n-3}.$$

Cela posé, soit le système d'équations :

$$\begin{aligned}
B_h &= A_h + pB_{h-1} + qB_{h-2} + rB_{h-3},\\
B_{h-1} &= A_{h-1} + pB_{h-2} + qB_{h-3} + rB_{h-4},\\
&\vdots\\
B_4 &= A_4 + pB_3 + qB_2 + rB_1,\\
B_3 &= A_3 + pB_2 + qB_1 + r,\\
B_2 &= A_2 + pB_1 + q,\\
B_1 &= A_1 + p.
\end{aligned}$$

Multiplions la première équation par φ_0, la deuxième par φ_1, etc., la dernière par φ_{h-1}, tous les coefficients B_{h-1}, $B_{h-2} \ldots. B_2$, B_1 disparaîtront, et on aura :

$$B_h = A_h\varphi_0 + A_{h-1}\varphi_1 + A_{h-2}\varphi_2 \ldots. + A_1\varphi_{h-1} + r\varphi_{h-3} + q\varphi_{h-2} + p\varphi_{h-1};$$

mais $\qquad \varphi_h = p\varphi_{h-1} + q\varphi_{h-2} + r\varphi_{h-3};$

donc

$$B_h = A_h\varphi_0 + A_{h-1}\varphi_1 + A_{h-2}\varphi_2 \ldots. + A_2\varphi_{h-2} + A_1\varphi_{h-1} + \varphi_h;$$

donc, si on fait successivement $h = m-3$, $m-4$, $m-5$, et qu'on porte les valeurs de B_{m-3}, B_{m-4}, B_{m-5} dans les trois dernières équations $B_{m-2} = 0$, $B_{m-1} = 0$, $B_m = 0$, on aura :

$$B_{m-2} = A_{m-2} + pA_{m-3} \left.\begin{array}{r} +p\varphi_1 \\ +q \\ \end{array}\right| A_{m-4} \left.\begin{array}{r} +p\varphi_2 \\ +q\varphi_1 \\ +r \end{array}\right| A_{m-5} \ldots. \left.\begin{array}{r} +p\varphi_{m-3} \\ +q\varphi_{m-4} \\ +r\varphi_{m-5} \end{array}\right\} = 0,$$

$$B_{m-1} = A_{m-1} + qA_{m-3} \left.\begin{array}{r} +q\varphi_1 \\ +r \end{array}\right| A_{m-4} \left.\begin{array}{r} +q\varphi_2 \\ +r\varphi_1 \end{array}\right| A_{m-5} \ldots. \left.\begin{array}{r} +q\varphi_{m-3} \\ +r\varphi_{m-4} \end{array}\right\} = 0,$$

$$B_m = A_m + rA_{m-3} + r\varphi_1 A_{m-4} + r\varphi_2 A_{m-5} \ldots. + r\varphi_{m-3} = 0,$$

qui doivent être satisfaites par un même système de valeurs entières de p, q, r.

Si l'on connaissait la valeur de p et celle de r, et qu'on les substituât dans ces équations, elles deviendraient seulement fonctions de q, et devraient avoir une solution entière commune ; donc si l'on représente par G, G′, G″ l'ensemble des termes indépendants de q dans les trois équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$; G, G′, G″ pour ces valeurs de p et r deviendront des nombres ayant pour diviseur commun la valeur de q correspondante.

G, G′, G″ étant des multiples de la valeur de q, les résultats que l'on obtiendra par voie d'addition ou de soustraction de ces polynômes seront encore des multiples de cette valeur de q : par conséquent, on pourra éliminer p entre les trois équations $G=M(q)$, $G'=M(q)$, $G''=M(q)$, et on obtiendra deux fonctions de r, qui, pour une valeur convenable de cette inconnue, deviendront des nombres ayant pour facteur commun la valeur correspondante de q.

Pour former les polynômes G, G′, G″, il faut, dans les équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ et dans les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, etc., faire $q=0$.

Or, si on représente par ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_n$ les valeurs des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, pour $h=0$ on aura :

$$G = A_{m-2} + pA_{m-3} + p\psi_1 A_{m-4} + \left.\begin{matrix} p\psi_2 \\ +r \end{matrix}\right| A_{m-5} \ldots \begin{matrix} +p\psi_{m-3}, \\ +r\psi_{m-5}, \end{matrix}$$

$$G' = A_{m-1} + rA_{m-4} + r\psi_1 A_{m-5} \ldots\ldots\ldots + r\psi_{m-4},$$

$$G'' = A_m + rA_{m-3} + r\psi_1 A_{m-4} + r\psi_2 A_{m-5} \ldots\ldots + r\psi_{m-3}.$$

D'ailleurs, des valeurs

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = p,\ \varphi_2 = p^2 + q,\ \varphi_3 = p^3 + 2pq + r \ldots$$

on déduit :

$$\psi_0 = 1,\ \psi_1 = p,\ \psi_2 = p^2,\ \psi_3 = p^3 + r \ldots,$$

et de l'équation

$$\varphi_n = p\varphi_{n-1} + q\varphi_{n-2} + r\varphi_{n-3},$$

on déduit la loi de formation des fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ...,

$$\psi_n = p\psi_{n-1} + r\psi_{n-3};$$

d'où

$$\psi_n - p\psi_{n-1} = r\psi_{n-3}.$$

On peut remplacer le système des trois polynômes G, G′, G″ par un autre système plus simple par rapport à p et composé de l'un d'eux et de deux autres obtenus en combinant G, G′, G″ par voie d'addition ou de soustraction : ainsi on éliminera ψ_{m-3} et on trouvera :

$$K = Gr - G''p = rA_{m-2} + r^2A_{m-5} + \psi_1(r^2A_{m-6} - A_m) + r^2\psi_2A_{m-7} \ldots$$
$$\ldots + r^2\psi_{m-5};$$
$$K' = G'' - G'p = A_m + rA_{m-3} + r^2A_{m-6} + \psi_1(r^2A_{m-7} - A_{m-1}) +$$
$$+ r^2\psi_2A_{m-8} \ldots\ldots r^2\psi_{m-6};$$
$$G' = A_{m-1} + rA_{m-4} \ldots\ldots + r\psi_{m-4}.$$

On remplacera de même le système des trois polynômes K, K′ et G′ par un autre plus simple par rapport à p, on parviendra ainsi à éliminer cette inconnue, et on obtiendra deux polynômes Q et Q′ seulement fonctions de r, et qui, pour une valeur convenable de cette inconnue, auront pour facteur commun la valeur correspondante de q.

Supposons connues les valeurs de q et r, les deux dernières des équations (A) feront connaître B_{m-3}, B_{m-4} : entre les $m-2$ premières, j'élimine les $m-5$ quantités B_1, B_2.... B_{m-5}, et j'obtiens les trois équations suivantes fonctions de p et des quantités supposées connues q, r, B_{m-3} et B_{m-4} :

$$0 = -B_{m-4} + A_{m-4} + A_{m-5}\varphi_1 + A_{m-6}\varphi_2 \ldots\ldots + \varphi_{m-4},$$
$$0 = -B_{m-3} + A_{m-3} + A_{m-4}\varphi_1 + A_{m-5}\varphi_2 \ldots\ldots + \varphi_{m-3},$$
$$0 = B_{m-2},$$

qui devront avoir une solution entière commune; donc la valeur cherchée de p sera diviseur commun des trois termes indépendants de cette inconnue dans ces équations ; représentons-les par P, P′, P″.

Cela posé, pour trouver les diviseurs du troisième degré du polynôme $Fx = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_m$, on posera r égal successivement aux diviseurs de A_m affectés du double signe.

Soit r' une valeur de r, on la portera dans les polynômes Q et Q'; soient $\pm q'$, $\pm q''$ les facteurs communs aux valeurs de ces polynômes, on substituera r' et successivement les nombres $\pm q'$, $\pm q''$ et les valeurs correspondantes de B_{m-3} et B_{m-4} dans les trois polynômes P, P', P'', les nombres $\pm q'$, $\pm q''$ .... devront être rejetés si les trois polynômes n'ont pas de facteurs communs. Si la substitution des nombres r' et q' donne aux trois polynômes un diviseur commun p', pour que le système des valeurs p', q', r' convienne, il faut que, substituées dans les équations (A), elles satisfassent à ces équations en déterminant pour les coefficients B_1, B_2, etc.... des valeurs entières. Il est évident que cette condition est nécessaire et suffisante. Il sera bon, avant d'opérer cette substitution, de constater que les nombres p', q', r' satisfont aux deux conditions $\frac{F(1)}{1-p'-q'-r'} = n$, $\frac{F(-1)}{-1-p'+q'-r'} = n$, n représentant un nombre entier.

La même théorie pourrait servir à déterminer les diviseurs du quatrième degré.

Soit le diviseur $x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s$, en éliminant les $m-4$ coefficients B_1, B_2 .... B_{m-4} entre les m équations,

$$\text{B}\left\{\begin{aligned} &B_1 = A_1 + p, \\ &B_2 = A_2 + pB_1 + q, \\ &\vdots \\ &B_{m-4} = A_{m-4} + pB_{m-5} + qB_{m-6} + rB_{m-7} + sB_{m-8}, \\ 0 = {} &B_{m-3} = A_{m-3} + pB_{m-4} + qB_{m-5} + rB_{m-6} + sB_{m-7}, \\ 0 = {} &B_{m-2} = A_{m-2} + qB_{m-4} + rB_{m-6} + sB_{m-6}, \\ 0 = {} &B_{m-1} = A_{m-1} + rB_{m-4} + sB_{m-5}, \\ 0 = {} &B_m = A_m + sB_{m-4}, \end{aligned}\right.$$

on aura les quatre équations $B_{m-3}=0$, $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ fonctions seulement de p, q, r, s. Soient G, G′, G″, G‴ les termes indépendants de r dans ces équations, ces quatre polynômes, pour des valeurs convenables p', q', s' de p, q, s, deviendront des nombres ayant pour diviseur commun la valeur r' correspondante de r ; et si, entre les quatre équations $G=M(r)$, $G'=M(r)$, $G''=M(r)$, $G'''=M(r)$, on élimine p et q, on obtiendra deux polynômes R et R′ seulement fonctions de s, et qui, par la substitution de la valeur convenable s', auront pour diviseur commun r'.

Les deux dernières des équations (B) feront connaître B_{m-4} et B_{m-5} ; et si entre les $m-2$ premières, on élimine les $m-6$ coefficients B_1, B_2, B_3, ... B_{m-6}, on aura quatre équations fonctions de p, q et des quantités connues r', s', B_{m-4}, B_{m-5}, les quatre termes indépendants de q devront pour la valeur p' de p être multiples de la valeur cherchée q' ; donc, en éliminant p on obtiendra trois polynômes Q, Q′, Q″, qui, pour les valeurs de r' et s', auront pour diviseur commun q'. En prenant les quatre termes indépendants de p renfermés dans ces équations, et éliminant q, on trouvera de même trois polynômes P, P′, P″ seulement fonctions de r et s, et qui, pour les valeurs r' et s', auront pour diviseur commun p. Il faudra ensuite vérifier comme précédemment si les valeurs s', r', q', p' satisfont aux équations (B).

Application de la méthode précédente.

Soit d'abord une équation du sixième degré à décomposer en facteurs du troisième :

$$x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A^5x + A^6 = 0.$$

On aura :

$$A\left\{\begin{array}{l} B_1 = A_1 + p \\ B_2 = A_2 + pB_1 + q \\ B_3 = A_3 + pB_2 + qB_1 + r \\ 0 = B_4 = A_4 + pB_3 + qB_2 + rB_1 \\ 0 = B_5 = A_5 + qB_3 + rB_2 \\ 0 = B_6 = A_6 + rB_3 \end{array}\right.$$

en éliminant

$$B_1\ B_2,\ B_3,$$

on trouve :

$$0 = B_4 = A_4 + pA_3 + \begin{array}{l|l|l} p\varphi_1 & A_2 + p\varphi_2 & A_1 + p\varphi_3 \\ +q & \quad +q\varphi_1 & \quad +q\varphi_2 \\ & \quad +r & \quad +r\varphi_1 \end{array}$$

$$0 = B_5 = A_5 + qA_3 + \begin{array}{l|l|l} q\varphi_1 & A_2 + q\varphi_2 & A_1 + q\varphi_3 \\ +r & \quad +r\varphi_1 & \quad +r\varphi_2 \end{array}$$

$$0 = B_6 = A_6 + rA_3 + r\varphi_1 A_2 + r\varphi_2 A_1 + r\varphi_3\ ;$$

les termes indépendants de q sont dans ces équations :

$$G = A_4 + pA_3 + p\psi_1 A_2 + \begin{array}{l|l} p\psi_2 & A_1 + p\psi_3 \\ +r & \quad +r\psi_1 \end{array}$$

$$G' = A_5 + rA_2 + r\psi_1 A_1 + r\psi_2$$

$$G'' = A_6 + rA_3 + r\psi_1 A_2 + r\psi_2 A_1 + r\psi_3\ ,$$

que l'on remplace par le système :

$$K = Gr - G''p = rA_4 + r^2 A_1 + \psi_1 (r^2 - A_6)$$

$$K' = G'' - G'p = A_6 + rA_3 + r^2 - A_5 \psi_1$$

$$G' = A_5 + rA_2 + r\psi_1 A_1 + r\psi_2\ ;$$

ou bien en posant

$\alpha = A_6 + rA_3 + r^2,\qquad \alpha' = rA_4 + r^2 A_1,\qquad \alpha'' = A_5 + rA_2,$

on a :

$$K = \alpha' + \psi_1 (r^2 - A_6)$$

$$K' = \alpha - A_5 \psi_1$$

$$G' = \alpha'' + r\psi_1 A_1 + r\psi_2\ ;$$

d'où l'on déduira :

$$Q = \alpha (r^2 - A_6) + \alpha' A_5$$

$$Q' = \alpha'' A_5^2 + \alpha r (A_1 A_5 + \alpha).$$

Si entre les quatre premières des équations (A) on élimine B_1, on trouve les trois équations :

$$0 = -B_2 + A_2 + q + A_1 p + p'$$
$$0 = -B_3 + A_3 + qA_1 + r + p(B_2 + q)$$
$$0 = A_4 + qB_2 + rA_1 + p(B_3 + r),$$

dont les deux dernières sont du premier degré.

Ainsi :

$$P = -B_2 + A_2 + q$$
$$P' = -B_3 + A_3 + qA_1 + r$$
$$P'' = A_4 + qB_2 + rA_1.$$

On remarquera que dans ce cas particulier non-seulement P, P', P'' doivent avoir un diviseur commun, mais encore les quotients $\frac{P'}{B_2 + q}$, $\frac{P''}{B_3 + r}$, exprimant la valeur de p pris en signe contraire, doivent être entiers et égaux entre eux.

Soit l'exemple numérique

$$Fx = x^6 - x^5 - 22x^4 + 46x^3 - 42x^2 + 11x + 14 = 0,$$

équation dont le premier membre n'admet de diviseurs rationnels ni du premier ni du second degré, proposons-nous de déterminer ses diviseurs du troisième degré.

Si le premier membre admet un diviseur du troisième degré, il sera le produit de deux facteurs de ce même degré ; il suffira d'essayer pour r les diviseurs du dernier terme 14 jusqu'à la racine carrée de ce nombre, en les prenant avec le double signe : ainsi, on devra poser :

$$r = \pm 1, \qquad r = \pm 2,$$

soit $r = 1$,

on trouve :

$$B_2 = -14.$$

$\alpha = 61$, $\alpha' = -43$ $\alpha'' = -11$, $Q = -1266$, $Q' = +1719$,

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3.

Essayons donc les systèmes $r=1 \begin{cases} q=\pm 1 \\ q=\pm 3. \end{cases}$

1° $$r=1, \quad q=1.$$

De l'équation $0=A_5+qB_3+rB_2$ on tire $B_2=3$, substituant pour p, q, r, B_3, B_2, leurs valeurs dans l'équation $\frac{P''}{B_3+r}=$ $=\frac{A_4+qB_2+rA_1}{B_3+r}$, on trouve un nombre fractionnaire, donc, ce système doit être rejeté.

2° $$r=1, \quad q=-1.$$

On trouve :

$$B_2=-25,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

3° $$r=1, \quad q=3.$$

On a :

$$B_3=-14, \quad B_2=-31,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

4° $$r=1, \quad q=-3.$$

On trouve :

$$B_3=-14, \quad B_2=-53,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

Ainsi, on doit rejeter ces différents systèmes.

Soit $$r=-1,$$
on trouve :

$$B_3=14, \quad \alpha=-31, \quad \alpha'=41, \quad \alpha'=33,$$
$$Q=854, \quad Q'=2691,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1.

Or les valeurs ($r=-1$, $q=1$) donnent $B_3=14$, $B_2=25$, et les valeurs ($r=-1$, $q=-1$) donnent $B_3=14$, $B_2=-3$,

et ces deux systèmes doivent être également rejetés comme donnant pour $\frac{P''}{B_3+r}$ un nombre fractionnaire.

Soit $$r=2,$$

$$\alpha=110,\quad \alpha'=-88,\quad \alpha''=-33,$$
$$Q=-2068,\quad Q'=17787,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1,
pour le système $(r=2,\quad q=1)$
on trouve :

$$B_3=-7,\qquad B_2=-2,$$

pour le système $(r=2,\quad q=-1)$
on trouve :

$$B_3=-7,\qquad B_2=-9\ ;$$

ils donnent l'un et l'autre pour p, une valeur fractionnaire.

Soit $$r=-2,$$

$$\alpha=-74,\quad \alpha'=80,\quad \alpha''=55,$$
$$Q=1620=2^2.3^4.5,\qquad Q'=5925=3.5^2.79,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3, ± 5, ± 15;

pour $(r=-2,\quad q=1)$ on trouve : $B_3=7,\quad B_2=9,$
$(r=-2,\quad q=-1)$ $B_3=7,\quad B_2=2,$
$r=-2,\quad q=3$ $B_3=7,\quad B_2=16.$

Et pour ces systèmes $\frac{P''}{B_3+r}$ est fractionnaire, donc ils doivent être rejetés.

Le système $(r=-2,\quad q=-3)$
donne $B_3=7,\quad B_2=-5.$

$$\frac{P''}{B_3+r}=-5\ \frac{P'}{B_2+q}=-5,\quad P=-30\ ;$$ donc, p peut être égal à 5; on vérifiera que cette valeur est exacte en constatant que les deux premières des équations (A)

$$B_1=A_1+p,\quad B_2=A_2+pB_1+q$$

sont satisfaites.

On trouvera $B_1=4$.

Donc, le premier membre Fx de l'équation proposée est le produit des facteurs $(x^3-5x^2+3x+2)(x^3+4x^2-5x+7)$.

On voit que cette méthode s'applique facilement à l'équation du sixième degré, dont le nombre des diviseurs du troisième degré s'élève cependant à $\frac{6\times5\times4}{1.\ 2.\ 3}$ ou 20.

Soit maintenant une équation du huitième degré.

$$x^8+A_1x^7+A_2x^6+A_3x^5+A_4x^4+A_5x^3+A_6x^2+A_7x+A_8=0\,;$$

on a :

$$A\left\{\begin{aligned} B_1&=A_1+p\\ B_2&=A_2+pB_1+q\\ B_3&=A_3+pB_2+qB_1+r\\ B_4&=A_4+pB_3+qB_2+rB_1\\ B_5&=A_5+pB_4+qB_3+rB_2\\ 0=B_6&=A_6+pB_5+qB_4+rB_3\\ 0=B_7&=A_7+qB_5+rB_4\\ 0=B_8&=A_8+rB_5. \end{aligned}\right.$$

$$G=A_6+pA_5+p\psi_1A_4+\begin{array}{l|l|l|l} p\psi_2 & A_3+p\psi_3 & A_2+p\psi_4 & A_1+p\psi_5\\ +r & \ \ +r\psi_1 & \ \ +r\psi_2 & \ \ +r\psi_3 \end{array}$$

$$G'=A_7+rA_4+r\psi_1A_3+r\psi_2A_2+r\psi_3A_1+r\psi_4$$

$$G''=A_8+rA_5+r\psi_1A_4+r\psi_2A_3+r\psi_3A_2+r\psi_4A_1+r\psi_5,$$

que l'on remplace en éliminant ψ_5 par le système

$$K=Gr-pG''=rA_6+r^2A_3+\psi_1(A_2r_2-A_8)+r^2\psi_2A_1+r^3\psi_3.$$

$$K'=G''-pG'=A_8+rA_5+r^2A_2+\psi_1(r^2A_1-A_7)+r^2\psi_2.$$

$$G'=A_7+rA_4+r\psi_1A_3+r\psi_2A_2+r\psi_3A_1+r\psi_4.$$

Et celui-ci par le suivant :

$$L=K-K'p=rA_6+r^2A_3+r^3-\psi_1(rA_5+2A_8)+A_7\psi_2,$$

$$L'=G'r-Kp=rA_7+r^2A_4+r^3A_1+\psi_1(r^3-rA_6)+\psi_2A_6,$$

$$K'=A_8+rA_5+r^2A_2+\psi_1(r^2A_1-A_7)+r^2\psi_2\,;$$

ou bien, en posant :

$$A_6 + rA_5 + r^2A_2 = \alpha, \qquad r^2A_1 - A_7 = \beta,$$
$$rA_6 + r^2A_3 + r^3 = \alpha', \qquad rA_8 + 2A_8 = \beta',$$
$$rA_7 + r^2A_4 + r^3A_1 = \alpha'', \qquad r^3 - rA_6 = \beta'',$$

on a $K' = \alpha + \beta\psi_1 + r^2\psi_2$,

$$L = \alpha' - \beta'\psi_1 + A_7\psi_2,$$
$$L' = \alpha'' + \beta''\psi_1 + A_8\psi_2;$$

d'où l'on déduit :

$$M = K'A_7 - Lr^2 = \alpha A_7 - \alpha' r^2 + \psi_1(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$M' = LA_8 - L'A_7 = \alpha' A_8 - \alpha'' A_7 - \psi_1(\beta' A_8 + \beta'' A_7),$$
$$K' = \alpha + \beta\psi_1 + r^2\psi_2;$$

ensuite :

$$Q = (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + (\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$N = \alpha(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + \psi_1[\beta(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + r^2(\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)],$$
$$M = \alpha A_7 - \alpha' r^2 + \psi_1(\beta A_7 + \beta' r^2);$$

et enfin les deux polynômes :

$$Q = (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + (\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$Q' = r^2[(\beta' A_8 + \beta'' A_7)(\alpha\beta' + \beta\alpha') - (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)],$$

qui sont fonctions seulement de r.

Si entre les six premières des équations (A) on élimine les trois coefficients B_1, B_2, B_3, on aura les trois équations fonctions de p et des quantités q, r, B_4, B_5 :

$$0 = -B_4 + A_4 + A_3\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_1\varphi_3 + \varphi_4,$$
$$0 = -B_5 + A_5 + A_4\varphi_1 + A_3\varphi_2 + A_2\varphi_3 + A_1\varphi_4 + \varphi_5,$$
$$0 = B_6 = A_6 + pB_5 + qB_4 + r(A_3 + A_2\varphi_1 + A_1\varphi_2 + \varphi_3);$$

et si on remplace φ_1, φ_2, φ_3, etc. par leurs valeurs, on trouvera, pour les termes indépendants de p, les valeurs :

$$P = -B_4 + A_4 + A_2q + A_1r + q^2,$$
$$P' = -B_5 + A_5 + A_2r + A_3q + 2qr + A_1q^2,$$
$$P'' = A_6 + A_3r + r^2 + B_4q + A_1qr.$$

Exemple numérique.

Soit l'équation

$$x^8 - 6x^7 + 15x^6 - 22x^5 - 19x^2 + x + 15 = 0,$$

qui n'admet de diviseurs rationnels ni du premier ni du second degré, comme on peut s'en assurer par la méthode exposée dans un des numeros précédents (*voyez* p. 339).

On a :

$$A_1 = -6,\ A_2 = 15,\ A_3 = -22,\ A_4 = 0,\ A_5 = 0,\ A_6 = -19,$$
$$A_7 = 1,\ A_8 = 15.\quad F(1) = -15,\quad F(-1) = 39.$$

Les valeurs que l'on doit donner à r sont :

$$\pm 1,\quad \pm 3,\quad \pm 5,\quad \pm 15.$$

Les systèmes des valeurs de p et q qui correspondent à $r = \pm 1$ donnant tous des valeurs entières pour les coefficients B_5, B_4, etc., exigent pour être vérifiés qu'on les substitue dans toutes les équations (A); par conséquent il est plus simple dans la pratique de commencer par essayer les autres valeurs de r.

On fera donc $r = \pm 3,\quad \pm 5,\quad \pm 15,\quad \pm 1.$

Soit $r = 3.$

On trouve :

$$B_5 = -5,\quad \alpha = 150,\quad \alpha' = -228,\quad \alpha'' = -159,$$
$$\beta = -55,\quad \beta' = 30,\quad \beta'' = 84;$$
$$\text{et}\quad Q = 474753 \quad \text{et} \quad Q' = 9 \times 16280082,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3.

Si pour déterminer B_4 on remplace q par ces valeurs dans l'équation $0 = A_7 + qB_5 + rB_4$, on voit que q et r doivent être premiers entre eux, puisque $A_7 = 1$; donc $q = \pm 3$ doit être rejeté. De plus, la seule valeur $q = -1$ donne pour B_4 une valeur entière qui est -2. Remplaçant q, r, B_5 et B_4 par leurs valeurs dans les polynômes P, P', P'', on trouve $P = -30$, $P' = 60$, $P'' = -56$, dont les diviseurs

sont $p = \pm 1$, ± 2; donc il faut essayer si les valeurs $r = 3$, $q = -1$ et $p = \pm 1$, ± 2 satisfont aux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q-r} = N$, $\frac{F(-1)}{-1-p+q-r} = N$. Or le seul système $r = 3$, $q = -1$, $p = -2$ les vérifie. Substituons ces valeurs dans les équations (A), en remontant à partir de la sixième jusqu'à la première. On trouve pour B_3 une valeur fractionnaire; donc ce système doit aussi lui-même être rejeté.

Soit $$r = -3.$$
on aura :

$B_5 = 5$, $\alpha = 150$, $\alpha' = -168$, $\alpha'' = 159$, $\beta = -55$, $\beta' = 30$, $\beta'' = -84$, $Q = 3 \times 10769$, $Q' = 3^4 \times 2 \times 526741$,

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3. Or q et r doivent être premiers entre eux; donc on doit rejeter la valeur ± 3. D'ailleurs, à $q = -1$ correspond B_4 fractionnaire; donc la seule valeur à essayer est $q = 1$, qui donne $B_4 = 2$. Substituons les valeurs $r = -3$, $q = 1$, $B_5 = 5$, $B_4 = 2$ dans les polynômes P, P', P''. nous trouverons $P = 32$, $P' = -84$, $P'' = 76$; donc $p = \pm 1$, ± 2, ± 4. Les valeurs $p = 2$, $p = 4$ sont les seules qui vérifient les conditions $\frac{F(1)}{1-p-q-r} = n$, $\frac{F(-1)}{-1-p+q-r} = n$; mais étant substituées dans les équations de condition (A), la première donne pour B_3 et la seconde pour B_2 une valeur fractionnaire; donc elles doivent être l'une et l'autre rejetées.

Soit $$r = 5.$$
On trouve :

$B_5 = -3$, $\alpha = 390$, $\alpha' = -520$, $\alpha'' = -745$, $\beta = -151$, $\beta' = 30$, $\beta'' = 220$, $Q = 5 \times 3 \times 316357$, $Q' = 2 \times 3^2 \times 5^4 \times 114751$,

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3, ± 5. La seule valeur qui donne B_4 entier est $q = -3$; et si on porte les

valeurs $r=5$, $q=-3$, $B_5=-3$ et $B_4=-2$ dans les polynômes P, P′, P″, on obtient $P=-64$, $P'=60$, $P''=-8$, dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 2, ± 4 ; la seule valeur qui satisfasse aux conditions $\dfrac{F(1)}{1-p-q-r}=n$, $\dfrac{F(-1)}{-1-p+q-r}=n$ est $+4$. Donc il faut substituer les valeurs $r=5$, $q=-3$, $p=4$ dans les équations (A), à partir de la sixième en remontant jusqu'à la première ; on trouve qu'elles sont toutes satisfaites et donnent les valeurs entières $B_3=+5$, $B_2=+4$, $B_1=-2$. Donc le premier membre de l'équation donnée est divisible par le facteur x^3-4x^2+3x-5, et par conséquent est le produit des deux facteurs irréductibles

$$(x^3-4x^2+3x-5)(x^5-2x^4+4x^3+5x^2-2x-3).$$

SUR LE

DÉVELOPPEMENT D'UNE SPIRALE CONIQUE.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

Dans le 17ᵉ volume des Annales de Mathématiques de M. Gergonne (p. 166), on trouve la solution analytique de cette question :

« Suivant quelle courbe un fil parfaitement flexible et » inextensible doit-il être roulé sur la surface d'un cône » droit, pour qu'en développant ce fil, supposé se terminer » au sommet du cône, de manière à le maintenir constam- » ment tangent à la courbe, son extrémité ne sorte pas du

» plan conduit par ce sommet perpendiculairement à l'axe
» du cône? Et quelle courbe décrira alors cette extrémité sur
» le plan? »

Il me semble que ce problème peut être résolu très-simplement de la manière suivante.

Une courbe plane a toutes ses développées sur une surface cylindrique dont les arêtes sont perpendiculaires à son plan, et dans le développement de cette surface cylindrique toutes les développées suivantes produisent des lignes droites, ce qui indique que leurs tangentes sont toutes également inclinées sur le plan de la développante. La courbe qu'on veut déterminer sur le cône doit donc être partout également inclinée sur la base, et par suite sa tangente doit faire un angle constant avec la génératrice menée au point de contact, puisqu'elle est située avec cette génératrice dans un même plan tangent. De sorte que si on développe le cône sur un plan, le développement de la courbe cherchée aura partout ses tangentes également inclinées sur les rayons vecteurs menés du sommet du cône aux points de contact; propriété de la spirale logarithmique. La courbe qu'on se proposait de trouver est donc celle qu'on obtient en enroulant sur le cône un plan où est tracée une spirale logarithmique dont le sommet du cône est le point asymptote.

Si on projette toutes les génératrices du cône sur un plan parallèle à la base et passant par le sommet, on aura un système de rayons vecteurs issus de ce point, et les tangentes à la projection de la courbe cherchée seront également inclinées sur les rayons vecteurs des points de contact, et comme par hypothèse la courbe et conséquemment sa projection se terminent au sommet du cône, la projection sera aussi une spirale logarithmique.

La partie développée du fil est dans un rapport constant avec sa projection, rapport qui est aussi le même que celui

d'une portion quelconque de la courbe à sa projection ; de manière que l'extrémité libre du fil décrira dans son développement la développante de la spirale logarithmique suivant laquelle se projette la courbe tracée sur le cône. On sait d'ailleurs que la développante d'une spirale logarithmique est une autre spirale logarithmique ; de sorte que l'on pourra tracer la courbe demandée par un moyen mécanique, en faisant décrire à l'extrémité libre du fil, qu'on roulerait sur le cône, les contours d'une spirale logarithmique ayant pour point asymptote le sommet du cône, et située dans un plan perpendiculaire à son axe.

Ce mode de démonstration m'a été suggéré par une note qui suit de quelques pages la solution analytique.

ANNONCES.

—

Cours d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent aux Écoles spéciales, par Lenthéric (Neveu), licencié ès sciences, mathématiques et physiques, professeur de mathématiques à l'école du génie de Montpellier ; 2e édition entièrement refondue. Paris, 1841, in-8° de 263 pages (*).

A nous autres modernes, il nous paraît tout naturel de commencer l'arithmétique par la définition, la numération, et ensuite l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Cependant cette disposition n'est pas fort ancienne. Les auteurs arabes du 10e, du 11e et du 12e siècle commencent par la multiplication et la division, et donnent ensuite l'addition et la soustraction. La même marche a été suivie

(*) Chez Bachelier. Prix, 3 fr. 50 c.

dans nos traités d'*abaques* et d'*algorithme*, évidemment modelés sur les ouvrages arabes, comme nous le verrons dans le compte que nous rendrons du traité de Gerbert que M. Chasles a fait connaître, tant il est vrai qu'en toute chose la simplicité et la clarté viennent en dernier. Ces deux qualités se font remarquer dans le début de M. Lenthéric; la méthode étant celle qui est aujourd'hui généralement suivie ne donne lieu qu'à quelques observations de détail.

Multiplication. On lit, page 17 : les additions s'abrégent au moyen de la table suivante *attribuée à Pythagore.* C'est d'après un passage de Boëce, auteur du 4e siècle, qu'on a attribué cette table au philosophe de Samos; mais M. Chasles a solidement établi que ce passage a été mal interprété. Boëce parle de la table dite *abaque* et non de la table de multiplication. On ne devra donc plus mentionner Pythagore, à l'occasion de cette table; pourquoi faire subsister une erreur ?

Page 15, *ligne* 15, il faut remplacer 11 par 15; faute non marquée dans l'*errata.*

On consacre six pages (24 à 29) à démontrer la constance du produit, dans quelque ordre qu'on prenne les facteurs ; beaucoup trop long.

Division (page 30) ; on commence par des réflexions sur la nature de cette opération, qui seront difficilement comprises par les commençants : il faut bien se pénétrer qu'en arithmétique on opère *toujours* sur les nombres *abstraits*, *jamais* sur des nombres concrets. Toutes les règles ne se rapportent qu'à des nombres *non qualifiés* : lorsque des nombres doivent être *qualifiés*, c'est au bon sens de l'opérateur à trouver ces qualifications. L'existence de ce bon sens est antérieure à toute règle; c'est un fait qu'on oublie souvent, non-seulement en arithmétique, mais dans toute l'étendue des sciences exactes.

Pour *essayer* les chiffres du quotient, au lieu de multiplier ce chiffre par la division, comme d'ordinaire, l'auteur divise le dividende par ce chiffre et compare le résultat avec le diviseur : ce moyen d'essai très-simple est généralement pratiqué dans les colléges de Paris. On devrait remarquer aussi, que quand on sait que le diviseur est contenu exactement dans le dividende, il y a de l'avantage à faire la division de droite à gauche. Les premiers chiffres des dividendes et des diviseurs donnent immédiatement les chiffres du quotient.

Puissances (page 43). L'auteur s'écarte ici de la disposition ordinaire et donne les *puissances* immédiatement après la division, ce qui me paraît en effet très-convenable; mais comme on ne donne que les carrés et les cubes, les théorèmes sur les exposants en général ne sont peut-être pas ici à leur véritable place.

VII. *Divisibilité des nombres*. Cette partie importante, ainsi que les propositions y relatives, est traitée avec soin et doit précéder la théorie des fractions : la rédaction laisse malheureusement à désirer.

XIII. *Recherche du plus petit dividende commun* (p. 107). C'est ainsi que l'auteur désigne le plus petit multiple commun. Ici finit le calcul des nombres entiers, renfermant 13 articles, savoir : I. Addition. II. Soustraction. III. Multiplication. IV. Division. V. Puissances. VI. Extraction de racines. VII. Divisibilité des nombres. VIII. Preuves des opérations arithmétiques. IX. Recherche des nombres premiers : au moyen du crible d'Érathostène, on lit l'observation qu'on n'a besoin d'effacer qu'à partir du carré de chaque nombre premier ; à partir de 121 pour 11 et ainsi des autres. Cette observation abrége aussi les recherches des nombres premiers renfermés entre des limites données. X. Décomposition des nombres en facteurs premiers. XI. Recherche de tous les divi-

seurs d'un nombre. XII. Recherche des diviseurs communs des nombres. XIII. Recherche du plus petit dividende commun.

La seconde partie est intitulée : Calculs des nombres fractionnaires, et est divisée en cinq articles : I. Fractions ordinaires ; à l'occasion de la multiplication par une fraction ; l'auteur dit avec raison, qu'une telle opération ne peut se concevoir, puisque le multiplicateur ne peut être fractionnaire ; ensuite, il légitime cette locution. Cet article est terminé par les quotients et les racines avec approximation. II. Calcul des nombres complexes. Ce chapitre ne devrait plus être inséré dans le corps de l'ouvrage, et pourrait être placé à la fin sous forme d'exercice, avec le calcul relatif aux mesures étrangères. III. Fractions décimales. IV. Système métrique très-bien développé. V. Applications ; règle de trois de société, d'alliage, et questions diverses. Ici finit l'arithmétique proprement dite.

La théorie des proportions, progressions, et des logarithmes, et la théorie des systèmes de numération terminent l'ouvrage. Quand serons-nous débarrassés de l'échafaudage des proportions ? qui nous en délivrera ? Par cet exposé, on voit que la marche de l'auteur est très-logique, rigoureuse, et généralement d'une grande clarté ; c'est un traité complet, dans un volume assez resserré. Il est à regretter que l'auteur n'ait pas eu le temps de soigner suffisamment le style et la rédaction ; sous ces deux rapports, l'ouvrage, dans une prochaine édition, devra être soumis à une sévère révision : alors on fera disparaître des énoncés tels que ceux-ci : *si deux ou plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme l'aura ; si deux nombres ont un diviseur, leur différence l'aura ; numérer* au lieu de compter, est une locution vicieuse que l'Académie n'admet pas ; c'est surtout dans les ouvrages destinés à la jeunesse qu'il faut éviter les néologismes. La langue qui a suffi aux Lagrange, aux Laplace, pour enseigner

l'arithmétique à l'École normale nationale, peut encore nous suffire. Tm.

—

Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique; par Delisle, chevalier de la Légion d'honneur, examinateur d'admission à l'École navale, professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Saint-Louis; et Gerono, professeur de mathématiques. — Paris, Bachelier, 1845, in-8°. V. p. 179, 2 pl.

On en rendra compte.

—

Secunda Memoria sull' applicazione del calculo dei residui all' integrazione dell' equazioni lineari a derivati parziali; di Barnaba Tortolini, professore di calcolo sublime, etc. — Roma, 1843, in-8°. 130.

Il est à remarquer que le calcul des résidus, né en France, n'est cultivé que hors de France. M. Tortolini continue, dans ce second mémoire, à appliquer le calcul des résidus à certaines équations linéaires, homogènes et non homogènes à dérivées partielles, et qui se présentent fréquemment dans des questions de physique mathématique. Nous ne pourrions en parler sans sortir des bornes prescrites aux Annales; mais nous aurons pourtant une occasion de faire connaître à nos lecteurs les profondes recherches du célèbre professeur italien. Il a ramené la rectification de la lemniscate *générale* (*voir* p. 429) à des fonctions elliptiques de première et de troisième espèce, et en a donné la bissection, la trisection, etc. Il serait à désirer qu'on pût parvenir à de semblables résultats pour une aplanétique du quatrième degré (*voir* p. 426). Nous indiquerons encore ce beau théorème : L'aire de la surface formée par les projections du centre d'un ellipsoïde sur

ses plans tangents est équivalente à celle d'un ellipsoïde qui a pour axes principaux les trois quatrièmes proportionnelles aux axes principaux de l'ellipsoïde donné, en les prenant dans un ordre quelconque; et le volume de cette surface, chose singulière, n'est pas susceptible d'un énoncé simple.

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1845.

(V. tome III, p. 516.)

Compositions de Mathématiques.

23 août.

Composition d'analyse.

Exposer la théorie du plan osculateur.

Déterminer sur la surface d'un cône droit la courbe qui coupe la génératrice sous un angle constant et qui passe par deux points donnés sur cette surface; calculer la longueur d'un arc pris sur cette courbe; calculer la portion de surface conique comprise entre cet arc et les génératrices qui passent par ses extrémités; trouver le plan osculateur, le rayon et le centre de courbure pour un point quelconque pris sur cette courbe et le lieu des centres de courbure; chercher ce que devient la courbe si on développe la surface sur un plan.

25 août.

Composition de mécanique.

Un point matériel pesant est suspendu à un fil flexible inextensible et sans masse dont l'autre extrémité est fixe; ce pendule est mis en mouvement dans un plan vertical et le fil s'enroule sur une courbe fixe située dans ce plan et passant par le point de suspension où elle a pour tangente la verti-

cale, quelle doit être cette courbe fixe pour que la tension du fil soit constante pendant un certain temps, quelles seront les lois du mouvement et pourra-t-il être oscillatoire : on donne la longueur du fil et la vitesse du pendule au point le plus bas.

Note. Le problème de mécanique, proposé par J. Bernoulli, étant professeur de Groningue, a été résolu par le marquis de L'Hôpital. (Mém. de l'Acad. des Sc., 1700, p. 9.)

Tm.

RELATIONS

pour que trois points dans un plan soient sur une même droite.

—

I° *Chaque point est donné par des coordonnées.*

Soit $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;$

les coordonnées de trois points ; pour qu'ils soient sur une même droite, on doit avoir la relation connue

$$x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1 = 0. \qquad (1)$$

Observation. Cette équation exprime que l'aire du triangle ayant pour sommets les trois points, est nulle.

II. *Chaque point est donné par l'intersection de deux droites.*

Soit $d_ny + e_nx = f_n$

l'équation d'une droite ; faisant l'indice n successivement égal aux six premiers nombres, on a les équations d'autant de droites ; les coordonnées du point d'intersection de deux premières droites sont

$$x = \frac{[d_1f_2]}{[d_1e_2]}, \quad y = \frac{[f_1e_2]}{[d_1e_2]}$$

ou

$$[d_1e_2] = d_1e_2 - d_2e_1\ ;$$

et ainsi des autres expressions entre parenthèses : on exprime de même les coordonnées de l'intersection de la 3me et 4me ligne ; et celles de l'intersection de la 5me et 6me droite ; substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient facilement, les calculs étant effectués, la relation suivante ·

$$\left.\begin{array}{l} [d_1e_2]\left[-f_3f_5[d_4e_6]+f_3f_6[d_4e_5]+f_4f_5[d_3e_6]-f_4f_6[d_3e_5]\right] \\ +[d_3e_4]\left[-f_5f_1[d_6e_2]+f_5f_2[d_6e_1]+f_6f_1[d_5e_2]-f_6f_2[d_5e_1]\right] \\ +[d_5e_6]\left[-f_1f_3[d_2e_4]+f_1f_4[d_2e_3]+f_2f_3[d_1e_4]-f_2f_4[d_1e_3]\right] \end{array}\right\} = 0. \quad (2)$$

La loi de formation de la 1re ligne est évidente ; le signe est déterminé selon la règle de Cramer par le nombre des variations ; si ce nombre est pair le signe est positif, et il est négatif pour un nombre impair de variations. La seconde ligne se déduit de la première en augmentant tous les indices de 2, et changeant 7 en 1 et 8 en 2 ; et la troisième ligne se déduit de même de la seconde.

Corollaire. Lorsque les trois systèmes de lignes sont parallèles, alors on a :

$$d_1 = d_3 = d_5\,;\ d_2 = d_4 = d_6\,;\ e_1 = e_3 = e_5\,;\ e_2 = e_4 = e_6\,;$$

la relation se réduit à

$$f_3f_6 - f_4f_5 + f_5f_2 - f_6f_1 + f_1f_4 - f_2f_3 = 0. \qquad (3)$$

(*La suite prochainement.*)

THÉORÈMES

sur des tangentes à la parabole.

PAR M. ANNE,
Professeur.

—

Théorème I.

Si des différents points N (*Fig.* 49) d'une tangente CM à une parabole, on mène deux droites, l'une NF au foyer, l'autre NB tangente, l'angle FNB de ces deux droites est constant et égal à l'angle FMC de la tangente primitive et du rayon vecteur mené à son point de contact.

En effet, la tangente AY au sommet de la parabole est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes; donc le quadrilatère FBCN est inscriptible dans un cercle de diamètre FN; donc l'angle FCB = FNB comme sous-tendant le même arc.

De plus, on sait que FC est bissectrice de l'angle MFA; par conséquent l'angle FCB, complément de CFA, l'est aussi de MFC et par conséquent est égal à FMC.

Donc FMC = FNB. C. Q. F. D.

Théorème II.

Si des différents points K (*Fig.* 50) d'une corde de contact de deux tangentes AC, AB à une parabole, on mène deux parallèles KD, KE aux deux tangentes, il en résulte un parallélogramme dont la seconde diagonale DE est tangente à la parabole.

Pour le démontrer, si KD est parallèle à AB et DE tangente à la parabole, il suffit d'établir que AE = DK.

Soit F le foyer de la parabole et joignons-le aux différents points notés sur la figure.

D'abord, il résulte évidemment du théorème précédent, que si une tangente roule entre deux autres, elle est constamment vue du foyer sous le même angle. (Théorème qui est encore vrai pour l'ellipse et pour l'hyperbole.) *Voir* t. II, p. 535, théor. XII, et t. III, p. 439.

Donc, les angles AFC, EFD, BFA sont égaux, et par suite, DFC = AFE ; mais par le premier théorème, FCD = FAE. Ainsi les deux triangles DFC, AEF sont semblables et donnent :

$$CD : AE :: CF : FA ;$$

les triangles ACF, ABF pour les mêmes raisons sont semblables et donnent :

$$CF : FB :: CA : AB ;$$

d'où $$CD : AF :: CA : AB.$$

Mais le parallélisme de DK, AB donne :

$$CD : DK :: CA : AB.$$

Donc DK = AE. Ce qu'il fallait démontrer.

Scholie. Si l'on voulait trouver l'équation de la parabole inscrite dans l'angle YAX et tangente aux points CB ;

Prenant AY pour axe des y et AX pour axe des x, et posant $AC = b$, $AB = a$, l'équation générale de la courbe

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

donnerait pour établir ces conditions :

$$x = 0 ;\ y^2 + \frac{D}{A} y + \frac{F}{A} = 0 = (y - b)^2,$$

$$y = 0 ;\ x^2 + \frac{E}{C} x + \frac{F}{C} = 0 = (x - a)^2,$$

$$B^2 = 4AC\ ; \quad \frac{D}{A} = -2b\ ; \quad \frac{E}{C} = -2a\ ; \quad \frac{F}{A} = b^2\ ; \quad \frac{F}{C} = a^2\ ;$$

éliminant, on trouve :

$$\frac{D}{A} = -2b\ ; \quad \frac{E}{A} = -\frac{2b^2}{a}\ ; \quad \frac{F}{A} = b^2\ ; \quad \frac{C}{A} = \frac{b^2}{a^2}\ ; \quad \frac{B}{A} = \pm 2\frac{b}{a}.$$

On a donc pour équation du problème :

$$a^2y^2 \pm 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$$

Le signe supérieur donne le carré parfait :

$$(ay + bx - ab)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1\right)^2 = 0,$$

équation de la corde de contact CB.

Le signe inférieur donne la parabole demandée :

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$$

Note. On parvient directement à ce résultat au moyen de nos relations d'identité.

L'on a, dans le cas actuel, $l = l' = m = 0$; remplaçant les six coefficients de l'équation générale par leurs valeurs tirées des identités (t. I, p. 490), on obtient de suite :

$$k^2y^2 \pm 2kk'xy + k'^2x^2 + 2kny + 2k'nx + n^2 = 0.$$

Faisant $x = 0$, on tire $y = \frac{-n}{k} = b$; et de même $\frac{-n}{k'} = a$; remplaçant dans cette équation k et k' par $\frac{-n}{b}$, $\frac{-n}{a}$, on obtient l'équation de M. Anne ; en général, dans toute question concernant la parabole, l'on a $B^2 = 4AC = 0$; B doit avoir un double signe.

Lorsqu'au lieu d'une parabole, il s'agit, avec les mêmes données, d'une autre conique, l'équation correspondante est :

$$a^2y^2 \pm xy\sqrt{4a^2b^2 \pm m} + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0 ;$$

or on a $$B^2 - 4a^2b^2 = m\,;$$

d'où $$B = \pm\sqrt{4a^2b^2 + m}.$$

Lorsqu'on connaît m, deux coniques de même espèce répondent à la question, et lorsque $m = 0$, une des paraboles se réduit à une droite. Tm.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

dont les racines ne sont que des fonctions algébriques de radicaux du second degré.

PAR M. CHEVILLARD,
professeur à Sorrèze.

—

Si les racines d'une équation algébrique ne sont formées que de radicaux du second degré, comme chacun de ceux-ci peut être tiré d'une équation du second degré à coefficients rationnels, l'équation proposée dont le degré sera nécessairement 2^m, pourra toujours être regardée comme provenant de l'élimination de $m-1$ inconnues entre m équations à coefficients rationnels du deuxième degré à deux inconnues, savoir :

$$t^2 + at + b = 0$$
$$u^2 + u(ct + d) + et^2 + ft + g = 0$$
$$v^2 + v(hu + i) + ju^2 + ku + l = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^2 + x(ny + p) + qy^2 + ry + s = 0,$$

et par conséquent ses racines seront de la forme

$$x = A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C \pm \sqrt{D}} \pm \sqrt{E \pm \sqrt{F} \pm \sqrt{G \pm \sqrt{H}}} \pm$$
$$\pm \sqrt{I \pm \sqrt{J} \pm \sqrt{K \pm \sqrt{L}} \pm \sqrt{M \pm \sqrt{N} \pm \sqrt{O \pm \sqrt{P} \pm \ldots}}}$$

Chaque nouveau radical portant sur une forme identique à tout ce qui le précède et A, B, C, etc., étant des quantités rationnelles. On trouve encore cette forme générale de la racine x, si l'on observe qu'une fonction algébrique de radicaux du deuxième degré, se ramène toujours définitivement à ne présenter ces radicaux que sous les formes d'addition, de soustraction, de superposition, les dénominateurs irrationnels pouvant être rendus commensurables. On peut même présenter sous la forme ci-dessus les racines de toute équation de degré 2^m, sauf à calculer par approximation les valeurs de A, B, C, etc., qui seront irrationnelles ; mais si la proposée n'a pour racines que des radicaux du second degré, on en sera averti en ce que ces valeurs seront toutes rationnelles. Soit, pour fixer les idées, proposée une équation quelconque du quatrième degré,

$$(1) \qquad x^4 + 4ax^3 + 2bx^2 + 4cx + d = 0,$$

dont les quatre racines peuvent s'écrire

$$x = A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C \pm \sqrt{D}}},$$

ou plutôt si l'on considère les deux équations dont on peut supposer que (1) est l'équation finale,

$$(2) \qquad x = m \pm l\sqrt{p} \pm \sqrt{n \pm \sqrt{p}}$$

où il n'entre en réalité que deux doubles signes, l'un de $\sqrt{p}$, l'autre de $\sqrt{n \ldots}$ Par une première élévation au carré, on trouve

$$x^2 - 2mx + m^2 + l^2p - n = \pm \sqrt{p}(1 - 2lm + 2lx),$$

et, par une deuxième élévation au carré, après réductions,

$$(3)\quad \begin{cases} x^4 - 4mx^3 + (3m^2 - l^2p - n)2x^2 + (l^2mp + mn - m^3 - lp)4x + \\ \qquad + (m^2 + l^2p - n)^2 - p\,(1 - 2lm)^2 = 0. \end{cases}$$

Telle est la forme sous laquelle peut être mise une équation du quatrième degré, les quatre constantes a, b, c, d, se trouvant remplacées par les quatre constantes l, m, n, p. Pour calculer ces dernières, on trouve en identifiant (1), et (3),

$$(4)\quad \begin{cases} a = -m \\ b = 3m^2 - l^2p - n \\ c = l^2mp + mn - m^3 - lp \\ d = (m^2 + l^2p - n)^2 - p\,(1 - 2lm)^2\,; \end{cases}$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} l^2p + n &= 3a^2 - b \\ lp &= ab - 2a^3 - c \\ d &= (4a^2 - b - 2n)^2 - p\,(1 + 2al)^2\,; \end{aligned}$$

d'où l'on tire enfin

$$m = -a,\ p = \frac{ab - 2a^3 - c}{l},\ n = 3a^2 - b + l(c + 2a^3 - ab) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &4l^3(c + 2a^3 - ab)^2 + 4l^2(c + 2a^3 - ab)(3a^2 - b) + \\ &+ l\,(12a^4 - 8a^2b + b^2 + 4ac - d) + c + 2a^3 - ab = 0\,; \end{aligned}$$

équations qui montrent que la composition en radicaux du deuxième degré, des racines d'une équation du quatrième degré, réussira si l'on trouve une valeur commensurable de l. L'équation en l rappelle aussi que la résolution d'une équation du quatrième degré tient seulement à la résolution du troisième degré, car tous nos calculs sont généraux. Observons encore que l'équation en l ayant été obtenue sans solutions étrangères, les trois valeurs de l qu'elle fournit,

doivent jouir de la propriété de donner par les substitutions dans (2), trois systèmes de valeurs identiques de x. Examinons maintenant quelques cas particuliers de la forme générale (2) :

1° $m=0$; $a=0$, $x=\pm l\sqrt{p}\pm\sqrt{n\pm\sqrt{p}}$, x^4+2bx^2+
$+4cx+d=0$, $4c^2l^3-4bcl^2+l(b^2-d)+c=0$,

$$p=-\frac{c}{l},\ n=-b+cl.$$

2° $$l=0;\ c+2a^3-ab=0,$$

relation nécessaire et suffisante pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait ses racines de la forme

$$x=m\pm\sqrt{n\pm\sqrt{p}}$$

connues par

$$m=-a,\ n=3a^2-b,\ p=\frac{0}{0}=(b-2a^2)^2-d.$$

3° $n=0$; $m=-a$, $l=\dfrac{3a^2-b}{ab-2a^3-c}$, $p=\dfrac{(ab-2a^3-c)^2}{3a^2-b}$;

remplaçant dans la dernière équation (4), on trouve

$$d(3a^2-b)=(4a^2-b)^2(3a^2-b)-(4a^3-ab-c)^2,$$

relation nécessaire et suffisante pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait pour racines

$$x=m\pm l\sqrt{p}\pm\sqrt{\pm\sqrt{p}}.$$

4° $p=0$; $m=-a$, $n=3a^2-b$, $l=0$, $c+2a^3-ab=0$,
$d=(b-2a^2)^2$,

deux relations pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait deux racines égales

$$x = m \pm \sqrt{n}.$$

Enfin une dizaine de cas sans intérêt, parmi lesquels je citerai seulement :

5° $m = 0,\ l = 0,\ a = 0,\ c = 0,$

seules conditions pour que

$$x^4 + 2bx^2 + d = 0$$

ait ses quatre racines.

$$x = \pm\sqrt{n \pm \sqrt{p}},\ n = -b,\ p = \frac{0}{0} = b^2d.$$

C'est le seul cas des traités officiels d'algèbre.

6° $m = 0,\ n = 0\ ;\ a = 0,$

d'où

$$bd = b^3 + c^2,$$

relation pour que

$$x^4 + 2bx^2 + 4cx + d = 0$$

ait la racine

$$x = \pm l\sqrt{p} \pm \sqrt{\pm\sqrt{p}};\ l = \frac{b}{c},\ p = -\frac{c^2}{b}.$$

7° $l = 0,\ n = 0;\ 3a^2 - b = 0,\ c + 2a^3 - ab = 0,\ x^4 + 4ax^3 + 2bx^2 + 4cx + d = 0,\ x = -m \pm \sqrt{\pm\sqrt{p}},\ m = -a,\ p = (b - 2a^2)^2 - d = a^4 - d.$

Application numérique.

Calculer s'il est possible les racines de

$$x^4 - 2x^3 - 16x + 1 = 0.$$

La forme de cette équation nous reporte au cas 1°. Cherchons donc si l'équation en l qui devient ici $64l^3 - 16l^2 - 4 = 0$, ou $16l^3 - 4l^2 - 1 = 0$, admet une racine commensurable.

Rendant les racines quatre fois plus grandes en posant

$l=\frac{l_1}{4}$, on a la transformée $l_1^3-l_1^2-4=0$.

$l_1^3-l_1^2+0.l-4$
$2\dots-1-1-2$

Cherchant les racines commensurables de cette équation par la méthode de division abrégée (*), on trouve la racine entière 2, et en même temps $l_1^2+l_1+2=0$ pour l'équation débarrassée de cette racine. On a donc aussi

$l^2_1+l_1+2=0$

$$(1^\circ)\ l=\frac{l_1}{4}=\frac{1}{2},\ p=-\frac{c}{l}=8,\ n=-b+cl=-1,$$

et par conséquent enfin

$$x=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-1\pm2\sqrt{2}},$$

racines qui satisfont à la proposée, comme on peut le vérifier.

(*) Procédé que j'ai cité page 350 du 2me volume de ce journal, que M. Thibault a développé page 523 du même volume, et qui avait été présenté dans le cours de mathématiques pures de M. Francœur dès la première édition. On trouve aussi dans ce dernier ouvrage un moyen très-commode de calculer les valeurs numériques que prennent les dérivées d'un polynome pour une valeur de x, ce qui est fort utile pour le calcul des transformées d'une proposée $X_x=0$. En y posant $x=y+h$, on a

$$(1)\qquad X_{y+h}=X_h+X'_hy+\frac{X''_h}{2}y^2+\frac{X'''_h}{2.3}y^3+\frac{X''''_h}{2.3.4.}y^4+\dots+\frac{X^m_h}{2.3\dots m}y^m$$

et réciproquement en posant dans cette transformée $y=x-h$, on a l'identité

$$X_x=X_h+X'_h(x-h)+\frac{X''_h}{2}(x-h)^2+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)^3+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^4+\dots$$
$$+\frac{X^m_h}{2.3\dots m}(x-h)^m;$$

maintenant si l'on divise X_x par $x-h$, ce qui donne Q, Q par $x-h$, d'où Q'. Q' par $x-h$, d'où Q'', etc, on aura

$$Q=X'_h+\frac{X''_h}{2}(x-h)+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)^2+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^3\dots+\frac{X^m_h}{2.3..m}(x-h)^{m-1}$$
reste $=X_h$;

$$Q'=\frac{X''_h}{2}+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^2+\dots+\frac{X^m_h}{2.3..m}(x-h)^{m-2}$$
reste $=X'_h$;

$$Q''=\frac{X'''_h}{2.3}+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)+\dots+\frac{X^m_h}{2.3\dots m}(x-h)^{m-3}$$

Les deux autres valeurs de l_1 tirées de

$$l_1^2 + l_1 + 2 = 0$$

sont

$$l_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-7},$$

et partant

$$l = -\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{-7},$$

donc,

$$l' = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{8}, p' = -4\,(1 + \sqrt{-7}), n' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7};$$

$$l'' = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{8}, p'' = -4\,(1 - \sqrt{-7}), n'' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7};$$

---

reste $\frac{-X''_h}{2}$;

. . . .

$Q^{m-1} - \frac{X^m_h}{2.3..m}$

reste $= \frac{X_h^{m-1}}{2.3...(m-1)}$.

En employant donc pour trouver ces quotients et leurs restes, la méthode abrégée de division par $x - a$, on aura très-simplement calculé les coefficients de la transformée (1).

Soit proposé par exemple, de calculer la transformée en $y = x - 3$ de $X_x = 2x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 4x + 129 = 0$:

$2x^4$	$-7x^3$	$-12x^2$	$+4x$	$+129$
2	−1	−15	−41	6
2	5	0	−41	
2	11	33		
2	17			
2				

2	−7	−12
2	−1	−15
2	5	0
2	11	$33 = \frac{X''_h}{2}$

Chaque ligne horizontale présente le quotient de la ligne (du polynôme) supérieure par $x - 3$, et le dernier terme de chacune est successivement X_h, X'_h, $\frac{X''_h}{2}$, $\frac{X'''_h}{2.3}$, etc. de sorte que la transformée est

$$2y^4 + 17y^3 + 33y^2 - 41y + 6 = 0.$$

Si l'on n'avait besoin que de la valeur d'une dérivée, par exemple de $\frac{X''_h}{2}$, il n'y aurait besoin que de calculer les trois premiers termes de chaque quotient. Enfin, s'il y avait nécessité comme dans la recherche des racines incommensurables, à calculer les transformées X_{y+1}, X_{y+2}, X_{y+3},.... On voit que le procédé actuel fournira successivement les coefficients par de simples additions et soustractions.

et enfin

$$x' = \pm \frac{-1+\sqrt{-7}}{8}\sqrt{-4(1+\sqrt{-7})} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7} \pm\sqrt{-4(1+\sqrt{-7})}}$$

$$x'' = \pm \frac{-1-\sqrt{-7}}{8}\sqrt{-4(1-\sqrt{-7})} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7} \pm\sqrt{-4(1-\sqrt{-7})}}.$$

Ces valeurs satisfont nécessairement à la proposée d'après ce que j'ai dit plus haut sur la nature de l'équation en l. On le vérifie d'ailleurs en les substituant dans les équations (4), ce qui est d'un calcul plus simple que la substitution dans la proposée. On retrouve bien $a=0$, $b=-1$, $c=-4$, $d=1$.

Ces deux nouveaux systèmes de valeurs de x sont du reste identiques avec le système

$$x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-1\pm 2\sqrt{2}}.$$

Comme le font retrouver des transformations de radicaux, d'après ce qui avait été prévu.

NOTE

sur les cas singuliers d'insolubilité ou d'indétermination dans les équations du premier degré à plusieurs inconnues.

PAR M. ARMAND FARCY,
Ancien élève de l'École polytechnique.

—

Tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues étant ramené à la forme simple

$$ax + by = k, \qquad a'x + b'y = k';$$

si $ab'-ba'=0$ et $ak'-ka'=0$, ce qui entraîne $kb'-bk'=0$, les deux équations sont incompatibles, c'est-à-dire, que rien de ce qui résout l'une ne peut résoudre l'autre ; si $ab'-ba'=0$ et $ak'-ka'=0$, ce qui entraîne $kb'-bk'=0$, les deux équations rentrent l'une dans l'autre, c'est-à-dire, que tout ce qui résout l'une résout l'autre.

L'*insolubilité* se manifeste par la forme $\frac{k}{0}$, et l'*indétermination* par la forme $\frac{0}{0}$ que prennent ensemble les deux inconnues, et l'on rend parfaitement compte de l'une et de l'autre en montrant que dans un cas les premiers membres sont, indépendamment de toutes valeurs attribuées à x et à y, dans un rapport déterminé, et les seconds membres (numériques) dans un autre rapport ; et que dans l'autre cas, les premiers membres sont, indépendamment de toutes valeurs attribuées à x et y, dans un rapport déterminé, et les seconds membres (numériques) dans le même rapport.

Rien n'est donc plus facile que de signaler nettement, dans les exemples numériques qui offrent quelqu'un de ces cas singuliers, les causes d'*insolubilité* ou d'*indétermination*, lorsque le nombre des équations n'est pas supérieur à deux.

Mais dès qu'il y a plus de deux équations, cette facilité disparaît, la multiplicité des équations pouvant donner lieu à bien des causes diverses soit d'insolubilité, soit d'indétermination. Le but de cette note est d'indiquer un moyen de découvrir ces causes cachées, quel que soit le nombre commun des équations et des inconnues.

Soit par exemple le système en apparence déterminé :

$3x-2y+z-3u=10$	qui donne en éliminant z :	
$4x+y-z+u=15$	$7x-y-2u=25$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=21$	$2x+3y+3u=9$	$23x-3u=84$
$3x+6y-2z+7u=14$	$5x-4y-5u=16$	$23x-3u=84$

Ces deux dernières équations rentrant l'une dans l'autre, admettent une infinité de solutions, et il en est par conséquent de même du système proposé. Soit encore le système en apparence déterminé :

$3x-2y+z-3u=10$	qui donne en éliminant u :	
$4x+y-\bar{z}+u=15$	$15x-\bar{y}-7z=53$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=21$	$10x\quad-3z=36$	$30x-9z=118$
$3x+6y-2z+7u=24$	$45x-y-16z=171$	$10x-3z=36$

Ces deux dernières équations étant contradictoires, leur système est insoluble, et il en est par conséquent de même du système proposé. Pour découvrir le vice caché de chacun de ces systèmes, qui ne diffèrent d'ailleurs que par un des seconds membres, remplaçons les seconds membres par des lettres, et traitons le système suivant :

$3x-2y+z-3u=A$	qui donne en éliminant u :	
$4x+y-z+\bar{u}=B$	$15x+\bar{y}-2z=A+3B$	puis en éliminant y :
$6x-y-2z-u=C$	$10x\quad-3z=B+C$	$10x-3z=A+4B-D$
$3x+6y-2z+7u=D$	$25x+y-5z=7B-D$	$10x-3z=B+C$

Le système proposé, en apparence déterminé, est donc en réalité :

insoluble, si $B+C >$ ou $< -A+4B-D$, c.-à-d. si $D >$ ou $< 3B-A-C$,
indéterminé, si $B+C=-A+4B-D$, c.-à-d. si $D=3B-A-C$,

c'est-à-dire suivant que le second membre de la quatrième équation est ou n'est pas différent du triple du second membre de la seconde, diminué des seconds membres de la première et de la troisième. Cette relation forcée entre les seconds membres existe donc entre les premiers membres, quels que soient x, y, z, u, et l'on vérifie en effet que le premier membre de la quatrième équation est égal au triple du premier membre de la seconde, duquel on aurait retranché les premiers membres de la première et de la troisième équation. On reconnait ainsi à quoi tenait l'*insolubilité* et

l'*indétermination* des systèmes proposés, et l'on aperçoit en même temps le moyen de former à volonté de tels systèmes *insolubles* ou *indéterminés*, quoique en apparence déterminés.

Généralement : Lorsqu'un système, en apparence déterminé, conduit par l'élimination à une équation insoluble et indéterminée, ce système est lui-même insoluble ou indéterminé ; cela tient alors à ce qu'il existe entre les premiers membres des relations qui, n'existant pas entre les seconds, rendent les équations incompatibles ; ou qui, existant aussi entre les seconds membres, font rentrer certaines des équations dans les autres. Pour découvrir cette relation, cause d'insolubilité ou d'indétermination, on peut remplacer les seconds membres par des lettres, et éliminer les inconnues ; on arrive ainsi à certaines relations entre les seconds membres, relations qui sont celles existant entre les premiers membres.

SUR UN NOUVEAU PRINCIPE DE MÉCANIQUE, *fondamental et général.*

D'après M. Gauss. (Crelle, tome IV, p. 232. 1829.)

---

m_1, m_2, m_3.... est un système de points matériels soumis à des *forces* et à des *liaisons* quelconques. Soient a_1, a_2, a_3.... les positions respectives de ces points au bout du temps t ; et c_1, c_2, c_3.... les positions de ces mêmes points au bout du temps $t+dt$; et si les liaisons n'eussent pas existé, si le système était entièrement libre, supposons que les points fussent parvenus respectivement dans l'instant dt, en b_1, b_2, b_3...., de sorte que c_1b_1, c_2b_2, etc. mesurent les déviations instantanées respectives.

On peut considérer le point m_1 comme soumis au bout du temps t à deux forces ; l'une se combinant avec la vitesse et la direction qui animent le point m_1, le mène dans l'instant dt en c_1 ; et l'autre, telle que si elle était appliquée au point m_1 en repos en c_1, elle le transporterait en b_1 dans l'instant dt ; de même pour les points m_2, m_3 .... Et d'après le principe de d'Alembert, ce second système de forces doit être en équilibre.

Appliquons à ce système le principe des vitesses virtuelles. Soient $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$, $c_3\gamma_3$, etc. des directions différentes de c_1b_1, c_2b_2, c_3b_3, etc., mais compatibles avec les liaisons du système ; et soient θ_1, θ_2, θ_3 les angles que forment $\gamma_1c_1b_1$, $\gamma_2c_2b_2$ ...., etc. ; alors, d'après le principe des vitesses virtuelles $\Sigma mcb.c\gamma\cos\theta$ doit être ou zéro, ou négatif et jamais positif ; cb, $c\gamma$, θ représentent l'une quelconque de ces directions.

Or on a :

$$\overline{\gamma b}^2 - \overline{cb}^2 = \overline{c\gamma}^2 - 2cb\,.\,c\gamma\cos\theta\,;$$

donc

$$\Sigma m\,.\,\overline{\gamma b}^2 - \Sigma m\,.\,\overline{cb}^2 = \Sigma m\,.\,\overline{c\gamma}^2 - 2\Sigma m\,.\,cb\,.\,c\gamma\,.\cos\theta.$$

Or le second membre de cette équation est essentiellement positif ; donc $\Sigma m\overline{\gamma b}^2$ est essentiellement plus grand que $\Sigma\,.\,m\,.\,cb^2$; c'est-à-dire que $\Sigma m\,.\,\overline{cb}^2$ est un minimum. On a donc ce principe général et fondamental : « Le mouvement » d'un système de points matériels, liés entre eux d'une ma» nière quelconque, et dont les mouvements sont soumis à » des limitations extérieures quelconques, s'opère à chaque » instant dans la plus grande coïncidence possible avec le » mouvement libre ou avec la moindre contrainte possible, » en prenant pour mesure de la contrainte que tout le sys» tème éprouve dans chaque instant, la somme des produits » de la masse de chaque point matériel par le carré de sa » déviation instantanée de la direction libre. »

L'illustre auteur donne un énoncé plus juste que celui qui est en usage, du principe des vitesses virtuelles. Il faut, dit-il, que la *somme* ne puisse jamais devenir positive. Car l'expression usitée suppose tacitement, par exemple, qu'un point placé sur une surface est forcé d'y rester, que la distance de deux points est invariable ; ce sont des restrictions inutiles et souvent incompatibles. Ainsi, la surface d'un corps impénétrable ne contraint pas un point matériel de rester sur elle, mais s'oppose seulement à son passage de l'autre côté ; un fil inextensible et flexible, tendu entre deux points, rend impossible l'accroissement, mais non la diminution de la distance. Il convient d'adopter un énoncé qui embrasse de suite tous les cas possibles et que Poisson a effectivement admis dans la 2me édition de sa Mécanique.

Il est remarquable, termine l'illustre géomètre, que lorsque les mouvements libres ne peuvent exister, avec des conditions nécessaires, ils sont modifiés par la nature de la même manière que le calculateur, dans la méthode des *moindres carrés*, compense des expériences qui se rapportent à des grandeurs qui ont entre elles des dépendances nécessaires.

Cette ingénieuse observation fait ressortir l'utilité philosophique du principe de la *moindre contrainte* qui pourra quelquefois servir de point de départ.

On trouve dans le même mémoire une objection contre l'emploi que Laplace fait du principe de la moindre action pour démontrer la loi de la double réfraction. Ce principe dépend essentiellement de la conservation des forces vives ; d'après laquelle les vitesses sont déterminées uniquement par les positions des points, sans que les *directions* des vitesses aient la moindre influence ; ce qu'on admet pourtant dans cette expérience de physique. Tm.

THÉORÈMES

Sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites ; de même à un triangle ; théorème de M. Steiner.

(Suite, v. p. 376.)

—

XXXIII. Théorème. *Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique.*

Démonstration. Prenons pour axes deux côtés opposés du quadrilatère, et soit l'équation de la conique

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$

faisant $y = 0$, on connaîtra $\frac{E}{C}, \frac{F}{C}$; et fesant $x = 0$, on connaîtra $\frac{D}{A}, \frac{F}{A}$; ainsi, on peut regarder comme connus les coefficients à l'exception de B. Soient t, u les coordonnées du centre ; on a

$$2Au + Bt + D = 0 \text{ , } Bu + 2Ct + F = 0 ;$$

éliminant B, on obtient

$$2Au^2 - 2Ct^2 + Du - Ft = 0 \text{ (1)},$$

equation du lieu cherché, et d'une facile discussion.

Observation. Ce même problème a déjà été résolu (p. 304) en prenant pour axes deux côtés consécutifs ; ce qui est plus long et mène à une équation plus compliquée. La solution actuelle est donnée par MM. Gergonne (tome XVIII p. 100), et Lamé, t. VII.

XXXIV. Théorème. *Les asymptotes de l'hyperbole lieu des*

centres des coniques circonscrites à un quadrilatère convexe sont conjugués relativement à chacune de ces coniques.

Démonstration. Soient α et α' les coefficients angulaires des asymptotes; on a donc, en vertu de l'équation (1) ci-dessus, $\alpha+\alpha'=0$; $\alpha\alpha'=-\frac{C}{A}$; or, la relation pour que deux droites soient conjuguées est $2Apq+B(p+q)+2C=0$; et cette relation est satisfaite par les valeurs de α et α'; donc, etc.

Observation. Ce théorème est de M. Steiner, célèbre géomètre suisse, professeur à Berlin.

XXXV. Lemme. Le carré du sinus de l'angle des diamètres conjugués égaux dans l'ellipse est égal à $\frac{-m\sin^2\gamma}{N^2}$.

Démonstration. Soient θ l'angle des diamètres conjugués égaux et a' l'un de ces demi-diamètres, on a

$$a'^2=\frac{2LN}{m^2};\quad a''\sin\theta=\frac{2L\sin\gamma}{-m\sqrt{-m}}$$

(t. I, p. 493); d'où

$$\sin^2\theta=\frac{-m\sin^2\gamma}{N^2}.$$

XXXVI. Théorème. L'ellipse circonscrite à un quadrilatère, dont les diamètres conjugués égaux sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, lieu des centres, est l'ellipse où l'angle aigu formé par ces diamètres est le plus grand possible, par conséquent celle qui s'écarte le moins du cercle.

Démonstration. Désignons cet angle par θ; on a donc en général $N^2\sin^2\theta=-m\sin^2\gamma$; différentiant par rapport à B, et posant $\frac{d\sin\theta}{dB}=0$; ainsi que l'exige la théorie *de maximis*, on a

$$2N\frac{dN}{dB}.\sin^2\theta=-\sin^2\gamma\frac{dm}{dB};$$

éliminant $\sin^2\theta$, on obtient

$$2\frac{dN}{dB}m = N\frac{dm}{dB};$$

or

$$\frac{dN}{dB} = -\cos\gamma;\ \frac{dm}{dB} = +2B;$$

d'où $m\cos\gamma + BN = 0$; développant on trouve

$$B = \frac{4AC}{A+C}\cos\gamma.$$

Nommant p et q les coefficients angulaires des diamètres conjugués égaux, on a

$$p+q = \frac{-2(BN+m\cos\gamma)}{m+2AN};\ pq = \frac{m+2CN}{m+2AN}$$

(t. II, p. 29); donc $p+q=0$;

$$pq = \frac{mB+2CBN}{mB+2ABN} = -\frac{C}{A},$$

en remplaçant auparavant B par sa valeur.

Or, pour les asymptotes, on a de même $p+q=0$; $pq = -\frac{C}{A}$; ce qu'il fallait démontrer.

Observation I. Le plus petit angle aigu a lieu pour $m=0$; l'ellipse devient une parabole.

Observation II. Lorsque $A=C$; $B=2A\cos\gamma$; le quadrilatère est inscriptible dans un cercle, et alors

$$\sin^2\theta = 1;\ \theta = \frac{\pi}{2}.$$

XXXVII. Théorème. Les asymptotes d'une hyperbole circonscrite à un quadrilatère non convexe, sont conjugués relativement à l'ellipse, lieu des centres.

Démonstration. Soit $Ay^2+Bxy-Cx^2+Dy+Ex+F=0$, l'équation de l'hyperbole circonscrite; $2Au^2+2Ct^2+Du-Ft=0$

sera l'équation de l'ellipse, lieu des centres (p. 464); p et q étant les coefficients angulaires des asymptotes, on a

$$p+q=-\frac{B}{A};\ pq=-\frac{C}{A};$$

pour que des droites soient conjuguées relativement à l'ellipse, lieu des centres, on doit avoir $2Apq+2C=0$; or, les coefficients angulaires des asymptotes satisfont à cette équation de condition, donc, etc.

XXXVIII. Théorème. L'hyperbole circonscrite à un quadrilatère non convexe, dont les asymptotes sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse, lieu des centres, est celle dont l'angle des asymptotes est un maximum pour toutes les hyperboles circonscrites.

Démonstration. Soit δ l'angle des asymptotes; on a

$$\tan^2\delta=\frac{m\sin^2\gamma}{N^2}$$

(t. II, p. 106); appliquant la méthode *de maximis*, on trouve comme ci-dessus $BN+m\cos\gamma=0$, ou $N=A-C+B\cos\gamma$; $m=B^2+4AC$; on en déduit $B=\dfrac{4AC\cos\gamma}{C-A}$; désignant par p' et q' les coefficients angulaires des asymptotes de cette hyperbole, on a

$$p'+q'=\frac{4C\cos\gamma}{A-C};\ p'q'=-\frac{C}{A};$$

or, p et q étant les coefficients angulaires des diamètres conjugués égaux dans l'ellipse, et substituant pour B, m, N, leurs valeurs dans les expressions données ci-dessus (XXXVI), pour ces coefficients, on trouve $p+q=p'+q'$; $pq=p'q'$; donc, etc.

Observation. Ce théorème répond à une question proposée par Abel, dans le Journal de Crelle et ainsi énoncée : parmi toutes les hyperboles circonscrites à un quadrilatère non

convexe, trouver celle qui s'écarte le plus de l'hyperbole équilatère.

XXXIX. PROBLÈME. Parmi les coniques circonscrites à un quadrilatère, déterminer celle où le produit des axes principaux est un minimum.

Solution. Adoptons même système d'axes que pour le théorème XXXIII; faisant $z=\frac{L^2}{m^3}$, il faut que z soit un minimum (t. I, p. 493), d'où

$$3L\frac{dm}{dB}=2m\frac{dL}{dB};\ \frac{dm}{dB}=2B;\ \frac{dL}{dB}=-n;$$

ainsi $3BL+mn=0$; mais $4BL=-2kk'-2mn$; ainsi

$$3kk'+mn=0;\ 3\frac{k'}{m}+\frac{n}{k}=0\ (1);$$

et $\frac{k'}{m}$ est l'ordonnée du centre; $\frac{n}{k}$ est l'ordonnée du pôle de l'axe des y; l'équation (1) exprime donc la relation entre ces deux ordonnées, pour la conique qui satisfait au problème. Développant l'équation $3BL+mn=0$, et ordonnant par rapport à B, il vient

$$FB^3-2DEB^2+[3AE^2+3CD^2-4ACF]B-4ACDE=0,$$

ainsi il y a au moins une racine réelle, et trois au plus.

En résolvant, on a

$$FB=\frac{2}{3}DE-(1)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{P+\sqrt{Q}}-(1)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{P-\sqrt{Q}}$$

$$P=DE\left[-\frac{8}{27}D^2E^2+F(AE^2+CD^2)-\frac{10}{3}ACF^2\right]$$

$$Q=P^2+\left[-\frac{4}{9}D^2E^2+F(AE^2+CD^2)-\frac{4}{3}ACF^2\right]^3$$

si $4(D^2E^2+3ACF^2)<9F(AE^2+CD^2)$, Q est positif, et B n'a qu'une seule valeur réelle.

Observation. La valeur de B est indépendante de l'angle des axes.

XL. PROBLÈME. Parmi les coniques touchant les côtés d'un quadrilatère, déterminer celle où $\frac{m}{N^2}$ est un maximum.

Solution. Prenons pour axe des x la droite, lieu des centres de toutes les coniques et les axes rectangulaires; faisant usage des fonctions élémentaires, l'équation de la conique devient :

$$(k^2-ml)y^2-2mnxy-ml'x^2+2kny+2kl'x+n^2-ll'=0$$

(*Voir* p. 262); car $k'=0$, ou bien

$$\left(\frac{k^2}{m^2}-\frac{l}{m}\right)y^2-2n'xy-\frac{l'}{m}x^2+2\frac{k}{m}n'y+2\frac{k}{m}\frac{l'}{m}x+$$
$$+n'^2-\frac{l}{m}\frac{l'}{m}=0, \quad \text{ou} \quad n'=\frac{n}{m}.$$

Chaque côté du quadrilatère fournit une équation du premier degré en $\frac{k}{m}$, $\frac{l}{m}$, $\frac{l'}{m}$ et n' (t. II, p. 108); mais l'origine étant sur la ligne des centres, trois suffisent; on a donc :

$$\frac{k}{m}=a+bn'; \quad \frac{l}{m}=a'+b'n'; \quad \frac{l'}{m}=a''+b''n';$$

a, b, a', b', a'', b'' sont des quantités connues; ainsi l'équation prend cette forme :

$$(\alpha n'^2+\beta n'+\gamma)y^2-2n'xy+(a''+b''n')x^2+\text{etc.}=0.$$

α, β, γ sont des quantités connues.

On a $m=pn'^3+qn'^2+rn'+s$, $N=p'n'^2+q'n'+r'$; les sept nouvelles lettres représentent encore des quantités connues. L'équation *de maximis* donne comme ci-dessus :

$$2m\frac{dN}{dn'}=N\frac{dm}{dn'}$$

ou $$2(pn'^3 + qn'^2 + rn' + s)(2p'n' + q') =$$
$$= (p'n'^2 + q'n' + r')(3pn'^2 + 2qn' + r),$$
équation qui, dans le cas général, est du quatrième degré en n'.

Observation. L'équation est plus compliquée que pour le problème analogue (XXXVI) relatif aux coniques circonscrites; c'est ce qu'on rencontre aussi dans la géométrie élémentaire; il n'y a qu'un cercle circonscrit à trois points et quatre cercles inscriptibles au système des côtés d'un triangle. En général, ce genre de problème se réduit à rendre maximum ou minimum, une fonction des coefficients de l'équation, ces coefficients étant chacun fonction d'une seule variable.

M. Ferriot a traité d'une manière parfaite et complète le cas particulier où le quadrilatère devient un parallélogramme (application de la méthode des projections, p. 76, 1838. *Voir* aussi Nouvelles Annales, t. II, p. 205 et 292). Il serait à désirer qu'on pût se servir de la méthode des projections pour le quadrilatère. M. Steiner, dans son excellent mémoire, n'a pas examiné les cas actuels des *maxima*. (*Voir* Journal de Liouville, t. VI, p. 105, 1841.)

XLI. Problème. Trouver l'aire d'une ellipse inscrite dans un triangle, connaissant les points de contact.

Solution. Prenons deux des côtés du triangle pour axes; et soit $dy + ex + f = 0$, l'équation du troisième côté; soit x' l'abscisse du point de contact sur l'axe des x, et y' l'ordonnée du point de contact sur l'axe des y; x' et y' sont données; faisons de plus :

$$\frac{k}{m} = t; \quad \frac{k'}{m} = u; \quad \frac{n}{m} = n'; \quad f = -ep; \quad f = -dq.$$

Faisant $l = l' = 0$ dans l'équation générale qui est au bas de la page 262, et divisant toute l'équation par m^2, il vient :

$$t^2y^2 - 2(ut + n')xy + u^2x^2 + 2tn'y + 2u'n'x + n'^2 = 0.$$

Faisant $x=0$; on a :

$$ty'+n'=0\,;\ \text{d'où}\ t=-\frac{n'}{y'},\ \text{et de même}\ u=-\frac{n'}{x'}.$$

Le troisième côté tangent donne :

$$-2den'+f^2+2fdu+2fet=0\,;$$

d'où $\quad -2dex'y'n'+f^2x'y'-2fdn'y'-2fen'x'=0\,;$

$$2n'=\frac{f^2x'y'}{dex'y'+fdy'+fex'}=\frac{pqx'y'}{x'y'-py'-qx'}.$$

Soit A l'aire de l'ellipse ; on a :

$$A^2=-\frac{4L^2\sin^2\gamma}{m^3}\pi^2\,;$$

or $L=Dk'+mF$; $4L^2=4DLk'+4mLF$ (*Voir* t. I, p. 490),

et $\quad 4L^2=2kk'n+mn^2\,;\quad \frac{4L^2}{m^3}=n'[2ut+n']$.

Remplaçant n', u, t par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{4L^2}{m^3}=\frac{n'^2(2n'+x'y')}{x'y'}=\frac{p^2q^2}{4}\cdot\frac{x'^2y'^2.\,x'-p\,.\,y'-q}{(x'y'-py'-qx')^3}\,;$$

$$A=\frac{1}{2}pq\sin\gamma\,\frac{x'y'}{py'+qx'-x'y'}\sqrt{\frac{(x'-p)(y'-q)}{py'+qx'-x'y'}}\cdot\pi.$$

XLII. Problème. x' étant donné, quelle valeur faut-il donner à y' pour que l'aire de l'ellipse devienne un maximum?

Solution. Soit $z\,(py'+qx'-pq)^3=y'^3(q-y')$; il faut que $\frac{dz}{dy'}=0$; différentiant dans ce sens et éliminant z, il vient :

$$(2q-3y')(qx'+py'-x'y')=3(q-y')(p-x')y'\,;$$

d'où l'on tire : $\quad y'=\frac{2qx'}{p+2x'}.$

XLIII. Théorème. L'ellipse qui touche les trois côtés d'un triangle aux milieux est l'ellipse inscrite de plus grande aire.

Démonstration. D'après le problème précédent, on doit avoir simultanément :

$$y'=\frac{2qx'}{p+2x'} \text{ et } x'=\frac{2py'}{p+2y'}; \text{ d'où l'on tire } x'=\frac{p}{2}, \text{ et } y'=\frac{q}{2};$$

et la valeur de l'aire de l'ellipse maxima est :

$$\frac{1}{18}pq\sqrt{3}\,.\,\sin\gamma\,.\,\pi;$$

coordonnées du centre, $\frac{p}{3}, \frac{q}{3}$;

il est évident que le centre de l'ellipse est le centre de gravité du triangle.

Observation. Ainsi la question 86 (t. III, p. 256) est complètement résolue. On voit que la première partie est indéterminée, vu qu'on peut inscrire dans un triangle une infinité d'ellipses d'aires équivalentes. On parvient directement au théorème par la méthode projective, en considérant un triangle quelconque comme la projection d'un triangle équilatéral, ce qui est toujours permis (*Voir* t. I, p. 397, § 4). C'est ainsi que M. Ferriot a démontré ce théorème dans l'ouvrage cité ci-dessus.

XLIV. Théorème. Le polygone circonscrit à l'ellipse dont les points de contact sont aux milieux des côtés est un polygone de moindre aire parmi tous ceux qui sont circonscrits et d'un même nombre de côtés.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du problème XI (t. III, p. 186).

XLV. Théorème. L'ellipse de moindre aire circonscrite à un triangle est semblable à l'ellipse de plus grande aire inscrite, de dimension double, semblablement située et concentrique.

Démonstration. Soit ABC le triangle; faisons $AB=p$,

$AC = q$; prenons AB, AC respectivement pour axes des x et des y. L'équation de l'ellipse circonscrite est :

$$y^2 + Bxy + Cx^2 - qy - Cpx = 0.$$

$$m = B^2 - 4C\,;\ L = C\,(Cp^2 - Bpq + q^2)\,;\ \frac{dm}{dB} = 2B\,;$$

$$\frac{dm}{dC} = -4\,;\ \frac{dL}{dC} = 2Cp^2 - Bpq + q^2\,;\ \frac{dL}{dB} = -Cpq.$$

Faisons $L^3 = zm^2$; les équations *de minimis* donnent :

$$3L\frac{dm}{dC} = 2m\frac{dL}{dC}\ (1)\,;\qquad 3L\frac{dm}{dB} = 2m\frac{dL}{dB}\ (2).$$

d'où

$$\frac{dm}{dB}\cdot\frac{dL}{dC} = \frac{dm}{dC}\,\frac{dL}{dB}\ (3).$$

L'équation (1) développée devient :

$$2Cp^2(B^2 - C) - Bpq\,(B^2 + 2C) + q^2(B^2 + 2C) = 0\,;$$

l'équation (3) donne :

$$2BCp^2 - pq\,(B^2 + 2C) + Bq^2 = 0.$$

Éliminant pq, il vient $Cp^2 - q^2 = 0$; et on trouve pour B deux valeurs $B = \frac{q}{p}$; $B = \frac{2q}{p}$; la première donne une ellipse minimum, et la seconde deux droites parallèles. Or la tangente à l'origine a pour équation $Cpx + qy = 0$. Elle est donc parallèle au côté BC qui a pour équation $py + qx = pq$; donc, si par les trois sommets on mène des parallèles respectivement aux côtés opposés, on obtient un triangle circonscrit à l'ellipse d'aire minima et les points de contact sont aux milieux des côtés, donc, etc. ; et l'aire de l'ellipse minima est

$$\frac{2}{9}pq\sqrt{3}\,.\sin\gamma\,.\,\pi.$$

Observation. La méthode projective donne directement le théorème ; mais pas l'aire de l'ellipse circonscrite.

XLVI. On a vu que l'espèce de la conique inscrite dans un triangle et dont le centre est donné dépend du produit $4n'(2ut+n')$ (p. 265), remplaçant n' par sa valeur donnée au même endroit, en faisant $d=-\frac{f}{q}$; $e=-\frac{f}{p}$; on a

$$4n'(2ut+n')=(2u-q)(2t-p)(pq-2pu-2qt);$$

et on trouve la même expression pour déterminer la nature de la conique circonscrite au triangle et dont le centre est donné (p. 261); ainsi formant le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés, si le centre est dans l'intérieur de ce triangle ou dans les angles opposés aux sommets, la conique inscrite est une ellipse; si le centre est dans un bi-angle formé par un côté et les prolongements des deux autres, la conique est une hyperbole; lorsque le centre est sur les côtés du triangle, la conique se réduit à une droite. Les mêmes déterminations pour la conique circonscrite.

XLVII. Désignant l'aire de l'ellipse inscrite par A, on a

$$A^2=-\frac{4L^2}{m^3}\sin^2\gamma\pi^2=n'(2ut+n')\sin^2\gamma\pi^2=$$

$$=\frac{1}{4}(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)\sin^2\gamma.\pi^2.$$

M. Steiner a donné une très-élégante interprétation géométrique. Soit ABC le triangle donné, et A', B', C', les points milieux de BC, AC, AB; α, β, γ les perpendiculaires abaissées du centre sur B'C', A'C', A'B' et R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; on a

$$\alpha=\frac{(2pu+qt-pq)\sin\gamma}{2r};\ \beta=\frac{(2u-q)\sin\gamma}{2};\ \gamma=\frac{2t-p\sin\gamma}{2};$$

et r est la longueur du côté BC; donc

$$\alpha\beta\gamma R=\frac{(2u-q)(2t-p)(2pu+qt-pq)}{8}\sin^2\gamma.\frac{\sin\gamma R}{r}=$$

$$=\frac{(2u-q)(2t-p)(2pu+qt-pq)\sin^2\gamma}{16};$$

et

$$A^2 = 4\alpha\beta\gamma R . \pi^2.$$

XLVIII. Théorème. Le lieu des centres d'une conique passant par trois points donnés, et dont le rectangle des axes est donné, est une ligne du sixième degré.

Démonstration. Voir IX, page 265; par inadvertance, on a laissé subsister dans les deux membres de l'équation finale, le facteur commun $(2pu+2qt-pq)^2$; en le supprimant, il reste

$$u^2t^2(pu+qt)[pu+qt-2pq]=c(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)$$

courbe du sixième degré qui passe par les points milieux des côtés, qui sont des point multiples; les côtés sont des asymptotes, ayant chacun à l'origine quatre points en commun avec la courbe, c'est-à-dire, étant asymptote à quatre branches. Voir les *fig.* 51, 52, 53, qui représentent les diverses formes de la courbe, selon que l'aire donnée surpasse l'aire du triangle, est égale ou inférieure à cette aire.

XLIX. Théorème. Le lieu du centre d'une conique d'aire donnée, touchant trois droites, est du troisième degré.

Démonstration. L'équation de cette ligne est

$$(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)=c$$

ou c est une constante. (XLVII.)

(*La suite prochainement.*)

THÉORÈMES DE M. STEINER

sur la division du plan par des droites et des cercles; et sur la division de l'espace par des plans et des sphères.

—

Théorème I. Un plan est partagé par n droites qui y

sont situées *au plus* en $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ régions, dont $1 - n + \frac{n(n-1)}{2}$ sont entièrement fermées au plus, et $2n$ indéfinies.

THÉORÈME II. Si on trace dans un plan n systèmes de a_1, a_2, a_3 .... a_n parallèles, chaque système ayant une direction différente, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B$ régions; $A = a_1 + a_2 + \ldots a_n$; $B = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots a_{n-1}a_n$ dont $2A$ sont infinies et $1 - A + B$ fermées au plus.

THÉORÈME III. Si on trace dans un plan n systèmes a_1, a_2 .... a_n de droites parallèles et b droites non parallèles, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + \frac{b(b-1)}{2}$ régions au plus, dont $2A$ sans bornes, A et B comme dessus.

THÉORÈME IV. n circonférences partagent le plan au plus en $n(n-1) + 2$ régions, dont une seule est infinie.

THÉORÈME V. Si on trace dans un plan n systèmes de c_1, c_2, c_3 .... c_n circonférences concentriques, chaque système ayant un centre différent; le plan sera partagé en $1 + 2B$ régions au plus, $B = c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots c_{n-1}c_n$, dont une seule est sans bornes.

THÉORÈME VI. Si on trace dans un plan n systèmes divers de a_1, a_2 .... a_n circonférences concentriques et b circonférences non concentriques, le plan sera partagé au plus en $2A + b(b-1) + 2$ régions, dont une seule est sans bornes.

THÉORÈME VII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles a_1, a_2 .... a_n et m systèmes de cercles concentriques c_1, c_2 .... c_m, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + 2AA' + 2B'$ régions; A et B se rapportent aux droites; A' et B' aux circonférences; 2B sont sans bornes, au plus.

THÉORÈME VIII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles a_1, a_2 .... a_n et b droites quelconques; m systèmes de circonférences concentriques, c_1, c_2, ... c_3c_m, et d cir-

conférences quelconques, le plan sera partagé au plus en $1+A+B+2AA'+2B'+\frac{b(b-1)}{2}+d(d-1$ régions, dont 2A sont au plus sans bornes.

Observation. Les théorèmes IV, V, VI s'appliquent également à la sphère.

Espace.

THÉORÈME IX. n systèmes différents de plans parallèles; p_1, $p_2 \ldots p_n$ partagent l'espace au plus en $1+A+B+C$ régions; $A = p_1+p_2+\ldots p_n$; $B = p_1p_2\ldots + p_{n-1}p_n$; $C = p_1p_2p_3+\ldots$ $\ldots + p_{n-2}p_{n-1}p_n$; donc $2B+2$ sont complétement bornés. Et dont $-1+A-B+C$ sont complétement fermés et forment des corps.

THÉORÈME X. n plans quelconques, dont trois ne sont pas parallèles à une même droite, et dont quatre ne passent pas par le même point, partagent l'espace au plus $1+n+\frac{n(n-1)}{2}+$ $+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ régions dont $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}$ sont complétement fermées.

THÉORÈME XI. $p_1, p_2 \ldots p_n$ systèmes de plans parallèles et m plans quelconques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+\frac{m(m+1)}{1.2}A+mB+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ régions, et dont $2+2B+2mA+m(m-1)$ ne sont pas complétement bornées; A, B, C comme ci-dessus.

THÉORÈME XII. $p_1, p_2 \ldots p_n$ systèmes divers de plans parallèles et $s_1, s_2 \ldots s_m$ systèmes de sphères concentriques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+2BA'+2B'A+2A'+2C'$; A, B, C se rapportent aux plans, et A', B', C' aux sphères; $2+2B$ régions sont incomplétement bornées.

THÉORÈME XIII. n plans quelconques et m sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+mn(n-1)+mn(m-1)+2m+$$
$$+\frac{2m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\text{ régions},$$

dont $2+n(n-1)$ sont incomplétement bornées.

THÉORÈME XIV. $p_1, p_2 \ldots. p_n$ systèmes divers de plans parallèles et m plans quelconques, et s_1, s_2 .... s_q systèmes divers de systèmes concentriques et m' sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1+A+B+C+2A'B+2B'A+2A'+2C'+$$
$$+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}+m'(m'-1)+2mm'\right)A+(m+2m')A+$$
$$+2(m+m')AA'+(m+m')(m+m'-1)A'+2(m+m')B'+m+$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+mm'(m+m'-2)+2m'+$$
$$+2\frac{m'(m'-1)(m'-2)}{1.2.3}\text{ régions},$$

dont $2+2B+2mA+m(m-1)$ sont incomplétement bornées.

THÉORÈME SUR LE QUADRILATÈRE SPHÉRIQUE.

Par M. Remy. (Crelle, t. III, p. 85, 1828.)

—

THÉORÈME. a, b, c, d sont les côtés et e, f les diagonales d'un quadrilatère sphérique, g la distance sphérique des milieux des diagonales ; on a :

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos d=4\cos\frac{1}{2}e\cos\frac{1}{2}f\cos g.$$

Démonstration. Soit le quadrilatère ABDC ; $AC=a$; $AB=b$; $BD=c$, $DC=d$; $AD=f$; $BC=e$.

Soit F milieu de BC; et G milieu de AD; FG $= g$; soit AF $= r$ et angle AFC $= \alpha$.

Ainsi dans le triangle ACF l'on a :

$$\cos a = \cos r \cos \frac{1}{2} e + \cos \alpha \sin \frac{1}{2} e \sin r,$$

et dans le triangle ABF :

$$\cos b = \cos r \cos \frac{1}{2} e - \cos \alpha \sin \frac{1}{2} e \sin r.$$

Donc $$\cos a + \cos b = 2 \cos r \cos \frac{1}{2} e,$$

et $$\cos c + \cos d = 2 \cos \rho \cos \frac{1}{2} e;$$

ρ est l'arc FD; donc

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 2 \cos \frac{1}{2} e (\cos r + \cos \rho);$$

mais $$\cos r + \cos \rho = 2 \cos \frac{1}{2} f \cos g;$$

donc, etc.

Note. En développant les côtés en séries, on peut déduire de ce théorème celui d'Euler sur le quadrilatère plan.

CONSTRUCTION

approchée du périmètre et de l'aire du cercle.

Par M. Specht. (Crelle, t. III, p. 83.)

—

Soit CBD un triangle rectangle en B; BC rayon d'un cercle, et BD diamètre du même cercle; soit prolongé BD d'une longueur Da égale au $\frac{1}{5}$ du rayon BC; et encore d'une longueur Db égale aux $\frac{3}{5}$ du rayon; menez les droites Ca, Cb; prolongez BC en A jusqu'à BA $=$ Ca; par A menez AE parallèle à Cb; E est l'intersection de cette parallèle avec BD prolongée; alors BE sera très-approchée en longueur à

$\frac{1}{2}$ circonférence du rayon BC ; et le triangle BCE aura à peu près la même aire que le cercle ; en effet, soit BC = 1 ; on aura

$$BD = 2 ;\ Ba = 2\frac{1}{5} ;\ Bb = 2\frac{3}{5} ;$$

$$Ca = \frac{\sqrt{146}}{5} = BA ;\ BE = \frac{13}{2}\frac{\sqrt{146}}{5} =$$

$$= \sqrt{39,7484} = 2.3,141591953 ;$$

mais $\pi = 3,141592651...$ etc.

Le même auteur donne une méthode plus approchée encore, mais plus longue (Crelle, t. III, p. 405).

On doit ajouter à la note de la page 177, cette observation de Legendre. Pour que $2^n + 1$ soit un nombre premier, il faut que l'exposant n soit une puissance de 2. Car, si n renfermait le facteur impair k, faisons $n = kl$ et $2^l = a$; alors $2^n + 1 = a^k + 1$; or k étant impair, $a^k + 1$, est divisible par $a + 1$, donc $2^n + 1$ n'est pas premier, mais la réciproque est fausse. Ainsi, pour $n = 32$; on a

$$2^{32} + 1 = 4294967297 = 641.6700417,$$

ainsi que l'a remarqué Euler.

Faisant :

$n = 2$;	on a les polyg. conséc.	3,4,5,	constructibles géomé-
$n = 4$	Id.	15,16,17	triquement.
$n = 8$	Id.	255,256,257	Id.
$n = 16$	Id.	65535,65536,65537	Id.

car

$$255 = 3.5.17 ; 256 = 2^8 ; 65535 = 2^{16} - 1 = (2^8+1)(2^8-1) =$$
$$= 257.255.$$

Cette loi de succession s'arrête là. Car, supposons même que $2^{64} + 1$ soit un nombre premier, on aura

$$2^{64} - 1 = (2^{32} + 1)(2^{32} - 1) ;$$

ou $2^{32} + 1$ ne donne pas une construction géométrique.

NOTE

sur la théorie du plus grand commun diviseur algébrique.

PAR M. P. L. CIRODDE,
Professeur au collége de Henri IV.

—

Rappelons d'abord quelques définitions et quelques principes qu'il est important d'avoir bien présents à l'esprit.

1. *On appelle* quantité entière *celle dont l'expression ne renferme ni dénominateur, ni radical.* Telles sont $2a^3b$, $3a^2-bc$, etc.

2. *On nomme* quantité première *toute quantité entière qui n'est divisible par aucune autre quantité entière qu'elle-même ou l'unité.* Ainsi $3a^2-2b$ est une quantité première, mais a^2-b^2 n'en est pas une.

3. *Pour qu'un polynôme entier soit divisible par un diviseur entier, indépendant de la lettre par rapport à laquelle il est ordonné, il faut et il suffit que ce diviseur divise chacun des coefficients de cette lettre.*

4. *Toute quantité première qui divise le produit de plusieurs facteurs entiers divise l'un d'eux.*

5. *Une quantité entière n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers.*

6. *Le* plus grand commun diviseur *de plusieurs quantités algébriques est le produit de* tous *leurs facteurs premiers communs tant égaux qu'inégaux.*

7. Nous distinguerons deux cas dans la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, selon que les quantités entre lesquelles on le cherchera seront monômes ou polynômes.

Si les quantités proposées sont monômes, on cherchera le P. G. C. *diviseur de leurs coefficients, et on le fera suivre de toutes les lettres communes à ces monômes, en donnant à chacune d'elles le plus petit exposant dont elle s'y trouve affectée. Ce produit sera le* P. G. C. *diviseur demandé*, car il est clair qu'il satisfait à la définition du n° 6.

8. Examinons actuellement le cas où les quantités proposées sont polynômes, et d'abord nous observerons qu'il suit immédiatement de la définition (6) que *la recherche du* P. G. C. *diviseur de plusieurs polynômes ne dépend que de la détermination de celui de deux polynômes.*

Soient en effet les quatre polynômes A, B, C, D. *Opérons comme il est prescrit au n°* 79 *de nos* Leçons d'Arithmétique (*), et désignons en conséquence par E le P. G. C. diviseur entre A et B, par F celui de E et de C et enfin par G celui de F et de D; G sera le P. G. C. diviseur des quatre polynômes A, B, C, D, car il est évidemment le produit de *tous* leurs facteurs premiers communs.

9. Scholie. Dans la pratique, on devra, après avoir ordonné les polynômes proposés par rapport aux puissances d'une même lettre, chercher d'abord le P. G. C. diviseur entre les deux polynômes du plus faible degré; puis celui de ce P. G. C. diviseur et du plus simple des polynômes restants, et ainsi de suite.

10. Lemme. *On n'altère pas le* P. G. C. *diviseur de deux quantités* A *et* B *en multipliant ou en divisant l'une d'elles par un facteur premier avec l'autre.*

En effet si M est une quantité première avec B, le produit MA n'ayant pas d'autres facteurs premiers que ceux de M et de A (5), les facteurs premiers qui sont communs à MA et

(*) *Leçons d'arithmétique*, par P. L. Cirodde, professeur au collége de Henri IV, *sixième édition*, augmentée de la méthode de division abrégée de M. le capitaine Guy.

à B sont ceux mêmes qui l'étaient à A et à B ; donc le P. G. C. diviseur de MA et de B est le même que celui de A et de B (6).

On verrait de même qu'en supposant A divisible par M, le P. G. C. diviseur de $\frac{A}{M}$ et de B est identique avec celui de A et de B.

11. Ce Lemme étant ainsi établi, occupons-nous de la recherche du P. G. C. diviseur de deux polynômes, et, pour considérer d'abord le cas le plus simple, *supposons que les deux polynômes ne renferment qu'une seule lettre*, *et que de plus tous les termes de chacun soient premiers entre eux.*

Désignons-les par A et par B, et admettons que B soit au plus du même degré que A. D'après la définition, le P. G. C. diviseur demandé est le produit de tous les facteurs premiers communs à A et à B ; donc si B divise exactement A, ce polynôme sera le P. G. C. diviseur de A et de B, puisqu'un polynôme ne peut être décompose qu'en un seul système de facteurs premiers. Effectuons donc la division de A par B · soient Q le quotient et R_1 le reste ; nous aurons

$$A = BQ + R_1 :$$

or, je dis que, si le quotient Q ne renferme que des termes entiers, le P. G. C. diviseur de A et de B est le même que celui de B et de R_1. En effet, tout facteur commun à A et à B divise A et BQ et par conséquent leur différence R_1 ; de même tout facteur commun à B et à R_1 divise A ; donc les facteurs premiers communs à A et à B sont les mêmes que ceux qui sont communs à B et à R_1, et par conséquent le P. G. C. diviseur de B et de R_1 est le même que celui de A et de B.

Donc *lorsque la division de deux polynômes s'effectue*, *sans admettre de termes fractionnaires au quotient*, *le* P. G. C. *diviseur de ces deux polynômes est le même que celui qui existe entre le reste de leur division et le polynôme qui a servi de diviseur*.

La question est ainsi ramenée à chercher le P. G. C. diviseur entre les polynômes B et R_1. On divisera donc B par R_1; si la division réussit, R_1 sera le P. G. C. diviseur demandé; si non, ce P. G. C. diviseur sera le même que celui de R_1 et du reste R_2 de cette deuxième division (on suppose *toujours* que l'on n'ait écrit que des termes entiers au quotient). On divisera donc R_1 par R_2, puis le reste R_2 par celui R_3 de la troisième division, puis R_3 par le reste R_4 de la quatrième, et on continuera ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à un reste indépendant de la lettre ordonnatrice. Si ce reste est nul, le dernier diviseur est le P. G. C. diviseur demandé; sinon, les polynômes proposés sont premiers entre eux, sans quoi le P.G.C. diviseur qui, s'il existe, est dépendant de cette lettre (3), puisque tous les termes de chacun sont premiers entre eux, par hypothèse, devrait diviser ce dernier reste, qui est indépendant de cette même lettre.

12. La démonstration du principe sur lequel est fondée la méthode que nous venons de développer suppose essentiellement que les quotients successifs aient tous leurs termes entiers, car si le quotient Q de la division de A par B était fractionnaire, on n'aurait pas le droit de dire que tout facteur qui divise B divise BQ. Or on sent qu'il arrivera très-souvent que la division du coefficient du premier terme d'un dividende partiel par celui du premier terme du diviseur ne s'effectuera pas exactement. Dans ce cas, on multipliera le dividende par un facteur tel que le terme correspondant du quotient soit entier (nous indiquerons tout à l'heure (13) comment on peut déterminer ce facteur), et cette opération n'altèrera pas le P. G. C. diviseur que l'on cherche, si ce facteur est premier avec le diviseur (10). Or pour que le facteur que l'on introduit ainsi soit certainement premier avec le diviseur, il suffit que les coefficients de tous les termes de ce diviseur soient premiers entre eux, puisque notre facteur est indépendant de la lettre or-

donnatrice. En conséquence *avant de prendre un reste pour diviseur, on aura soin de chercher le* P. G. C. *diviseur des coefficients de tous ses termes, et de le diviser par ce* P. G. C. *diviseur, ce qu'il est permis de faire* (10), *puisque le dividende correspondant a déjà tous ses termes premiers entre eux.*

13. *Si le coefficient du premier terme d'un dividende partiel est premier avec le coefficient du premier terme du diviseur, on n'aura qu'à multiplier ce dividende par ce coefficient, et alors le coefficient du terme correspondant du quotient sera évidemment entier. Mais si les deux coefficients dont il s'agit ne sont pas premiers entre eux, il vaudra mieux chercher leur* P. G. C. *diviseur et multiplier le dividende partiel par le quotient obtenu en divisant le coefficient du premier terme du diviseur par ce* P. G. C. *diviseur.* On conçoit en effet qu'en opérant ainsi, on aura rendu le coefficient du premier terme du dividende divisible par celui du premier terme du diviseur, et que le facteur introduit de cette manière dans ce dividende sera le plus simple possible. (*Leçons d'Arithmétique*, 6ᵉ édit., n° 93.)

14. On voit donc que *pour trouver le* P. G. C. diviseur *de deux polynômes il faut leur appliquer la méthode des divisions successives*, comme on le fait dans l'arithmétique, *avec les modifications nécessaires pour que les termes des quotients successifs que l'on obtiendra soient tous entiers* (13), *et avoir bien soin de diviser chaque reste par le* P. G. C. *diviseur des coefficients de tous ses termes, avant de le prendre pour diviseur. On arrêtera cette série d'opérations, quand on sera parvenu à un reste indépendant de la lettre ordonnatrice : si ce reste est nul, le dernier diviseur est le* P. G. C. *diviseur demandé ; sinon, les polynômes proposés sont premiers entre eux.*

15. L'application de cette règle ne saurait présenter de difficultés, dans le cas particulier où nous nous sommes placés ; car les coefficients du polynôme B étant supposés être

tous premiers entre eux, le facteur par lequel on pourra multiplier A pour rendre la division par B possible en termes entiers, sera nécessairement premier avec B, de sorte que l'introduction de ce facteur n'altèrera pas le P. G. C. diviseur cherché. D'un autre côté, les coefficients des différents termes de chaque reste sont numériques et la recherche de leur P. G. C. diviseur se réduit par conséquent à une simple opération d'arithmétique.

16. Passons actuellement au cas général et considérons ainsi deux polynômes entiers quelconques A et B. Représentons par A_1 le P. G. C. diviseur monôme des différents termes de A et par A' le quotient de la division de A par A_1; nous aurons

$$A = A_1 A'.$$

Désignons de même par B_1 le P. G. C. diviseur monôme de tous les termes de B, et par B' le quotient de la division de B par B_1, de sorte que

$$B = B_1 B'.$$

Cela posé, supposons que l'on ait ordonné les polynômes A' et B' par rapport aux puissances d'une même lettre, et appelons A_2 le P. G. C. diviseur de tous les coefficients de cette lettre dans A', et A_3 le quotient de la division de A' par A_2, nous aurons

$$A' = A_2 A_3, \quad \text{et par conséquent} \quad A = A_1 A_2 A_3.$$

Supposons que l'on ait agi sur B' comme on a fait sur A' et soit

$$B' = B_2 B_3, \quad \text{et partant} \quad B = B_1 B_2 B_3:$$

je dis alors que si l'on cherche le P. G. C. diviseur d_1 de A_1 et de B_1; celui d_2 de A_2 et de B_2, et celui d_3 de A_3 et de B_3, le produit

$$d_1 d_2 d_3$$

sera le P. G. C. diviseur des quantités A et B. En effet tout facteur polynôme premier dépendant de la lettre ordonnatrice qui divise $A=A_1A_2A_3$ et $B=B_1B_2B_3$, ne pouvant diviser aucune des quantités A_1, A_2, B_1, B_2, divise nécessairement A_3 et B_3 (4), et est par conséquent un facteur de leur P. G. C. diviseur d_3; donc d_3 est le produit de tous les facteurs polynômes premiers qui, fonction de la lettre ordonnatrice, sont communs à A et à B. On démontrerait de même que d_1 et d_2 sont, l'un le produit de tous les facteurs monômes premiers communs à A et à B, et l'autre celui de tous les facteurs polynômes premiers, communs à A et à B, qui sont indépendants de la lettre ordonnatrice. Donc $d_1d_2d_3$ est bien le produit de *tous* les facteurs premiers communs à A et à B; donc il est leur P. G. C. diviseur.

17. Occupons-nous de la recherche de ces différents P. G. C. diviseurs. La détermination de A_1, de B_1 et de d_1 ne présente aucune difficulté (7) : quant aux autres, je dis que si l'on savait trouver le P. G. C. diviseur des polynômes A' et B' qui ne renferment plus, chacun, de facteurs monômes communs à tous leurs termes, dans le cas où ils sont composés de n lettres *au plus*, il serait possible de le déterminer aussi, dans le cas où ils en contiendraient $n+1$. En effet, les coefficients de la lettre ordonnatrice dans A' et dans B' ne renfermant alors que n lettres, on pourrait, d'après notre hypothèse et en vertu du principe du n° 8, calculer A_2 et B_2, et par suite leur P. G. C. diviseur d_2, ainsi que les quotients A_3 et B_3. Cela posé, j'observe que les différents termes de chacun de ces quotients étant premiers entre eux, on pourra appliquer à A_3 et à B_3 la méthode du n° 14; car, dans les raisonnements sur lesquels nous l'avons fondée, nous ne nous sommes nullement occupés du nombre des lettres qui pourraient entrer dans les polynômes proposés (10, 11, 12 et 13). Ainsi pour rendre possible la première division partielle, on multipliera

A_3 par une certaine quantité M qui sera un produit de facteurs premiers du coefficient du premier terme de B_3 (13), et cette opération ne saurait altérer le P. G. C. diviseur des polynômes A_3 et B_3, puisque tous les coefficients de la lettre ordonnatrice dans B_3 étant premiers entre eux, le facteur par lequel on multiplie A_3 est nécessairement premier avec B_3 (3). Ayant ainsi effectué entièrement la division de A_3 par B_3, on pourra supprimer, dans le reste de cette division, tous les facteurs monômes qu'il renfermera (7), ainsi que les facteurs polynômes indépendants de la lettre ordonnatrice qui leur seraient communs, car il suffira, pour cela, de chercher le P. G. C. diviseur de plusieurs polynômes de n lettres au plus (8). On procédera ensuite à la seconde division, en prenant pour diviseur ce reste ainsi modifié, et on continuera ainsi de suite. Donc on arrivera à la valeur de d_2.

Ainsi la détermination du P. G. C. diviseur de deux polynômes A′ et B′ qui contiennent un certain nombre de lettres et dont les termes de chacun n'ont d'ailleurs aucun facteur monôme commun, ne dépend que de celle du P. G. C. diviseur de pareils polynômes qui renfermeraient une lettre de moins. Or nous avons donné une méthode complète pour calculer le P. G. C. diviseur de deux polynômes d'une seule lettre, tels que tous les termes de chacun seraient premiers entre eux (14); donc on pourra trouver le P. G. C. diviseur de deux polynômes qui renfermeraient deux lettres, puis trois, puis quatre, et en général un nombre quelconque de lettres.

18. Règle générale. *Pour trouver le* P. G. C. *diviseur de deux polynômes* A *et* B, *cherchez le* P. G. C. *diviseur monôme* A_1 *de tous les termes de* A (7); *celui* B_1 *de tous les termes de* B: *puis le* P. G. C. *diviseur* d_1 *de* A_1 *et de* B_1. *Mettez* d_1 *de côté, et divisez* A *et* B *respectivement par* A_1 *et* B_1: *vous obtiendrez des quotients* A′ *et* B′ *que vous ordonnerez par rapport aux puis-*

sances d'une même lettre. Calculez le P. G. C. *diviseur* A_2 *des coefficients du polynôme* A', *celui* B_2 *des coefficients du polynôme* B', *et le* P. G. C. *diviseur* d_2 *de* A_2 *et de* B_2. *Mettez* d_2 *de côté, et divisez* A' *et* B' *respectivement par* A_2 *et* B_2, *ce qui vous donnera des quotients* A_3 *et* B_3 *dont tous les termes seront premiers entre eux. Cherchez enfin le* P. G. C. *diviseur* d_3 *de ces deux quotients, d'après la règle du n° 14, et il ne s'agira plus ensuite que de multiplier entre elles les trois quantités* d_1, d_2 *et* d_3. *Leur produit résoudra la question.*

19. Dans le cas où les deux polynômes A' et B' ne renfermeront que deux lettres x et y, et c'est ce cas qui se présentera le plus souvent, on pourra simplifier les calculs de la manière suivante. On les ordonnera par rapport à y, par exemple, et on cherchera le P. G. C. diviseur X des coefficients de cette lettre dans A'; puis on divisera A' par X. On ordonnera le quotient A'' par rapport à x, et on cherchera le P. G. C. diviseur Y des coefficients des différents termes de A''; on divisera A'' par Y, et en appelant A''' le quotient de cette division, on aura

$$A' = XYA'''.$$

On mettra de même le polynôme B' sous la forme

$$B' = X'Y'B''',$$

et en formant ensuite le produit des P. G. C. diviseurs des quantités X et X', Y et Y', A''' et B''', on obtiendra le P. G. C. diviseur de A' et de B', comme il est facile de le démontrer, à l'aide de raisonnements analogues à ceux qu'on a employés au n° 16.

L'avantage de cette méthode consiste à faire appliquer la règle du n° 14 à des polynômes de degré plus faible que ceux sur lesquels on devrait opérer d'après la règle du n° 18.

20. Il y a encore un cas particulier que l'on peut traiter plus simplement que par la *règle générale;* c'est celui où *l'un*

des deux polynômes, A′ *par exemple*, *renfermera une lettre* x *qui ne se trouvera pas dans l'autre* B′. *On ordonnera alors* A′ *par rapport à* x, *et le* P. G. C. *diviseur demandé sera celui même qui existera entre* B′ *et les coefficients de cette lettre* x. Il est évident en effet que B′ étant indépendant de x, le P. G. C. diviseur demandé ne peut contenir cette lettre, et divise en conséquence tous les coefficients de x dans le polynôme A′ (3), qui est de la forme

$$ax^{\alpha}+bx^{6}+cx^{\gamma}+\text{etc.}:$$

donc en cherchant le P.G.C. diviseur des quantités $B', a, b, c, \ldots$ on aura celui de A′ et de B′.

21. Dans la *théorie générale des équations*, on restreint la définition que nous avons donnée des quantités entières. *On y regarde comme entière toute quantité dans l'expression de laquelle les* inconnues *n'entrent dans aucun dénominateur, ni sous aucun radical, et pour qu'une quantité soit dite divisible par une autre, il suffit que leur division ne donne pas de reste et que le quotient soit entier par rapport aux inconnues, de même que les quantités proposées.* Ainsi $x^2+\frac{xy}{\sqrt{2}}-6y^2$, fonction entière de x et de y, est divisible par $\frac{2}{3}x-y\sqrt{2}$, parce que le reste de cette division est nul et que le quotient $\frac{3}{2}x+3y\sqrt{2}$, est aussi une fonction entière de x et de y.

En partant de ces définitions, on démontre facilement : 1° que *tout facteur du premier degré* αx + 6 *qui divise le produit de deux fonctions entières de* x, *divise nécessairement l'une d'elles ;* 2° qu'*une fonction entière de* x *n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs du premier degré par rapport à* x.

22. *On appelle* P. G. C. *diviseur de plusieurs fonctions*

entières de x *le produit de tous les facteurs du premier degré en* x *communs à ces fonctions.*

23. Si l'on applique à deux pareilles fonctions, les raisonnements du n° 11, on verra que *pour trouver leur* P. G. C. *diviseur, il faudra les soumettre à la méthode des divisions successives*, telle qu'on la pratique en arithmétique, *en arrêtant l'opération quand on sera parvenu à un reste indépendant de* x; *de telle sorte que si ce reste est nul, le dernier diviseur sera le* P. G. C. *diviseur demandé, et que s'il n'est pas nul, les fonctions proposées n'ont pas de diviseur commun en* x.

24. Remarquons qu'il ne sera pas *nécessaire* d'avoir recours aux modifications prescrites dans le n° 12, parce que la démonstration du principe fondamental (*le* P. G. C. *diviseur de deux fonctions entières de* x *est le même que celui qui existe entre le reste de leur division et celle qui a servi de diviseur*) n'exige pas que le quotient Q soit entier par rapport aux coefficients de x; il suffit qu'il le soit par rapport à cette lettre. Toutefois il sera plus simple de réduire tous les termes des deux fonctions proposées au même dénominateur, de chercher ensuite le P. G. C. diviseur des deux numérateurs, d'après la règle du n° 18, et enfin de diviser le P. G. C. diviseur trouvé par le dénominateur commun, parce qu'en le supprimant dans les fonctions proposées, on les a multipliées par ce dénominateur. Dans la plupart des applications, il sera inutile de tenir compte de ce dénominateur.

(*Extrait d'un ouvrage inédit.*)

EXAMENS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*).

Paris, 1845.

Compositions de Mathématiques.

Les candidats ont été, pour les compositions, partagés en huit séries ayant chacune une composition différente.

1re *série.*

Lieu des foyers des hyperboles ayant un sommet commun et une asymptote commune.

Théorie de la division.

2e *série.*

YOX est un angle droit, A est un point de OX, B un point de OY; on mène les droites AM, BM telles que l'angle $MBY = 2 . MAX$; on demande le lieu du point M.

Construction des tables de logarithmes, et théorie des logarithmes.

3e *série.*

YOX est un angle quelconque, A un point fixe de son plan; de ce point on mène une suite de droites qui coupent les côtés de l'angle en B et C; on prend sur chaque sécante un point M tel que $BM : MC :: m : n$, et on demande le lieu de ce point M.

Règle des signes de Descartes; peut-elle, dans certains cas, servir à trouver numériquement toutes les racines d'une équation?

(*) Communiqué par M. le professeur Anne. On insérera les solutions.

4e série.

Mener un plan qui coupe une sphère en deux parties dont l'une soit double de l'autre.

D'un point M de la circonférence d'une ellipse on mène deux cordes MF'Q, MFP passant par les deux foyers; démontrer que la somme $\frac{MF}{FP}+\frac{MF'}{F'Q}$ est constante.

5e série.

Construire la courbe $\rho=\frac{1-\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$.

Discuter et généraliser les formules donnant les valeurs de $\sin(a\pm b)$ et de $\cos(a\pm b)$.

6e série.

D'un point B, pris sur le côté OX d'un angle YOX donné et quelconque, on mène une tangente aux cercles inscrits dans cet angle; on demande le lieu des points de contact de ces tangentes.

Développer les moyens de déterminer la valeur numérique de π.

7e série.

Des extrémités M, M' d'une corde MFM' passant par le foyer d'une parabole, on abaisse les perpendiculaires MP, M'P' sur une droite fixe située dans le plan de la parabole; démontrer que la somme $\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F'}$ est constante.

Développer la théorie de l'homogénéité en géométrie, en physique et en mécanique.

8e série.

Trouver le lieu des milieux des cordes égales d'une ellipse donnée.

Démontrer que a^x, $\log(x)$, $\sqrt[m]{f(x)}$ sont des fonctions continues de x, $f(x)$ étant une fonction algébrique de x.

Lyon 1845.

Construire la courbe $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Expliquer les principes de la transformation des équations.

La Flèche 1845.

A une suite d'ellipses ayant leurs foyers communs F, F', on mène des tangentes parallèles à une droite donnée ; trouver le lieu des points de contact.

Établir les six équations d'équilibre d'un corps solide libre dans l'espace.

QUESTION D'ANALYSE

proposée au concours d'agrégation de l'année 1845.

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Licencié ès-sciences physiques et mathématiques, agrégé.

—

Déterminer sur la surface d'un cône droit la courbe qui coupe les génératrices sous un angle constant, et qui passe par deux points donnés de cette surface. Calculer la longueur d'un arc de cette courbe et la portion de surface conique comprise entre cet arc et les génératrices qui passent par ses extrémités. Trouver le plan osculateur, le rayon et le centre de courbure pour un point quelconque de la courbe, et le lieu des centres de courbure. Chercher ce que devient la courbe quand on développe la surface sur un plan.

Prenons pour origine le sommet du cône, son axe pour

celui des z et nommons α l'angle constant que fait la génératrice avec l'axe. Le cône aura pour équation

$$z^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = x^2 + y^2.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, elles devront satisfaire à l'équation

$$\text{(A)} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dy}{ds} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dz}{ds} = m,$$

qui exprime que la tangente en ce point fait avec la génératrice qui la rencontre un angle dont le cosinus est m ; et d'après la condition donnée, m est une constante.

L'équation du cône donne par la différentiation

$$zdz \operatorname{tang}^2 \alpha = xdx + ydy ;$$

d'où l'équation (A) donne en ayant égard à celle du cône,

$$\text{(B)} \quad \frac{dz}{ds} = m \cos \alpha ,$$

$$\text{(C)} \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m \sin \alpha ds.$$

Or, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et à cause de (B),

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 (1 - m^2 \cos^2 \alpha).$$

Mais $dx^2 + dy^2 = d\sigma^2$, σ étant l'arc de la projection sur le plan xy, donc $d\sigma = \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha} . ds$, et $\sigma = \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha} . s$, σ et s commençant ensemble. L'équation (C) donnera donc

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha}} d\sigma ,$$

et en faisant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, on obtient

$dr = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha}} d\sigma$, d'où $r = Ce^{N\theta}$, N étant $\frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2}}$ et C une constante.

La courbe demandée a donc pour projection sur le plan xy une spirale logarithmique qu'on peut représenter par l'équation

$$L.\sqrt{x^2+y^2} = L.C + N \text{ arc tang } \frac{y}{x}.$$

Cette équation jointe à celle du cône détermine complétement la courbe. La constante C se calcule par la condition que la courbe passe par deux points donnés. Si a, b, et a', b', sont les coordonnées de ces points par rapport aux axes des x et des y, et que n soit le nombre des spires aussi donné que la courbe doit faire pour passer du premier point au second, on aura pour déterminer C et N et par suite m, les deux équations

$$L\sqrt{a^2+b^2} = LC + N \text{ arc tang } \frac{b}{a},$$

$$L\sqrt{a'^2+b'^2} = LC + N\left(2n\pi + \text{arc tang } \frac{b'}{a'}\right).$$

Si les deux points sont sur un plan parallèle à celui de la base du cône, on aura $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a'^2+b'^2}$ puisque les ordonnées en z seront les mêmes et par suite

$$N\left[\text{arc tang } \frac{b}{a} - 2n\pi - \text{arc tang } \frac{b'}{a'}\right] = 0,$$

d'où $N=0$ et par suite $m=0$. La courbe cherchée coupera les génératrices à angle droit, et comme alors $\frac{dz}{ds} = 0$, on voit que c'est une circonférence dont le plan est parallèle à la base du cône.

Si les deux points sont donnés sur une même génératrice, ou sur deux génératrices faisant entre elles l'angle 2α, on a $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, ce qui donne $L\sqrt{a^2+b^2} = L\sqrt{a'^2+b'^2} - 2n\pi N$, équation qui déterminera N d'après la valeur donnée à n. Si $n=0$, comme $\sqrt{a^2+b^2}$ diffère de $\sqrt{a'^2+b'^2}$, il faut que $N=\infty$

d'où $m=1$: la courbe se confond alors avec la génératrice.

L'équation déjà obtenue $\sigma=s\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}$ indique que le rapport entre une portion quelconque de la courbe et sa projection est constant, de sorte qu'il suffit de calculer un arc de la spirale logarithmique pour avoir celui de la spirale conique qui lui correspond.

De l'équation $dr=\frac{m\sin\alpha}{\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}d\sigma$, on tire

$$\frac{m\sin\alpha}{\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}\sigma=r+\mathrm{A}\,;$$

A étant une constante qui se déterminera en mettant pour r la valeur du rayon vecteur qui correspond au point où l'arc commence sur la spirale logarithmique, et on aura

$$m\sin\alpha s=\mathrm{A}+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Comme le plan tangent au cône fait toujours le même angle α avec l'axe des z, il y aura toujours le même rapport entre l'aire d'un élément de surface conique comprise entre deux génératrices et l'arc de la courbe, et la projection de cet élément sur le plan xy : il suffira donc de calculer un secteur de la projection, et de le diviser par $\sin\alpha$ pour avoir celui de la surface conique dont il est la projection.

On trouve ainsi pour ce secteur conique :

$$\frac{1}{4\mathrm{N}}\ \frac{r^2}{\sin\alpha}+\mathrm{B},\ \text{ou bien}\ \frac{1}{4\mathrm{N}}\ \frac{x^2+y^2}{\sin\alpha}+\mathrm{B},$$

B se déterminant par la condition que l'aire commence en un point donné.

Pour avoir le plan osculateur, il faut calculer dx, d^2x, dy, d^2y : on sait déjà que $dz=m\cos\alpha ds$, et que $d^2z=0$, en prenant s pour variable indépendante.

Or $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, d'où on tire en observant

que $dr = m \sin \alpha \, ds$, et $dr = \mathrm{N} r \, d\theta$, d'où $d\theta = \frac{m \sin \alpha}{\mathrm{N} r} ds$,

$$dx = (\mathrm{N} \cos\theta - \sin\theta) \frac{m \sin\alpha}{\mathrm{N}} ds, \quad dy = (\mathrm{N} \sin\theta + \cos\theta) \frac{m \sin\alpha}{\mathrm{N}} ds,$$

$$d^2 x = -(\mathrm{N} \sin\theta + \cos\theta) \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{\mathrm{N}^2 z} ds^2, \quad d^2 y = (\mathrm{N} \cos\theta - \sin\theta) \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{\mathrm{N}^2 z} ds^2.$$

Le plan osculateur a pour équation, en remplaçant $\cos\theta$ par $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et $\sin\theta$ par $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$(z - z') \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tang} \alpha \frac{\mathrm{N}^2 + 1}{\mathrm{N}} = (x - x')(\mathrm{N} x - y) + (y - y')(\mathrm{N} y + x).$$

Ce plan fait avec celui des xy un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{N}^2}{(\mathrm{N}^2 + 1) \operatorname{tang}^2 \alpha}}} = \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha}$. Il est donc toujours incliné d'une même quantité sur le plan de la base du cône, et son inclinaison est la même que celle de la tangente à la spirale conique. Le plan normal aura pour équation :

$$(x - x')(\mathrm{N} x - y) + (y - y')(\mathrm{N} y + x) +$$
$$+ (z - z') \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\mathrm{N}}{\operatorname{tang} \alpha} = 0.$$

Le cosinus de l'angle qu'il fait avec la base est $m \cos \alpha$, valeur trouvée pour $\frac{dz}{ds}$, ce qui doit être.

Il suit de là que si, par un point de l'espace, on mène des plans parallèles aux plans osculateurs, chacun d'eux sera tangent à un même cône droit, qui sera leur enveloppe, et dont l'axe sera parallèle à celui du cône donné. Il en sera de même pour des plans parallèles aux plans normaux.

En désignant par ρ le rayon de courbure, on a généralement :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

d'où ici

$$\rho = \frac{N^2 r}{m^2 \sin^2\alpha \sqrt{N^2+1}} = \frac{r}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}.$$

Ce rayon de courbure est, comme on voit, dans un rapport constant avec le rayon vecteur de la spirale logarithmique mené à la projection du point qu'on considère sur la spirale conique. De plus, ce rayon de courbure est toujours parallèle à la base du cône, puisque le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'axe des z est proportionnel à $\frac{d^2z}{ds^2}$, quantité nulle. Il est donc projeté en vraie grandeur sur le plan xy, et suivant la direction du rayon de courbure de la spirale logarithmique, avec lequel il coïncidera en partie ; et lui sera proportionnel, car ρ' étant ce dernier, on a $\rho' = r\sqrt{1+N^2}$,

d'où $$\rho = \frac{N^2\rho'}{m^2\sin^2\alpha(1+N^2)} = \frac{\rho'}{1-m^2\cos^2\alpha}.$$

On voit de plus que ρ surpasse ρ' de $\frac{\rho' m^2\cos^2\alpha}{1-m^2\cos^2\alpha}$.

Il suit de ce qui précède que r' étant le rayon vecteur de la projection du centre de courbure pour le point de la spirale conique auquel se rapportent r et θ, on aura :

$$r' = r\sqrt{1 + \frac{1}{(1-m^2)(1-m^2\cos^2\alpha)} - \frac{2\cos\omega}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}}.$$

ω étant l'angle que fait ρ avec r, et qui a pour tangente la constante N. Donc $r' = Mr = Ke^{N\theta}$, M et K étant constants.

Le lieu des centres de courbure est projeté, comme on voit, suivant une spirale logarithmique.

Comme le centre de courbure a la même ordonnée en z

que le point de la courbe qu'on considère, en nommant x', y' ses deux autres coordonnées, et remplaçant dans l'équation du cône $\sqrt{x^2+y^2}$ par $\frac{1}{M}\sqrt{x'^2+y'^2}$, on trouvera :

$$zM \tang\alpha = \sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Ce sera la seconde équation du lieu des centres ; ce lieu est donc une spirale conique analogue à la première, tracée sur un cône dont l'angle a pour tangente $M \tang\alpha$.

Quand on développera le cône sur un plan, comme on a trouvé $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=ms$, on aura sur ce plan $R=ms$, d'où $R=C'e^{\frac{m\theta}{\sqrt{1-m^2}}}$ pour l'équation de la courbe : c'est encore une spirale logarithmique. Enfin la développante de la courbe cherchée est plane, et c'est encore une autre spirale logarithmique située sur un plan parallèle à celui de la base du cône.

NOTE

sur l'équation aux quotients des racines.

—

I. Soient a_1, a_2, a_3 .... a_m les m racines d'une équation du degré m. Désignons par S les sommes des puissances des racines, relatives à cette équation ; et par s les sommes analogues pour les racines de l'équation aux quotients ; on a évidemment :

$$s_p = \frac{S_p}{a_1^p} + \frac{S_p}{a_2^p} + \ldots\ldots \frac{S_p}{a_m^p} - m\,;$$

d'où l'on tire :

$$s_p = S_p S_{-p} - m. \qquad (1)$$

Coroll. 1. Faisant $p=0$, on a $s_0 = m^2 - m = m(m-1)$; en effet, l'équation aux quotients est du degré $m(m-1)$.

Coroll. 2. $s_{-p} = S_{-p}S_p - m$, donc $s_{-p} = s_p$; ce qui doit être, puisque l'équation aux quotients est une équation réciproque; elle peut donc se ramener à une équation du degré $\frac{m(m-1)}{1.2}$. Il suffit de calculer $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_{\frac{m(m-1)}{1.2}}$; au moyen de ces valeurs, on trouvera, par les formules connues, les coefficients de l'équation aux quotients.

Coroll: 3. Si tous les coefficients de l'équation sont des nombres entiers, et si les coefficients du premier terme, ainsi que le terme tout connu, sont chacun égal à l'unité, alors S_p et S_{-p} sont des nombres entiers. Par conséquent, s_p est aussi un nombre entier; et les racines ne sauraient être commensurables, à moins d'être égales à l'unité.

Coroll. 4. Si l'équation donnée est réciproque, on a $S_p = S_{-p}$; donc, dans ce cas, $s_p = S_p^2 - m$.

II. Soit une seconde équation quelconque en y du degré n; faisons $z = xy$, et éliminant x et y entre les trois équations, il vient une équation en z du degré mn, ayant pour racines les produits qu'on obtient, en multipliant chacune des m racines de la première équation en x, par chacun des n racines de l'équation en y; si on prend pour équation en y la réciproque de l'équation donnée, alors l'équation en z du degré m^2 renferme les racines de l'équation aux quotients et en outre m racines égales à l'unité; divisant donc le polynôme en z par $(z-1)^m$, on obtient encore l'équation aux quotients.

III. Si l'équation donnée a p racines égales, l'équation aux quotients aura $p(p-1)$ racines égales à l'unité. Donc cette équation peut faire découvrir le nombre des racines égales.

IV. 1[er] exemple :

$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0$,

$A_0A_2x^2 + (2A_0A_2 - A_1^2)x + A_0A_2 = 0$. Éq. aux quotients.

ou bien :

$A_0A_2(x+1)^2 = A_1^2x$.

2[e] exemple :

$x^3 + A_2x + A_3 = 0$,

(a_1, a_2, a_3).

L'équation aux quotients étant réciproque, se réduit à une équation du troisième degré ; représentons par z l'inconnue de cette dernière équation, nous aurons :

$$z = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2a_1}\right)^2 - 2 = \frac{a_3^2}{a_2a_1} - 2 ;$$

faisant $z + 2 = u$, les trois racines seront :

$$\frac{a_1^2}{a_2a_3}, \quad \frac{a_2^2}{a_1a_3}, \quad \frac{a_3^2}{a_1a_2},$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{-a_1^3}{A_3}, \quad \frac{-a_2^3}{A_3}, \quad \frac{-a_3^3}{A_3} ;$$

donc, faisant $A_3u = -\nu$, les racines de l'équation en ν sont les cubes des racines de l'équation donnée ; on trouve facilement :

$\nu^3 + 3A_3\nu^2 + (A_2^3 + 3A_3)\nu + A_3^3 = 0$ ou $(\nu + A_3)^3 + A_2^3\nu = 0$.

Remplaçant ν par $-A_3(z+2)$, on obtient,

$$A_3^2(1-z)^3 + A_2^3(z+2) = 0.$$ Tm.

QUESTION D'EXAMEN

sur les racines des équations.

—

Problème. Trouver l'équation aux moyennes géométriques des racines de l'équation $x^4 + 2 = 0$.

Solution. Soient x', x'' deux racines de l'équation, et faisons $y = x'x''$; on a $x'^4 + 2 = 0$; $x''^4 + 2 = 0$. Éliminons x' et x''; il vient $x' = \frac{y}{x''}$; $y^4 + 2x''^4 = 0$. Il faut remplacer x'' par ses quatre valeurs; donc l'équation est $(y^4 - 4)^4 = 0$. Il en faut ôter les valeurs de y qui répondent à $x' = x''$, c'est-à-dire, l'équation aux carrés des racines de la proposée. Cette équation est $(y^2 + 2)^2$; donc l'équation cherchée est :

$$\frac{(y^4 - 4)^4}{(y^2 + 2)^2} = (y^2 - 2)^4 (y^2 + 2)^2,$$

ou simplement :

$$(y^2 - 2)^2 (y^2 + 2) = 0.$$

Telle est l'équation aux produits des racines prises deux à deux; faisant $y = z^2$, il vient $(z^4 - 2)^2 (z^4 + 2) = 0$. C'est l'équation cherchée.

Vérification. Les quatre racines sont :

$$x = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1})\right] = a,$$

$$x = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - \sqrt{-1})\right] = b,$$

$$x = \sqrt[4]{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1})\right] = c,$$

$$x = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - \sqrt{-1})\right] = d.$$

$$ab = \sqrt{2};\quad ac = -\sqrt{-2};\quad ad = -\sqrt{2};$$

$$bc = -\sqrt{2};\quad bd = \sqrt{-2};\quad cd = \sqrt{2};$$

d'où

$$(y - \sqrt{2})^2 (y + \sqrt{+2})^2 (y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2}) = (y^2 - 2)^2 (y^2 + 2) = 0$$

comme ci-dessus.

Autrement. On a :

$$y^4 - 4 = 0;\quad \text{d'où}\quad y = \pm\sqrt{2}.$$

Soient x', x'', x''', x^{IV} les quatre racines ; donc $x'x''x'''x^{\text{IV}}=2$. mais $x'x''=\sqrt{2}$; donc $x'''x^{\text{IV}}=\sqrt{2}$; il y a donc deux racines égales à $\sqrt{2}$, deux racines égales à $-\sqrt{2}$; l'équation complète est :

$$(y^4-4)(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=(y^4-4)(y^2-2)=(y^2+2)(y^2-2)^2.$$

SOLUTION DU PROBLÈME 82 (t. III, p. 40).

PAR M. GILAIN,
à Bruxelles.

Soit l'équation :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1. \qquad (a)$$

Si j'avais considéré cette équation en elle-même, c'est-à-dire, si je n'avais eu égard qu'aux résultats auxquels elle peut nous conduire, je ne me serais certes pas attaché à la discuter. Mais je me suis convaincu qu'elle signale une erreur de théorie, que je vais tâcher d'examiner aussi succinctement que possible.

On démontre facilement que l'équation (a) n'a pas de racines réelles ; je vais prouver qu'elle n'en peut avoir d'imaginaires. A cette fin, je pars de ce prémisse évident, qu'une quantité réelle ne peut être égale à une quantité imaginaire. Par conséquent, pour que des valeurs imaginaires, substituées à la place de x dans l'équation proposée, puissent la satisfaire, il faut que l'imaginarité introduite par cette substitution disparaisse dans le premier membre ; en d'autres termes, il faut que les quantités imaginaires se détruisent mutuellement. D'où l'on conclut nécessairement qu'il faut,

pour que des racines imaginaires puissent satisfaire l'équation (a) : 1° que la partie imaginaire de ces racines sorte des radicaux sous lesquels elle se trouve engagée ; 2° que la partie imaginaire du premier radical soit égale et de signe contraire à celle du second. Or, pour que les quantités imaginaires se dégagent des radicaux, il faut qu'elles entrent dans la composition de carrés, dont la somme générale sera, en ayant égard à la seconde condition :

$$\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\gamma-\beta\sqrt{-1}\right)^2. \qquad (b)$$

Reste à déterminer les valeurs des quantités α, β et γ qui satisferont à l'équation (a). Pour que celle-ci puisse avoir des racines imaginaires, on doit trouver des valeurs *réelles* pour chacune de ces quantités. Or, en mettant les carrés (b) à la place des expressions ($1+x$) et ($1-x$) dans l'équation proposée, elle devient :

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^2}+\sqrt{\left(\gamma-\beta\sqrt{-1}\right)^2}=\alpha+\beta\sqrt{-1}+ \\ \qquad +\gamma-\beta\sqrt{-1}=\alpha+\gamma=1.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Par conséquent,

$$1+x=\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^2=\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2,$$
$$1-x=\left(\gamma-\beta\sqrt{-1}\right)^2=\gamma^2-2\gamma\beta\sqrt{-1}-\beta^2;$$

d'où

$$x=\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2-1,$$
$$x=1-\gamma^2+2\gamma\beta\sqrt{-1}+\beta^2;$$

et puisque x a la même valeur dans les deux expressions, il vient :

$$\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{-1}-\beta^2-1=1-\gamma^2+2\gamma\beta\sqrt{-1}+\beta^2,$$

dont on déduit les deux égalités :

$$2\alpha\beta\sqrt{-1}=2\gamma\beta\sqrt{-1}, \quad \text{d'où} \quad \alpha=\gamma,$$
$$\alpha^2-\beta^2-1=1-\gamma^2+\beta^2 \qquad (2)$$

Mais, d'après (1), $\alpha+\gamma=1$, par conséquent, $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$. Substituant ces valeurs dans (2), on trouve :

$$\frac{1}{4}-\beta^2-1=1-\frac{1}{4}+\beta^2;$$

d'où l'on tire :

$$\beta=\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}.$$

On arrive donc à des valeurs imaginaires pour β. Ce qui nous prouve que l'équation ne peut avoir de racines imaginaires ; d'un autre côté, on démontre qu'elle n'en a pas de réelles ; nous devons donc en conclure que l'équation (*a*) n'a pas de racines.

Cette conclusion pourrait étonner certains esprits, car on croit généralement que toute équation algébrique a au moins une racine sinon réelle, du moins imaginaire. C'est là une erreur qu'il importe de déraciner (*).

Une quantité imaginaire, quoique n'ayant aucune traduction dans le monde réel, n'en a pas moins de la réalité, si je puis m'exprimer ainsi, en mathématiques. Un résultat imaginaire dénote toujours une absurdité dans l'énoncé du problème ; mais il n'indique pas une absurdité dans l'équation qui en est la traduction mathématique. Ainsi les racines

$$x=\pm\sqrt{-a}$$

satisfont à l'équation :

$$x^2=a,$$

parce que, dans cette substitution, on défait l'opération qui a conduit à l'impossibilité, qui a fait donner le nom d'imaginaires à ces quantités. On doit donc bien distinguer une absurdité mathématique, d'une absurdité hypothétique dans l'énoncé d'un problème. C'est ainsi que

$$x^2=-a$$

(*) C'est plutôt cette conclusion qui est une erreur à déraciner. Nous y reviendrons. Tm.

n'indique qu'une absurdité d'hypothèse, tandis que

$$+\sqrt{x} = -a$$

marque en outre une absurdité mathématique ; puisque aucune valeur algébrique substituée à la place de x dans cette équation ne peut la satisfaire. C'est précisément parce que le calcul ne peut conduire à aucun résultat dans un cas semblable, que l'on peut avoir confiance pleine et entière dans ceux auxquels il nous conduit. Si, au contraire, le calcul pouvait donner la solution d'une absurdité manifeste, on ne pourrait plus accorder aucun crédit aux résultats auxquels on arriverait par cet intermédiaire. Le calcul ne peut donc pas assigner des racines à l'équation (a), puisqu'elle est une absurdité mathématique. Ceci résulte de ce que les conséquences ne peuvent jamais détruire les principes sur lesquels elles reposent, aussi longtemps que l'on se conforme rigoureusement à ces principes. A moins, toutefois, que ceux-ci ne soient faux eux-mêmes, ce qu'il est toujours facile de vérifier *à priori*.

Le signe $\sqrt{\ }$ marquant une opération inverse, il faudra toujours passer par l'opération mère, pour arriver aux racines d'une équation dans laquelle l'inconnue sera engagée sous ce signe. Mais une équation d'un degré quelconque ne jouit pas de toutes les propriétés de l'équation d'un degré supérieur qui en est une conséquence. On doit donc toujours bien s'assurer, quand on déduit celle-ci de celle-là, quelles sont les propriétés de la seconde qui conviennent aussi à la première. Pour rendre ceci plus clair, donnons un exemple. Soit l'équation :

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 ;$$

on en déduit :

$$x^2 = \frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Or la seconde équation est également satisfaite par les deux valeurs $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$, tandis que la première n'admet que la première de ces racines, $x = +\sqrt{\frac{3}{4}}$. La seconde valeur de x appartient à une autre équation,

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = 1,$$

dont (3) est aussi une conséquence.

Ainsi, je le répète, ce qui est vrai d'une équation ne l'est pas toujours de l'équation d'un degré inférieur qui en est une conséquence. D'un autre côté, toutes les propriétés de l'équation inférieure, étant renfermées dans celle d'un degré supérieur, la première ne peut jouir de propriétés dont ne jouisse pas la seconde. C'est pourquoi l'équation (3), n'admettant pas de racines imaginaires, l'équation (a), dont on peut la déduire, n'en admet pas non plus.

Quelques mathématiciens pensent, peut-être, qu'il pourrait exister des valeurs symboliques autres que les imaginaires ordinaires, satisfaisant les équations telles que $+\sqrt{x} = -a$. Mais une pareille opinion est complétement chimérique ; car un symbole n'a de valeur que pour autant qu'il indique une opération connue. Or, pour que l'équation $+\sqrt{x} = -a$, par exemple, puisse être satisfaite par une valeur de x, cette quantité doit être telle qu'en lui faisant subir l'opération inverse de l'élévation au carré, on arrive à la quantité $-a$; condition qu'il est impossible de remplir aussi longtemps que l'on astreindra le radical à rester positif ; car la solution $x = (-a)^2 = a^2$ s'applique à l'équation $-\sqrt{x} = -a$.

Note. Toute cette discussion roule sur un *mal-entendu*. Le signe *plus* représente une *addition*, mais pas toujours une *augmentation*. En algèbre, ces deux mots ne sont pas synonymes ; de même que la *soustraction algébrique* n'est pas sy-

nonyme à *diminution*. Ainsi, lorsque le terme $+x$ se rencontre dans une équation, on ne sait pas d'avance si ce $+x$ produira une augmentation ou une diminution, selon que x est positif ou négatif; mais si vous mettez impérativement la condition que ce terme produise une augmentation, la question peut devenir impossible, sans que cette impossibilité soit représentée par un symbole imaginaire.

Soit, par exemple. l'équation $2+x=1$; l'algèbre répond $x=-1$. En effet, $2+(-1)=1$; mais si vous tenez à ce que x soit positif, à ce que $+x$ produise une augmentation, il y a impossibilité logique; 2 ne peut augmenter de manière à devenir 1; il en est de même dans l'équation proposée $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$; l'algèbre répond $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Si l'on exige que $+\sqrt{1-x}$ soit une augmentation, la question est impossible; mais si on laisse le sens algébrique, la question est possible; car elle répond à celle-ci: $2+2\sqrt{1-x^2}=1$; et $2+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, solution réelle. Ainsi toute équation a une racine réelle ou imaginaire. Mais si on y ajoute une condition de plus, en dehors de l'équation, alors elle peut n'avoir aucune solution possible. L'équation $ax=b$ a toujours une racine; mais si vous ajoutez que cette racine doit être un nombre entier, elle peut devenir impossible; l'imaginarité annonce une impossibilité; mais la réciproque est fausse. Toute impossibilité ne se résout pas par des imaginaires. Trouver deux nombres impairs dont la somme soit impaire est une impossibilité qu'on ne peut représenter par le symbole imaginaire. On peut dire, en général, que toutes les fois qu'une quantité susceptible d'un maximum, positif ou négatif, est égalée à une quantité qui surpasse ce maximum, l'analyse indique l'impossibilité par le symbole imaginaire qui ne répond qu'à ce genre d'impossibilité et pas à d'autres.

Tm.

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(V. p. 2.)

LXI. *Théorème de Carnot sur les segments.*

THÉORÈME. Soit une ligne de degré m et un polygone de n côtés tracés dans le même plan ; A_1, A_2, A_3..., A_n désignant les sommets *consécutifs* du polygone. Considérant successivement A_1, A_2....A_n comme des points fixes, les sécantes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4....A_nA_1 formeront chacune m segments, et en tout mn segments ; relativement aux points fixes A_n, A_{n-1}, A_{n-2}.... A_1, les sécantes A_nA_{n-1}, $A_{n-1}A_{n-2}$, $A_{n-2}A_{n-3}$.... A_2A_1, forment mn autres segments ; le produit des mn premiers segments est égal au produit des mn seconds segments.

DÉMONSTRATION. Par un point quelconque O pris dans le plan de la ligne, menons n parallèles aux côtés A_1A_2, A_2A_3.... A_nA_1 du polygone. Ces parallèles formeront chacune m segments, comptés du point O ; désignons par (1) le produit des segments formés par la parallèle à A_1A_2 ou A_2A_1 ; par (2) le produit des segments formés par la parallèle à A_2A_3 ou A_3A_2 et ainsi de suite ; représentons de même par 1,2 le produit des segments formés par la sécante A_1A_2, comptés du point A_1 et par 2,1 le produit des segments formés par la même sécante, mais comptés à partir de A_2 et ainsi des autres.

Le théorème de Newton donne (t. III, p. 510) :

$$\frac{1,2}{1,n}=\frac{(1)}{(n)};\quad \frac{2,3}{2,1}=\frac{(2)}{(1)};\quad \frac{3,4}{3,2}=\frac{(3)}{(2)}\ \cdots\ \frac{n,1}{n,n-1}=\frac{(n)}{(n-1)};$$

multipliant ces équations ensemble, membre en membre, on obtient

$$1,2\times2,3\times3,4\times\ldots n,1=1,n\times1,1\times3,2\times\ldots n,n-1$$ C.Q.F.D.

Observation. Carnot énonce cette propriété seulement pour le triangle (*Géom. de position*, p. 289), mais il est évident que sa démonstration est applicable à un polygone quelconque; et l'on voit que ce théorème général est un corollaire immédiat du théorème de Newton. Les segments doivent toujours être pris dans les sens *analytique* (t. III, p. 512, *observ.* 1).

LXVII. Lemme. Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$; (1) l'équation d'une conique passant par quatre points dont les coordonnées sont connues; substituant dans cette équation successivement les valeurs données des coordonnées, on obtient quatre équations du premier degré; d'où l'on tire

$$\frac{B}{A}=Fp+q\,;\ \frac{C}{A}=Fp'+q'\,;\ \frac{D}{A}=Fp''+q''\,;\ \frac{E}{A}=Fp'''+q'''\,;$$

$p,q,p',q'\ldots$ sont des fonctions algébriques connues des coordonnées des quatre points; ainsi l'équation (1) prend cette forme $\varphi(x,y)+F\psi(x,y)=0$ (1), φ et ψ sont des fonctions du second degré à coefficients connus; soient encore deux autres coniques passant par les quatre mêmes points; elles auront pour équation

$$\varphi(x,y)+F'\psi(x,y)=0\,;\ (2)\ \text{et}\ \varphi(x,y)+F''\psi(x,y)=0\,;\ (3)$$

on peut toujours trouver deux nombres λ et λ' tels que $F''=\lambda F+\lambda'F'$; $\lambda+\lambda'=1$; donc $(3)=\lambda(1)+\lambda'(2)=0$, ou bien $(1)+\mu(2)=(3)$, telle est la relation qui existe entre les trois équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

LXVIII. *Involution de Desargues.*

Soient

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\,;$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0\,;$$
$$A''y^2+B''xy+C''x^2+D''y+E''x+F''=0\,;$$

les équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

On a donc, d'après le lemme précédent :

$$A'' = A + \mu A'; \quad B'' = B + \mu B'; \quad C'' = C + \mu C', \text{ etc.},$$

faisant $y = 0$ dans les trois équations, il vient :

$$Cx^2 + Ex + F = C(x - r)(x - s);$$
$$C'x^2 + E'x + F' = C'(x - r')(x - s');$$
$$C''x^2 + E''x + F'' = C''(x - r'')(x - s'');$$

d'où

$$Cr''^2 + Er'' + F + \mu(C'r''^2 + E'r'' + F') = 0,$$
$$Cs''^2 + Es'' + F + \mu(C's''^2 + E's'' + F') = 0,$$

éliminant μ et considérant que $Cr''^2 + Er'' + E = C(r'' - r)(r'' - s)$ et ainsi des autres trinômes, il vient

$$\frac{(r'' - r)(r'' - s)}{(s'' - r)(s'' - s)} = \frac{(r'' - r')(r'' - s')}{(s'' - r')(s'' - s')} \quad (1).$$

Soient A,A′ les points d'intersection de la première conique avec l'axe des x ; B,B′ de la seconde conique ; C,C′ ceux de la troisième conique avec le même axe. L'équation (1) interprétée géométriquement donne

$$CA . CA' . C'B . C'B' = CB . CB' . C'A . C'A' \quad (2);$$

désignons A et A′, B et B′, C et C′ sous les noms de premier, deuxième et troisième groupe de *points conjugués*. Alors l'équation (2) peut s'énoncer ainsi : le produit des distances de C aux points du premier groupe, par le produit des distances de C′ aux points du deuxième groupe, est égal au produit des distances de C aux points du deuxième groupe par le produit des distances de C′ aux points du premier groupe. Il est évident qu'on peut les grouper dans tel ordre qu'on veut ; on a donc encore ces deux équations :

$$BA . BA' . B'C . B'C' = BC . BC' . B'A . B'A' \quad (2),$$
$$AB . AB' . A'C . A'C' = A'B . A'B' . AC . AC' \quad (3);$$

l'une de ces équations entre six points en enveloppe deux autres ; c'est ce qui a porté Desargues à dire que ces points sont *en involution*, et de là, le théorème suivant qui porte le nom de son inventeur :

Théorème de Desargues. Lorsque trois coniques passent par les quatre mêmes points, une sécante les coupe en six points qui sont *en involution*.

Observation I. Le théorème subsiste même lorsque des points deviennent imaginaires, et pourvu que l'on ait la relation :

$$(3) = (1) + \mu\,(2).$$

Observation II. En multipliant les équations (1), (2), (3), deux à deux, on en déduit ces quatre équations :

$$AB'\,.\,BC'\,.\,CA' = AC'\,.\,CB'\,.\,BA' \; (4),$$
$$AB'\,.\,BC\,.\,C'A' = AC\,.\,C'B'\,.\,BA' \; (5),$$
$$AB\,.\,B'C'\,.\,CA' = AC'\,.\,CB\,.\,B'A' \; (6),$$
$$AB\,.\,B'C\,.\,C'A' = AC\,.\,C'B\,.\,B'A' \; (7),$$

qui expriment des relations entre trois segments.

Observation III. Si la sécante devient tangente à l'une des courbes, par exemple à la première conique : alors

$$CA = CA',\; C'A = C'A',\; AB = A'B,\; AB' = A'B' ;$$

on obtient les sept équations relatives à l'involution des cinq points A,B,B',C,C'; le point A est dit *double*.

Observation IV. Si C' est à l'infini, l'équation (1) se réduit à

$$CA\,.\,CA' = CB\,.\,CB'.$$

Alors le produit des distances du point C aux points du groupe A,A' est égal au produit des distances du même point C aux points du groupe B,B'.

Observation V. On a l'identité :

$$C(x-r)(x-s) + \mu C'(x-r')(x-s') = C''(x-r'')(x-s'') ;$$

donc

$$Crs + \mu C'r's' = C''r''s'' = (C + \mu C')r''s'';$$

si l'origine O est telle que l'on ait $rs = r's'$, on aura aussi $rs = r''s''$; c'est ce point O que M. Chasles désigne sous le nom de *point central* des trois groupes en *involution*, et lorsqu'il existe un tel point, les six points sont en involution. (*Histoire des méthodes*, p. 312.)

Observation VI. Si le point O est tel que l'on ait $r+s = r'+s'$, on aura aussi $r+s = r''+s''$.

Observation VII. Il est facile d'étendre le théorème d'involution à trois lignes quelconques, passant par m points et déterminées complétement par m^2+1 points. On a $\frac{m(m-1)}{2}$ systèmes d'involution de $3m$ points.

Tm.

PROPRIÉTÉ DU QUADRILATÈRE

situé dans le plan d'une conique.

—

I. *Définition.* Un triangle étant situé dans le plan d'une conique, les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant respectivement par les sommets opposés, se rencontrent en un même point (*Voir* p. 432). Dans ce qui suit, nous désignons ce point sous le nom de *point de rencontre.*

II. Théorème. Un quadrilatère étant tracé dans le plan d'une conique, si on prolonge suffisamment les côtés opposés, on obtient quatre triangles. Dans chaque triangle, il y a un *point de rencontre.* Les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

Démonstration. Soit BCC'B' le quadrilatère; A le point d'intersection des côtés opposés BB', CC'. Prenons ABB' pour

axe des x et ACC′ pour axe des y. Soit $AB = a$; $AB' = a'$; $AC = b$; $AC' = b'$; l'équation de la conique est à six termes.

Dans le triangle ABC, l'on a :

$2Ay + Bx = aB$ (1), conjugué de AC passant par B,
$By + 2Cx = bB$ (2), ——— de AB ——— C.

Dans le triangle AB′C′, l'on a :

$2Ay + Bx = a'B$ (3), conjugué de AC′ passant par B′,
$By + 2Cx = b'B$ (4), ——— de AB′ ——— C′.

Soit M le point d'intersection des côtés opposés BC, B′C′ ; on trouve, d'après l'équation (5) (t. I, p. 495), dans le triangle BMB′ :

$$b(2Ay + Bx) - a(By + 2Cx) = ba'B - 2aa'C \quad (A),$$

équation de la droite conjuguée à BM et passant par B′;

$$b'(2Ay + Bx) - a'(By + 2Cx) = b'aB - 2aa'C \quad (B),$$

équation de la droite conjuguée à B′M et passant par B ; d'où l'on tire :

$$2Ay + Bx = \frac{B(ba'^2 - b'a^2) + 2aa'C(a - a')}{a'b - ab'}, \quad (5)$$

$$By + 2Cx = \frac{Bbb'(a' - a) + 2aa'C(b - b')}{a'b - ab'}. \quad (6)$$

Les droites (1), (3), (5) sont parallèles ; de même les droites (2), (4), (6).

Désignant par $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les quantités toutes connues dans les six équations ; pour que les trois points d'intersection des droites (1) et (2), (3) et (4), (5) et (6) soient sur une même droite, on doit avoir la relation :

$$f_2f_3 + f_1f_6 + f_4f_5 = f_3f_6 + f_2f_5 + f_1f_4 \quad (\textit{Voir p. 463});$$

or cette relation existe, et les trois points d'intersection sont les trois *points de rencontre* des triangles BAC, B′AC′, BMB′ ;

donc ces trois points sont en ligne droite; donc aussi les quatre *points de rencontre* des quatre triangles BAC, B'AC', BMB', CMC' sont en ligne droite. C. Q. F. D.

Corollaire. Lorsque la conique est un cercle, le *point de rencontre* est le point de rencontre des trois hauteurs du triangle. On a ainsi la solution de la question 101 (p. 370), telle qu'elle a été proposée, pour ce cas particulier, par M. Heinen (Crelle, t. III, p. 285, 1828). Ce ne sont là que des vérifications, en attendant une démonstration directe.

III. On peut parvenir aux mêmes résultats d'une manière plus simple, sans recourir à l'équation de condition de la page 463. Soient x', y' les coordonnées du point d'intersection de (1) et de (2) ; x'', y'' les coordonnées du point d'intersection de (3) et (4) ; on obtient :

$$x' = \frac{B(bB - 2aC)}{m}; \qquad y' = \frac{B(aB - 2bA)}{m};$$

$$x'' = \frac{B(b'B - 2a'C)}{m}; \qquad y'' = \frac{B(a'B - 2b'A)}{m}.$$

La droite qui passe par ces deux points a pour équation :

$$(a - a')(By + 2Cx) + (b - b')(2Ay + Bx) = B(ab' - a'b). \quad (7)$$

On parvient à cette même équation en soustrayant membre à membre l'équation (A) de (B). Ainsi l'intersection de (A) et (B) est sur la droite donnée par l'équation (7). C. Q. F. D.

IV. Pour que la droite *des rencontres* devienne un diamètre de la conique, il faut que l'équation (7) soit satisfaite par $x = \frac{k}{m}$; $y = \frac{k'}{m}$; donc on a pour condition :

$$(a' - a)E + (b' - b)D = B(ab' - a'b).$$

V. $ab' - a'b = a(b' - b) - b(a' - a)$; ainsi les points B et C restant fixes, si C' et B' se meuvent de manière que le rapport $\frac{b' - b}{a' - a} = \frac{CC'}{BB'}$, reste constant, la droite des points de

rencontre reste fixe. On sait qu'alors l'enveloppe de la droite mobile B'C' est une parabole (t. III, p. 183).

VI. Construisant les parallélogrammes CABA', C'AB'A'', la droite qui passe par les sommets A', A'' a pour équation :

$$y(a-a')+x(b'-b)=ab'-a'b\,;$$

les intersections de cette droite avec les axes donnent les valeurs de $\frac{a'b-ab'}{a'-a}$ et de $\frac{a'b-ab'}{b'-b}$.

VII. Si la conique est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes, alors $A=C=0$, et l'équation de la droite des points de rencontre devient :

$$y(a-a')+x(b-b')=ab'-a'b.$$

VIII. Si les axes sont conjugués, $B=0$; dans ce cas, la droite de rencontre passe par l'origine ; elle y passe encore lorsque BC est parallèle à B'C' et que le quadrilatère devient un trapèze ; car on a $ab'-a'b=0$.

IX. Il existe une démonstration géométrique du théorème, fondée sur les propriétés de l'hexagone à côtés opposés parallèles. (Crelle, t. V, p. 163, 1830, par Aubert.) Tm.

SUR UNE CERTAINE DÉCOMPOSITION

d'expressions fractionnaires contenant plusieurs variables.

D'après M. Jacobi. (Crelle, t. V, p. 344. 1830.)

—

Nous allons donner une idée succincte de cet exercice algébrique (*exercitatio algebraica*) que l'illustre analyste a écrit en latin.

I. Soit $\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}$ une fraction algébrique ; qu'on développe $\frac{ab'-a'b}{ax+by}$ suivant les puissances décroissantes de a ou, ce qui revient au même, de x ; et ensuite $\frac{1}{b'y+a'x}$ suivant les puissances décroissantes de b' ou de y, et qu'on multiplie les deux produits, on obtient trois sortes de termes : 1° les exposants de x et de y sont négatifs simultanément ; 2° l'exposant de x est négatif et celui de y positif ; 3° celui de x est positif et celui de y négatif. Il n'y a aucun terme où x et y soient positifs simultanément : or, on peut décomposer cette fraction en trois autres telles que chacune, étant développée de la même manière que la fraction proposée, donne respectivement les trois sortes de termes et avec des coefficients finis ; de sorte qu'on obtient ainsi la sommation de séries infinies. En effet, l'on a les identités :

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}=\frac{a}{y}\cdot\frac{1}{ax+by}-\frac{a'}{y}\cdot\frac{1}{b'y+a'x},$$

$$\frac{a}{y}\cdot\frac{1}{ax+by}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}\cdot\frac{b}{ax+by}; \qquad (1)$$

d'où

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}\cdot\frac{b}{ax+by}-\frac{1}{y}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x}.$$

Ce sont là les trois fractions ; désignant la première par L, la seconde par L_1, et la troisième par L_2, si on développe chacune suivant les puissances décroissantes de a et b', L donne les termes de la première espèce, L_1 de la seconde, et L_2 de la troisième espèce.

II. Soit $\frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')}$ où t et t' sont des constantes.

Soient p et q les valeurs de x et y, qui annulent les facteurs du dénominateur ; de sorte qu'on a :

$$p = \frac{b't - bt'}{ab' - a'b}; \qquad q = \frac{at' - a't}{ab' - a'b};$$

remplaçant x et y dans les trois fractions, par $x - p$ et $y - q$, il vient :

$$L = \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{ab' - a'b}{(a'b - ab')y - at' + a't},$$

$$L_1 = -\frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{b}{ax + by - t},$$

$$L_2 = -\frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)y - at' + a't} \cdot \frac{a'}{b'y + a'x - t'};$$

et

$$\frac{ab' - a'b}{(ax + by - t)(b'y + a'x - t')} = L + L_1 + L_2. \qquad (2)$$

Développant l'équation (2) d'après les puissances décroissantes de a et b', le premier membre donne les trois sortes de termes avec des coefficients en séries infinies ; le second membre donne, savoir : 1° L les termes où les exposants de x et y sont négatifs ; 2° L_1 ceux où x a un exposant négatif et y positif ; 3° L_2 ceux où l'exposant de x est positif et celui de y négatif, et avec des coefficients en nombre fini de termes.

L'auteur étend ces théorèmes à un nombre quelconque de facteurs linéaires élevés à des puissances quelconques, et s'appuie sur les propriétés de la *déterminante*, nom qu'on a donné à la fonction cramérienne ou au dénominateur des inconnues dans les équations du premier degré, qui occupe une place si importante dans toutes les branches de l'analyse, et qu'en France aucun élève, même parmi les plus forts, ne sait former : on ne l'enseigne pas. Les fonctions génératrices de Laplace mènent aussi aux résultats obtenus dans ce mémoire, si digne, comme tout ce qui vient de cette source, d'être bien médité.

THÉORÈMES POSTHUMES D'ABEL.

(Crelle, t. V, p. 336.)

—

I.

Si une équation du cinquième degré, dont les coefficients sont des nombres rationnels, est résoluble algébriquement, ses racines peuvent être mises sous la forme suivante :

$$x = c + \mathrm{A} a^{\frac{1}{5}} a_1^{\frac{2}{5}} a_2^{\frac{3}{5}} a_3^{\frac{4}{5}} + \mathrm{A}_1 . a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{2}{5}} a_3^{\frac{3}{5}} a^{\frac{4}{5}} +$$

$$+ \mathrm{A}_2 . a_2^{\frac{1}{5}} a_3^{\frac{2}{5}} a^{\frac{3}{5}} a_1^{\frac{4}{5}} + \mathrm{A}_3 . a_3^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}} a_1^{\frac{3}{5}} a_2^{\frac{4}{5}},$$

$$a = m + n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = m - n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 - (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = m + n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_3 = m - n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{A} = k + k'a + k''a_2 + k'''aa_2;\quad \mathrm{A}_1 = k + k'a_1 + k''a_3 + k'''a_1a_3,$$

$$\mathrm{A}_2 = k + k'a_2 + k''a + k'''a_2a;\quad \mathrm{A}_3 = k + k'a_3 + k''a_1 + k'''a_1a_3.$$

Les quantités c, b, e, m, n, k, k', k'', k''' sont des nombres rationnels.

Toutefois l'équation $x^5 + ax + b = 0$ ne peut se résoudre de cette manière, lorsque a et b sont des quantités quelconques.

« J'ai des théorèmes analogues pour les équations des 7e, 11e, 13e, etc. degrés. » Freyberg (dans le Hartz), 14 mars 1826 (traduit de l'allemand).

II.

Soient x_1, x_2, x_3 ..... x_n des quantités inconnues quelconques et $\varphi(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque : si l'on suppose entre x_1, x_2 ..... x_n les n équations suivantes :

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots. x_n) = 0\,;\ \varphi(x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, x_1) = 0\,;$$

$$\varphi(x_3, x_4 \ldots\ldots x_n, x_1, x_2) = 0\,;\ \varphi(x_n, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $n-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par $\varphi(x, x, x \ldots\ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé, je dis que cette équation sera décomposable en $\dfrac{m^n - m}{n}$ équations, chacune du degré n et dont les coefficients seront déterminés à l'aide d'une équation du degré $\dfrac{m^n - m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré n seront résolubles algébriquement.

Par exemple, si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car, en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré.

Pareillement, si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations

$$x_2 = \frac{a + bx_1 + cx_1^2}{\alpha + \beta x_1}\,;\quad x_3 = \frac{a + bx_2 + cx_2^2}{\alpha + \beta x_2}\,;\quad x_1 = \frac{a + bx_3 + cx_3^2}{\alpha + \beta x_3},$$

on aura, pour déterminer x_1, x_2, x_3 une équation du sixième

degré, mais décomposable en deux équations du troisième degré, les coefficients de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

III.

Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée *rationnellement* par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de *radicaux*.

IV.

Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel, qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de *radicaux*.

(Les trois derniers théorèmes sont en français et datés de Christiania, le 18 octobre 1828.)

V.

Une propriété générale de toutes les fonctions dont la *différentielle* est *algébrique* consiste en ce que la somme d'un nombre *quelconque* de ces fonctions peut s'exprimer par un nombre *déterminé* des mêmes fonctions, savoir :

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\ldots\ldots+\varphi(x_\mu)=$$
$$=\nu-[\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\varphi(z_3)+\ldots\ldots+\varphi(z_n)].$$

x_1, x_2 ..... x_n sont des quantités quelconques ; z_1, z_2, z_n sont des fonctions algébriques de ces quantités, et ν est une fonction algébro-logarithmique ; n est un nombre déterminé dépendant de μ ; par exemple, si φ est une fonction algébrique, alors, comme l'on sait, $n=1$. (*Voir* Legendre, Théorie des fonctions elliptiques.)

Mais lorsque la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît aucune propriété.

Je transcris le cas suivant, comme un des plus remarquables :

$$\text{Si } \varphi x = \int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{alors} \quad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - [\varphi(y_1) + \varphi(y_2)], \quad (1)$$

où x_1, x_2, x_3 sont trois grandeurs variables arbitraires, C une constante, et y_1, y_2 les deux racines de l'équation :

$$y^2 - \left(\frac{c_2^2 + 2c_1 - a_4}{2c_2 - a_5} - x_1 - x_2 - x_3\right) y + \frac{\left(\frac{c^2 - a}{x_1 x_2 x_3}\right)}{2c_2 - a_5} = 0.$$

Les quantités c, c_1, c_2 sont déterminées par ces trois équations linéaires :

$$c + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + x_1^3 = (a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots . a_6 x_1^6)^{\frac{1}{3}}.$$

On obtient les deux autres équations en changeant successivement x_1 en x_2 et en x_3.

Toute la théorie de la fonction $\varphi(x)$ est donnée par l'équation (1), parce qu'on peut démontrer que la propriété qu'elle exprime détermine complétement cette fonction. (Paris, le 9 août 1826) (traduit de l'allemand).

VI.

Lorsqu'on construit la courbe AMBN dont l'équation est $z = \sqrt{\cos 2\varphi}$ où $z = \text{AM}$ et $\varphi = \angle \text{MAB}$, alors l'arc AM de cette courbe est donné par l'expression suivante : $s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, et dépend ainsi des fonctions elliptiques.

J'ai trouvé qu'on peut toujours diviser le périmètre de la courbe géométriquement (par la règle et le compas) en n parties égales, lorsque n est un nombre premier de la forme $2^m + 1$ ou lorsqu'on a :

$$n = 2^p (2^m + 1)(2^{m'} + 1)(2^{m''} + 1) \ldots\ldots \left(2^{m^{(k)}} + 1\right)$$

ou $$2^m + 1,\ 2^{m'} + 1 \text{ etc.}$$

sont des nombres premiers.

Ce théorème est le même que celui de Gauss pour le cercle. J'ai été amené à ce théorème par ma théorie des équations combinée avec la théorie des nombres. J'ai lieu de croire que Gauss y est aussi parvenu.

Paris, 4 décembre 1826 (traduit de l'allemand).

Note. Il s'agit ici de la lemniscate de Bernoulli; l'hyperbole équilatère est, parmi les hyperboles, ce que le cercle est parmi les ellipses; la circonférence est une lemniscate à elle-même; de sorte que les deux lemniscates, circulaire et hyperbolique, jouissent de la même propriété. Il serait fort intéressant de connaître les propriétés de lemniscates provenant des courbes données par l'équation $y^m \pm x^m = a^m$. M. Serret, dans un mémoire extrêmement remarquable, en généralisant une certaine propriété, non encore signalée, de la lemniscate, vient de trouver une foule de courbes algébriques, dont la multisection peut s'opérer *algébriquement.* (Liouville, X, p. 257, 1845.) Tm.

VII.

J'ai trouvé la somme de la série suivante :

$$\sin\varphi \cdot \frac{a}{a+1} + \sin 3\varphi \frac{a^3}{1+a^3} + \sin 5\varphi \frac{a^5}{1+a^5} + \ldots$$

(a et φ sont des quantités réelles quelconques) et d'autres séries analogues. On peut l'exprimer en fonctions elliptiques.

Christiania, 15 novembre 1827 (en allemand).

Il y a encore plusieurs théorèmes très-intéressants sur les fonctions elliptiques, en français; mais tous ces théorèmes sont malheureusement énoncés sans démonstration.

THÉORÈMES

Sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites; de même à un triangle; théorème de M. Steiner.

(Suite, v. p. 491.)

—

L. (*Fig.* 51). A′ désignant l'aire de l'ellipse circonscrite au triangle ABC, on a

$$A'^2 = -\frac{4L^2}{m^3}\sin^2\gamma\pi^2 = \frac{4u^2t^2(pu+qt-pq)^2}{(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)}.\sin^2\gamma.\pi^2$$

(t. IX, p. 265); soient α,β,γ, les perpendiculaires abaissées du point (t,u) sur les trois côtes B′C′, A′C′, A′B′ du triangle A′B′C′ et α',β',γ', les trois perpendiculaires abaissées du même point sur les trois côtés, BC, AC, AB du triangle ABC.

On a

$$(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq) = \frac{16\alpha\beta\gamma R}{\sin^2\gamma} \text{ (p. 490)};$$

or, $\beta'=t\sin\gamma$, $\gamma'=u\sin\gamma$, et $p\gamma'+q\beta'+r\alpha'=pq\sin\gamma$, ou r est la longueur du côté BC; d'où

$$\alpha'=\frac{(pq-pu-qt)\sin\gamma}{r}, \text{ et } r=2R\sin\gamma;$$

substituant les valeurs dans A'^2, on obtient

$$A'^2=\frac{\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2}{\alpha\beta\gamma}.R.\pi^2;$$

expression élégante qu'on doit à M. Steiner.

Corollaire I. On a $AA'=2\pi^2R\alpha'\beta'\gamma'$; désignons par A_1, A_1', les aires des ellipses inscrites et circonscrites au triangle A′B′C′

$$n = 2^p (2^m + 1)(2^{m'} + 1)(2^{m''} + 1) .$$

ou $2^m + 1,\ 2^{m'} + 1$ e

sont des nombres premiers.

Ce théorème est le même que c… vons des
J'ai été amené à ce théorème … .AC, *AB* du
combinée avec la théorie des … DEF, dans le-
Gauss y est aussi parvenu. …ntre (t,u) une *ellipse*
Paris, 4 décembre 18… …es le corollaire précédent

Note. Il s'agit ici … = 4AA';
bole équilatère est
est parmi les ell… …me d'Euler, lorsqu'un triangle est à la
elle-même ; de … conique et circonscrit à une autre co-
hyperboliqu… infinité d'autres triangles à chacun des-
intéressan… coniques sont, l'une inscrite et l'autre cir-
nant d… chacun de ces triangles correspond un triangle
M. S… les ellipses inscrites dans ces derniers triangles
en … centre ont toutes la même aire.
… beaux corollaires sont aussi de M. Steiner.

…g. 51.) Théorème. Parmi toutes les coniques inscrites
… triangle ABC et ayant leurs centres sur une droite
…, il y en a deux dont le produit des axes principaux
est un maximum. Le point I de moyenne distance des centres
E et E' de ces deux coniques est le même que le centre de
moyenne distance des trois points d'intersection de la droite
fixe avec les trois côtés A'B', B'C', C'A' du triangle A'B'C',
passant par les milieux A', B', C' des côtés BC, AC, AB; dé-
signant ces trois points respectivement par c, a, b, on a

$$IE'^2 = IE''^2 = \frac{1}{6}(Ia^2 + Ib^2 + Ic^2).$$

Démonstration. Le lieu du centre d'une conique inscrite au triangle ABC et dont le produit des axes principaux est donné, est représenté par l'équation

$(2pu+2qt-pq)=c$ (v. p. 491) ; (1)

rôtés AB, AC de sorte que

$$2pu+2qt-pq=0$$

B',B'C' du triangle A'B'C' ;

le coordonnées, on a

$$=a'+b'x+c'y\,;$$

laquelle se trouvent les centres E

x, et pour origine le point a, ou cette

côté B'C' ; soient x', x'' les abscisses des points

ersection de cette même droite avec les côtés

,A'B', de sorte qu'on a

$$p'a'+q'a-p'q'=0\ (2)\,;$$

les équations des côtés A'C', A'B' deviennent

$$a'+b'x+c'y-q'=0,\quad a+bx+cy-p'=0\,;$$

faisant $y=0$, on a

$$x'=\frac{q'-a'}{b'},\quad x''=\frac{p'-a}{b}\,;\ \text{et de là}\ \ x'x''=\frac{aa'}{bb'}.$$

Substituant dans l'équation (1), à la place de u et t leurs valeurs, on a l'équation du lieu rapporté aux nouveaux axes ; le premier membre de la nouvelle équation doit devenir un maximum lorsque $y=0$; il suffit de substituer $a+bx$ pour t et $a'+b'x$ pour u, et on obtient pour ce premier membre :

$$(a'+b'x-q')(a+bx-p')[x(b'p'+bq')+p'a'+q'a-p'q'],$$

il suffit donc de rendre au maximum le produit

$$x(a+bx-p')(a'+b'x-q')=$$
$$=bb'x^3-x^2[b(q'-a')+b'(p'-a)]+aa'x=$$
$$=bb'[x^3-x^2(x'+x'')+xx'x''\,;$$

pour que ce produit soit au maximum l'on doit avoir :

$$3x^2-2x(x'+x'')+x'x''=0\,;$$

et ayant toujours même centre (t,u). R devient $\frac{R}{2}$, et α',β',γ' se changent en α,β,γ ; donc

$$4A_1A_1' = 4\pi^2 R\alpha\beta\gamma = A^2.$$

Corollaire II. Par les sommets A, B, C, concevons des droites respectivement parallèles aux côtés BC, AC, AB du triangle ABC ; on aura un nouveau triangle DEF, dans lequel, si nous inscrivons du même centre (t,u) une ellipse dont l'aire soit A_2, on aura, d'après le corollaire précédent

$$A_2^2 = 4AA';$$

mais d'après le théorème d'Euler, lorsqu'un triangle est à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, il y a une infinité d'autres triangles à chacun desquels, les mêmes coniques sont, l'une inscrite et l'autre circonscrite ; à chacun de ces triangles correspond un triangle DEF ; ainsi les ellipses inscrites dans ces derniers triangles et du même centre ont toutes la même aire.

Ces deux beaux corollaires sont aussi de M. Steiner.

LI. (*Fig.* 51.) Théorème. Parmi toutes les coniques inscrites dans un triangle ABC et ayant leurs centres sur une droite donnée, il y en a deux dont le produit des axes principaux est un maximum. Le point I de moyenne distance des centres E et E' de ces deux coniques est le même que le centre de moyenne distance des trois points d'intersection de la droite fixe avec les trois côtés A'B', B'C', C'A' du triangle A'B'C', passant par les milieux A', B', C' des côtés BC, AC, AB ; désignant ces trois points respectivement par c, a, b, on a

$$IE^2 = IE'^2 = \frac{1}{6}(Ia^2 + Ib^2 + Ic^2).$$

Démonstration. Le lieu du centre d'une conique inscrite au triangle ABC et dont le produit des axes principaux est donné, est représenté par l'équation

$$(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)=c \quad \text{(v. p. 491)}; \quad (1)$$

les t,u se comptent sur les côtés AB, AC de sorte que

$$2u-q=0,\ 2t-p=0,\ 2pu+2qt-pq=0$$

sont les équations des côtés A'C', A'B', B'C' du triangle A'B'C'; faisons $p=2p'$, $q=2q'$, et changeant de coordonnées, on a en général

$$t=a+bx+cy,\ u=a'+b'x+c'y;$$

prenant la droite fixe sur laquelle se trouvent les centres E et E', pour axe des x, et pour origine le point a, où cette droite coupe le côté B'C'; soient x',x'' les abscisses des points b',c' d'intersection de cette même droite avec les côtés A'C', A'B', de sorte qu'on a

$$p'a'+q'a-p'q'=0 \ (2);$$

les équations des côtés A'C', A'B' deviennent

$$a'+b'x+c'y-q'=0,\ a+bx+cy-p'=0;$$

faisant $y=0$, on a

$$x'=\frac{q'-a'}{b'},\ x''=\frac{p'-a}{b};\ \text{et de là}\ x'x''=\frac{aa'}{bb'}.$$

Substituant dans l'équation (1), à la place de u et t leurs valeurs, on a l'équation du lieu rapporté aux nouveaux axes; le premier membre de la nouvelle équation doit devenir un maximum lorsque $y=0$; il suffit de substituer $a+bx$ pour t et $a'+b'x$ pour u, et on obtient pour ce premier membre :

$$(a'+b'x-q')(a+bx-p')[x(b'p'+bq')+p'a'+q'a-p'q'],$$

il suffit donc de rendre au maximum le produit

$$\begin{aligned}&x(a+bx-p')(a'+b'x-q')=\\&=bb'x^3-x^2[b(q'-a')+b'(p'-a)]+aa'x=\\&=bb'[x^3-x^2(x'+x'')+xx'x''];\end{aligned}$$

pour que ce produit soit au maximum l'on doit avoir :

$$3x^2-2x(x'+x'')+x'x''=0;$$

d'où

$$x=\frac{1}{3}(x'+x'')\pm\frac{1}{3}\sqrt{x'^2-x'x''+x''^2}.$$

Telles sont les abscisses cherchées des centres E et E'; le point I, milieu de EE' a pour abscisse $\frac{1}{3}(x'+x'')$, qui est aussi le point de moyenne distance des trois points a,b,c; on a

$$IE^2=IE'^2=\frac{1}{9}(x'^2-x'x''+x''^2);$$

or

$$Ia=\frac{1}{3}(x'+x''),\quad Ib=Ia-x';$$

donc

$$Ib=\frac{1}{3}(x''-2x'),\ \text{de même}\ Ic=\frac{1}{3}(x'-2x'');$$

donc

$$IE^2=\frac{1}{6}(Ia^2+Ib^2+Ic^2).\ \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Supposons que le centre parcoure la droite fixe dans la direction abc et qu'il vienne de l'infini; à ce point de départ, la conique est une parabole et le produit des axes principaux est infini; tant que le centre reste dans le triangle formé par les prolongements de A'B', A'C', la conique est une hyperbole, et le produit des axes va sans cesse en diminuant; parvenu en a sur B'C', le produit est nul; pénétrant dans l'intérieur du triangle, la conique devient une ellipse; arrivé en b sur A'C', ce produit est derechef nul; ainsi entre a et b, il y a un produit maximum, répondant à une ellipse; tant que le centre reste dans l'angle formé par C'A' et le prolongement de B'A', la conique est une hyperbole et en c sur A'B' le produit est une troisième fois nul; donc entre b et c il y a un produit maximum répondant à une hyperbole; le centre entrant dans l'angle opposé à C'A'B', la conique devient et reste constamment une ellipse; le produit des axes

va sans cesse croissant, et à l'infini, l'ellipse devenant une parabole, le produit des axes est encore infini.

Faisant

$$x'+x''=z\,,\quad x'x''=v^2\,,\quad \frac{bb'}{4\,.\,27}(b'p'+bq')=d\,;$$

on aura pour le produit des carrés des demi-axes principaux, correspondant au maximum, l'expression

$$d\left[zv^2-2z^3\pm(z^2-3v^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

LII. Théorème. Parmi toutes les coniques inscrites à un quadrilatère, il y en a deux dont le produit des axes principaux est un maximum ; les centres sont sur la droite qui joint les milieux des diagonales et leurs positions sont déterminées par le théorème précédent.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de Newton sur les coniques inscrites aux quadrilatères et du théorème précédent.

Observation. Ce théorème important qui donne la solution d'un problème qui a résisté aux efforts d'un Euler et d'un Gauss est une des plus belles inventions de M. Steiner, qui a énoncé le théorème précédent, sans démonstration.

Corollaire. Dans le quadrilatère, on peut choisir trois côtés quelconques ; il y a donc quatre moyens de construction qui doivent amener au même résultat ; ce qui donne de nouvelles propriétés géométriques du quadrilatère. Nous remarquerons, par occasion, que le théorème de Newton donne cette belle propriété du pentagone. Si l'on en supprime un côté quelconque, il reste un quadrilatère ; qu'on mène la transversale, passant par les milieux des diagonales du quadrilatère ; les cinq transversales qu'on obtient de cette manière passent par le même point, qui n'est autre que le centre de la conique inscrite au pentagone. Nous recommandons, comme utile exercice, de démontrer cette propriété, directement. Tm.

BIOGRAPHIE.

(Extrait de la Biographie universelle, t. LXXI, p. 175, 1842 (article de M. Parisot). (*)

—

Legendre (Adrien-Marie),

Né à Toulouse en 1752 (**); envoyé de bonne heure à Paris, il termina au collége Mazarin ses études classiques, et il lui resta toujours un goût prononcé pour la littérature des anciens, et une rare vénération pour leur génie scientifique. Mais il se livra avec prédilection à l'étude spéciale des mathématiques, sous la direction de l'abbé Marie, célèbre professeur (***); vers 1775, il obtint, à la recommandation de d'Alembert, une chaire de mathématiques à l'école militaire de Paris : Euler devint l'objet de ses méditations assidues, et l'on peut dire qu'il savait par cœur les ouvrages de cet analyste sans égal. En 1783, il devint membre de l'Académie des sciences, et en 1787 il fut chargé, conjointement avec Méchain et Cassini, de procéder, pour la France, à la réunion trigonométrique des observatoires de Paris et de Greenwich; en 1795, il fut nommé membre de l'agence temporaire des poids et mesures, et y resta jusqu'en 1805, où cette agence fut réunie au ministère de l'intérieur. Lors de la création de l'Université, il fut nommé conseiller honoraire à vie, et membre de la commission d'instruction pu-

(*) Sous-chef à la section historique des archives de la marine, mort en novembre 1840, âgé de cinquante-sept ans.

(**) Un homme digne de foi, géomètre distingué, m'a assuré que cette naissance présente des circonstances analogues à celle de d'Alembert. Tm.

(***) Marie (Joseph-François), né à Rhodez, le 25 novembre 1738, successeur de Lacaille au collége Mazarin, auteur d'une bonne Mécanique, mort à Varsovie le 25 janvier 1801.

blique. Déjà, il était membre du bureau des longitudes, et examinateur de sortie à l'École polytechnique. La restauration ne lui laissa que ces deux dernières places. « Du reste, Legendre était très-peu ambitieux, et trouvait satisfaisante une position de fortune *peut-être* un peu au-dessous de son mérite. » Il ne survécut pas longtemps à la dernière révision de ses immenses travaux ; il mourut le 10 janvier 1833.

Liste de ses ouvrages.

1. *Eléments de géométrie*, Paris, 1794, in-8, douzième édition, 1823, et depuis un très-grand nombre de tirages ; les premières éditions ne comprennent pas la trigonométrie. Voici comment M. Parisot s'exprime sur cet ouvrage en deux endroits différents : « Ce dernier ouvrage, bien qu'il n'ait jamais été un titre pour un mathématicien tel que Legendre, doit pourtant être nommé ici, parce qu'il contribua certainement plus que tout le reste à populariser son nom en France, et aussi, peut-être, afin de rappeler aux savants d'ordre supérieur que véritablement il ne faut pas toujours dédaigner de descendre à ce qu'on appelle des ouvrages de compilation : par eux aussi on peut rendre des services éminents, on peut *joindre à la gloire des droits la gloire des faits*. D'ailleurs il n'est pas donné *à tous* de disposer avec méthode, d'exposer avec élégance les premiers principes, qu'on trouve si simples quand on sait, et qui restent rebutants ou *incompris* pour presque tous ceux qui commencent, » p. 177, et plus loin, p. 178, 179 : « Comme il n'est personne qui n'ait vu, nous dirions presque qui n'ait étudié cet ouvrage, qui fut classique dès l'origine, il serait superflu d'en parler. D'ailleurs il est tout à fait élémentaire, et quelque élégantes que puissent être sa disposition, sa rédaction, pour un homme tel que Legendre, ce n'est point là un titre. Il faut dire aussi que, trop préoccupé d'Euclide,

et cédant à son insu à une manie fréquente alors, de prendre les manières des Grecs et des Romains (*), Legendre eut tort de garder l'ancienne et vicieuse définition de l'angle, et de ne pas adopter la théorie des parallèles de Bertrand. Du reste il a été véritablement neuf dans une partie de son volume : c'est en considérant pour la première fois l'égalité par symétrie des aires courbes et des volumes. Quelques belles propositions de M. Cauchy l'aidèrent à la détermination rigoureuse de cette égalité. Les *Eléments* de Legendre ont été traduits dans les principales langues de l'Europe. Ils l'ont même été en arabe, à l'usage des écoles créées par le pacha d'Égypte, et nos anciens maîtres d'algèbre sont venus apprendre de nous leur géométrie oubliée. En France même, la vogue des *Eléments de géométrie* est un peu passée à présent; des géométries élémentaires *plus hautes*, parce qu'en général on a plus l'habitude de l'*atmosphère mathématique*, ont pris la première place. D'ailleurs, au temps même de *la splendeur* de Legendre, le Bezout de Reynaud et la géométrie étaient encore plus usuels que ses *Eléments*. La différence de prix n'en était pas la seule cause.» Nous croyons devoir consigner ici quelques observations. L'auteur de l'article nous apprend lui-même qu'il a puisé dans une notice qu'on doit à M. Maurice de Genève, un des plus savants disciples de l'illustre compatriote de Fermat. En effet, on lit dans cette notice, que M. Parisot reproduit presque littéralement : « On peut pourtant regretter que dans le corps même de son livre, M. Legendre ait tenu à conserver l'antique et vicieuse définition de l'angle donnée par Euclide; et qu'en n'adoptant pas, comme on commence partout à le faire, celle qu'on doit à Bertrand, il ait laissé imparfaite la

(*) Cette manie vaut au moins celle qui est si fréquente aujourd'hui de prendre les manières des barbares du moyen âge. Tm.

théorie des parallèles par les simples éléments. » (*Bibl.univ. de Genève*, sect. Sciences, t. LII, p. 65. 1833.) Or, quelle est la définition d'Euclide? « Un angle plan est l'inclinaison de deux droites, qui se rencontrent sans former une seule ligne droite. » C'est la huitième définition du premier livre. Loin d'être *vicieuse*, cette définition est l'expression claire de la notion intime que nous avons de l'angle. Car, selon une observation de Kant, consignée dans la critique de la raison pure, l'idée du mouvement est antérieure dans l'intelligence à celle de l'espace. En effet, pour nous représenter une ligne, le rayon visuel la décrit, soit en réalité, soit mentalement, en se mouvant d'une extrémité à l'autre extrémité de la ligne. Le sentiment intime et indéfinissable de la *direction*, inséparable de l'idée du mouvement, est figurée extérieurement par la droite, forme indéfinissable, parce qu'on ne définit pas des notions premières, de même qu'on ne démontre pas les *principes premiers*; car, pour ces définitions, pour ces démonstrations, il faudrait employer des mots, s'appuyer sur des principes antérieurs aux mots et aux principes *premiers*, entreprise absurde; l'identité de direction, jointe à la différence de position, constitue le parallélisme et est aussi une notion première qu'Euclide a placée avec raison, et avec sa bonne foi ordinaire, parmi les axiomes; axiome qui se résume dans cet énoncé : par le même point ne passe qu'une droite ayant même direction qu'une autre droite; ou autrement, par le même point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite; les efforts qu'on fera, pour établir la théorie sur un principe plus simple, resteront, je le crains, éternellement des efforts stériles. Entre autres, on peut appliquer à l'essai de Bertrand les paroles que Montaigne adresse aux métaphysiciens : *pour m'ôter un doute, vous m'en donnez trois*. Vous exigez que je rejette comme vicieuse la définition si consciencieuse de l'angle, portant sur la diversité de direction, mais

que par contre j'admette, comme chose excellente, que l'angle est une surface infiniment grande du second ordre, au regard de laquelle disparaît, comme rien du tout, la surface infiniment grande du premier ordre, bornée par deux droites parallèles ! Car, en écartant les paralogismes, les faux-fuyants, les illusoires constructions qui servent de plâtrage, le fond de la théorie n'est que la hiérarchie infinitésimale leibnitzienne, transportée aux abords de la géométrie. Telle elle a été développée, sans aucun déguisement, par Legendre lui-même, dans un mémoire posthume inséré dans les Mém. de l'Acad. des sciences (t. X). Tout en approuvant ce système hiérarchique, Legendre s'est bien gardé de le faire entrer dans les Éléments. En effet, le système en lui-même n'est pas faux. Imaginez un rectangle à base constante, à hauteur variable ; comparez son aire à celle d'un secteur circulaire, à angle constant et d'un rayon égal à la hauteur du rectangle ; cette hauteur allant en croissant, l'aire du rectangle divisée par l'aire correspondante du secteur, va en diminuant et a zéro pour limite ; ce qu'on exprime, par une locution adoptée, en disant que l'aire infinie du rectangle est nulle relativement à l'aire infinie du secteur. Mais ceci repose sur la théorie des aires ; et avant d'avoir établi la théorie des parallèles, loin de connaître l'aire du rectangle, on peut même mettre en doute l'existence, la possibilité d'un rectangle.

Admettez cette possibilité, et tout est démontré. Aussi, dans la théorie de Bertrand, cette admission est tacitement accordée ; mais pour la masquer, on enlève un côté au rectangle ; c'est un coffre sans couvercle. Peut-on attacher aucun sens raisonnable de grandeur, à un espace ouvert non limité ? Aussi, quoique cette théorie ait acquis les suffrages honorables de géomètres très-distingués, je la crois pourtant très-vicieuse, d'après le principe admis en géométrie, qu'il ne faut pas *jurare in verba magistri*.

Voici la liste des ouvrages de Legendre, outre sa Géométrie, parvenue à la 12e édition.

II. Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, par Cassini, Mechain et Legendre, avec la description et l'usage d'un nouvel instrument propre à donner la mesure des angles à la précision d'une seconde. Paris, 1 vol. in-4.

III. Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. Paris, 1807, 3 vol. in-4°.

IV. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique. Paris, 1827-1832, 3 vol. in-4°.

V. Théorie des nombres. Paris, 1830, 2 vol. in-4° (1re édition, 1798 ; 2e édition, 1808 ; 1er supplément, 1816 ; 2e supplément, 1825).

VI. Dix-neuf Mémoires insérés dans les divers recueils des Mémoires de l'Académie des sciences, et cinq autres Mémoires et Dissertations particulières, parmi lesquelles on trouve la Dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie des sciences de Prusse pour le prix de 1782. Berlin, 1782, in-8 (très-rare).

C'est par erreur que l'auteur de l'article compte parmi les ouvrages de Legendre une brochure ayant pour titre : Nouvelle Théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles de Legendre. Paris, 1803 ; cette brochure est de M. Kircher, médecin à Mayence, mort en 1804 ou 1805.

—

(Biographie universelle, t. LXXII, p. 1, 1843. Article anonyme.)

Lidonne (*Nicolas-Joseph*).

Né, le 9 juillet 1757, à Périgueux, professeur de mathématiques avant la révolution; chef de division au ministère de

la justice en 1793, mort en février 1830. Outre de nombreux manuscrits sur diverses parties des mathématiques, on a de lui : 1° Tables de tous les diviseurs des nombres calculés depuis un jusqu'à cent mille, suivies d'une dissertation sur une question de stéréotomie, extraite de quelques auteurs du dernier siècle. Paris, 1808, in-8°.

Cette dissertation renferme la description et le calcul des trois polyèdres semi-réguliers, dits *corps d'Archimède*. Nous nous proposons d'en parler dans ce journal, comme sujets d'exercice; ainsi que des quatre nouveaux polyèdres réguliers de M. Poinsot. Les tables de Lidonne, quoique fort commodes, n'ont plus de valeur depuis que l'on possède les tables des diviseurs pour les trois premiers millions, publiées par Burckhardt (J.-Ch.) en 1817, in-4° (*); ouvrage si éminemment utile aux calculateurs; il donne les diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 3036000 avec les nombres premiers qui s'y trouvent.

2° Tableau analytique propre à diriger les jeunes gens qui étudient les mathématiques. Paris, 1828.

QUESTION D'EXAMEN.

Note sur les unités en mécanique.

(V. 525, 7e série.)

—

I. La difficulté de créer de nouveaux mots, d'introduire de nouvelles locutions est un des principaux avantages de l'idiome français. Ici encore, comme en morale et en politique, ce qui nous paraît être des entraves sont souvent des

---

(*) Cet ouvrage, qui coûtait jadis 36 fr., se trouve maintenant au prix de 5 fr., chez madame veuve Durand, 23, rue de Lille.

éléments de force. Si donc je fais usage de nouvelles dénominations, ce n'est nullement avec le désir et moins encore avec l'espoir de les voir adopter : je m'en servirai transitoirement pour éclaircir quelques idées enveloppées ordinairement, chez les étudiants en mécanique, de beaucoup d'obscurité.

II. *Mesurer un objet*, c'est chercher le *nombre* qui exprime combien de fois cet objet contient un autre objet connu, donné d'avance, et de même nature que l'objet à mesurer. Cet objet, connu et donné, se nomme *unité*. Ainsi, *mesure*, *nombre*, *unité*, *homogénéité*, sont quatre idées inséparables.

III. On rencontre, en mécanique, quatre sortes de quantités : l'*étendue*, sous ses trois formes, longueur, aire, volume ; la *masse* ; le *temps* ; la *force*.

Faisons connaître les *unités* adoptées pour *mesurer* ces quatre quantités.

IV. *Unité de longueur*. La dix-millionième partie du quart du méridien qui passe par Paris ; cette unité se nomme *mètre*.

Unité de superficie, *mètre carré*; unité de volume, *mètre cube*.

Ainsi, la *mesure* d'un volume est le *nombre* qui exprime combien de fois le volume donné contient de mètres cubes ; mais ordinairement on se sert de cette locution elliptique ; on supprime le mot *mesure*, et l'on dit : le volume est le *nombre* qui exprime, etc. Il est essentiel de se rappeler sans cesse que le mot volume, en mécanique, désigne *un nombre* ; de même pour les aires et pour les longueurs.

V. *Unité de temps*. L'intervalle qui s'écoule entre l'arrivée d'un méridien terrestre dans une position et son arrivée dans la position parallèle la plus prochaine, se nomme *jour sidéral* ; cet intervalle est adopté comme une quantité constante.

Le jour est divisé en vingt-quatre *heures* sidérales ; l'heure en soixante *minutes*, et la minute en soixante *secondes* sidérales. C'est cette seconde sidérale qui devrait être l'unité de temps ; mais les usages de la vie civile ont fait adopter la *seconde*, subdivision du *jour astronomique moyen*. Ainsi, la mesure du temps est un *nombre* qui désigne combien de fois le temps donné contient la seconde (temps moyen), ou elliptiquement, le temps est un *nombre*, etc.

VI. *Unité de masse*. On a adopté, pour cette unité, la masse contenue dans un mètre cube d'eau distillée à la température de quatre degrés centigrades. Nous désignerons cette unité, à laquelle on n'a pas donné de nom particulier, sous le nom de *molide*. La mesure d'une masse est donc le nombre qui exprime combien la masse donnée contient de *molides*, ou la masse est le *nombre*, etc. Il faut donc ne jamais oublier qu'en mécanique la masse désigne un *nombre*.

VII. On appelle *densité* le *nombre* qui exprime combien de fois la masse d'un mètre cube d'une substance contient de *molides*.

VIII. D'après les § VI et VII, on voit donc que le *nombre* masse est égal au produit des deux nombres, *volume* et *densité*.

IX. *Unité de force*. Les limites de nos sens et de nos instruments nous obligent à distinguer deux espèces de *forces*. Les unes produisent, dans un temps inappréciable à nos sens et à nos instruments, ou autrement dans un instant, une vitesse finie, mesurable. On les nomme *forces impulsives* ou *instantanées*. Les autres ne produisent une vitesse mesurable qu'en agissant pendant un temps appréciable ; on les nomme forces *compressives* ou *permanentes*, et aussi forces *accélératrices*, ou *retardatrices*, *attractives*, *répulsives*, selon leurs divers modes d'action. Une force instantanée, disparaissant immédiatement après son action, la vitesse qu'elle a communiquée

au corps est mesurable ; une force compressive, disparaissant immédiatement, la vitesse communiquée échappe à nos sens. La mesure de ces deux espèces de forces nécessite deux espèces d'*unités*.

X. *Unité de force impulsive*. C'est la force capable de donner à un molide, en agissant instantanément, un mètre de vitesse ; nous désignerons cette unité sous le nom de *dynamite*. La mesure d'une force impulsive est le *nombre* qui exprime combien de fois cette force contient de dynamites, ou combien il faut de dynamites pour faire équilibre à cette force. Ainsi, en mécanique, la force impulsive désigne un *nombre*.

XI. Lorsque deux masses animées de vitesses directement opposées se font équilibre, on dit que les deux masses sont animées de forces égales. Cet équilibre a lieu lorsque les nombres masses sont en rapport inverse des nombres *vitesses*. Ainsi, une masse M, animée d'une vitesse V, pourra être tenue en équilibre par MV dynamites ; la force est donc égale à MV dynamites, c'est-à-dire la force *nombre* est égal au produit des deux nombres, masse et vitesse ; produit qui est connu sous le nom de *quantité de mouvement*. Répétons donc que la quantité de mouvement est un nombre qui marque combien de dynamites sont contenus dans la force impulsive qu'on veut mesurer.

XII. *Unité de force permanente constante*. Une force permanente est constante quand elle reste toujours égale à elle-même. La force permanente constante capable de donner à un molide, en agissant pendant une seconde, une vitesse d'un mètre, est l'unité des forces permanentes constantes. Nous désignerons cette unité par le nom de *dynamide*. Ainsi une force impulsive constante est un *nombre* qui désigne combien elle contient de dynamides, c'est-à-dire, à combien de dynamides elle peut faire équilibre. On peut appliquer

ici ce qui a été dit au paragraphe précédent ; ainsi le nombre *force permanente* est égal au produit des deux nombres masse et vitesse produite au bout d'une seconde ; ce produit est appelé *force motrice*.

XIII. Une force permanente variable est connue lorsqu'on sait à chaque instant combien elle contient de dynamides : la variabilité de ce nombre constitue la variabilité de la force.

XIV. La *pesanteur* est une force permanente constante. Sa mesure est exprimée par le nombre 9,8....., c'est-à-dire le molide animé de la pesanteur peut tenir en équilibre 9,8.... dynamides. Ce nombre est ordinairement représenté par la lettre italique g.

XV. Le *poids* est la force motrice due à la pesanteur ; ainsi, M désignant le nombre masse, le poids est Mg (XII).

XVI. Les poids sont donc proportionnels aux masses ; c'est-à-dire les nombres poids sont dans le même rapport que les nombres masses.

XVII. Le nombre poids, divisé par le nombre g, donne pour quotient le nombre masse.

XVIII. La pesanteur spécifique d'une substance, c'est le poids d'un mètre cube de cette substance.

XIX. Les pesanteurs spécifiques sont donc proportionnelles aux densités (VII).

XX. Le poids de la millième partie d'un molide (VI) se nomme kilogramme. On a adopté la millième partie du kilogramme ou le *gramme* pour unité de poids.

XXI. Le poids d'un corps qui contient v mètres cubes, et dont la pesanteur spécifique est d, est donc égal au produit vd ; c'est ce qu'on énonce en disant que le poids est égal au produit du volume par la pesanteur spécifique ; et comme la table des pesanteurs spécifiques est aussi celle des densités, les mêmes nombres désignant les unes et les autres, on

peut dire que le poids est égal au produit du volume par la densité ; et en multipliant ce produit par le nombre g (XIV), on a le nombre de dynamides qui font équilibre au poids.

XXII. Pour mesurer la *quantité de travail*, on a adopté une unité à laquelle on a donné le nom de *dyname*. C'est le travail nécessaire pour élever un kilogramme à la hauteur d'un mètre. Ainsi la quantité de travail est le nombre qui désigne combien le travail exécuté ou exécutable contient de dynames. Cette quantité de travail est aussi quelquefois désignée sous le nom de *force vive;* c'est celle qu'on paye, comme s'exprime Montgolfier.

XXIII. En résumé, en mécanique, toute équation où il entre des volumes, des masses, densité, quantité de mouvement, forces, forces vives, temps, etc. sont des équations entre des *nombres*, et pas autre chose. C'est ce qu'il faut toujours rappeler, parce qu'on l'oublie souvent. Tm.

QUESTION D'EXAMEN

sur les coniques à coefficients variables et principalement sur les coniques biconfocales.

(V. p. 520.)

—

I. Problème. Dans une équation à six termes d'une conique, on suppose que tous les coefficients sont des fonctions *connues* d'une même variable ; à chacune de ces coniques, on mène une tangente ayant une direction *donnée;* trouver le lieu géométrique du point de contact.

Solution. Soit une équation du second degré à six termes : $y + rx + s = 0$, l'équation de la tangente où r est *connu.*

Soit z la variable dont tous les coefficients de l'équation sont des fonctions connues ; la relation de tangence donne :

$$l'-2rn+lr^2+ms^2+2k's+2krs=0 \quad \text{(t. II, p. 108).}$$

l', n, l, m, k', k sont aussi des fonctions connues de z. Remplaçant s par $-(y+rx)$, il vient :

$$l'-2rn+lr^2+m(y+rx)^2-2(y+rx)(k'+2kr)=0. \quad (1)$$

Éliminant z entre cette équation et celle à six termes, on obtient une équation en x et y, qui est celle du lieu cherché.

Observation. La même solution subsiste évidemment lorsque cinq coefficients sont fonctions du sixième, ou lorsqu'un certain nombre de coefficients étant connus, il existe des relations entre les coefficients restants, etc.

II. *Applications.* 1° A *est variable et les cinq autres coefficients sont donnés.*

Alors l', n, k' sont connus ; remplaçant l, m, k par leurs valeurs, savoir : $l=D^2-4AF$, $m=B^2-4AC$, $n=2AE-BD$, l'équation (1) se compose de termes ne renfermant pas A, et d'autres comprenant A au premier degré. Remplaçant A par sa valeur $-\dfrac{Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F}{y^2}$, l'équation (1) devient :

$$y^2[l'-2nr+D^2r^2+B^2(y+rx)^2-2(y+rx)(k'-2BD)]$$
$$+4(Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F)[C(y+rx)^2+2Er(y+rx)+Fr^2]=0,$$

équation du quatrième degré qui représente généralement une ligne à branches infinies. Les termes du quatrième degré sont $(y+rx)^2(By+2Cx)^2$; de même quand C est seul variable.

2° F *est variable et les cinq autres coefficients sont donnés ;* le lieu est une conique.

3° B seul est variable ; le lieu est du sixième degré

4° D ou E seulement variable ; lieu du quatrième degré.

III. Théorème. Une conique ayant un centre et un foyer fixe et touchant une droite donnée de direction, le lieu du point de contact est une hyperbole équilatère concentrique à la conique et passant par les foyers de l'ellipse.

Démonstration. Ellipse. Soit $(b^2+c^2)y^2+b^2x^2=b^2(b^2+c^2)$; l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux ; $2b$ est le petit axe et c l'excentricité ; b est variable et c est constant. On a ici :

$$m=-4b^2(b^2+c^2)\,;\quad l=+4b^2(b^2+c^2)^2\,;\quad l'=4b^4(b^2+c^2)\,;$$
$$k=k'=n=0.$$

Substituant ces valeurs dans (1), divisant par $4b^2(b^2+c^2)$, et résolvant par rapport à r, il vient $r=\dfrac{b^2x}{(b^2+c^2)y}$, expression qu'on pourrait trouver directement, d'après l'équation connue de la tangente. Donc, $b^2=\dfrac{rc^2y}{x-ry}$; substituant dans l'équation de l'ellipse, on a $ry^2-rx^2+xy\,(r^2-1)+rc^2=0$, hyperbole équilatère concentrique à l'ellipse.

On y satisfait en posant $x=c$, $y=0$.

Dans cette équation $m=(r^2+1)^2$; $L=rc^2(r^2+1)^2$; ainsi le demi-grand axe $=c\sqrt{\dfrac{2r}{r^2+1}}$ (*Voir* t. I, p. 493) ; l'excentricité $=2c\sqrt{\dfrac{r}{r^2+1}}$; et les équations des axes principaux sont :

$$y(r+1)+x(r-1)=0\,;\quad y(r-1)-x(r+1)=0.$$

(*Voir* t. I, p. 496.)

Lorsque $r=1$, les axes principaux sont ceux de l'ellipse, et les sommets sont les foyers de l'ellipse. L'équation de l'hyperbole équilatère étant indépendante de b^2, il s'ensuit

qu'elle reste la même lorsqu'on remplace l'ellipse par une hyperbole.

Observation. Le théorème est de M. Fregier (Corresp. sur l'École polyt., t. III, p. 17, 1814); mais il n'est énoncé que pour l'ellipse. Tm.

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

103. Un angle constant étant circonscrit à une courbe plane géométrique, la tangente au lieu géométrique de ce sommet, menée par ce sommet, est aussi tangente au cercle qui passe par ce sommet et les deux points de contact correspondants.

104. Une droite interceptée entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments. Sur chaque segment on construit un polyèdre donné; le segment étant homologue à la droite interceptée; l'aire du polyèdre donné est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires; le volume du polyèdre donné est égal au cube de la somme des racines cubiques des polyèdres segmentaires (Olivier).

105. Considérant comme coordonnées rectangulaires d'un point, les rayons de courbure des extrémités des diamètres conjugués d'une même ellipse, le lieu du point est l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle droit (Brassine).

DÉTERMINATION

Des n derniers chiffres de $\sqrt[m]{N}$ par une simple division.

PAR M. LÉON ANNE,
Ancien élève de l'École polytechnique.

Quand on a obtenu $(n+\mu+1)$ chiffres de la racine $m^{ième}$ d'un nombre N, n étant le nombre des chiffres qui restent à obtenir, et μ le nombre des chiffres du nombre m;

Si l'on divise le reste R auquel on est parvenu par m fois la $(m-1)^{ième}$ puissance de la partie obtenue [cette $(m-1)^{ième}$ puissance étant, bien entendu, suivie de $(m-1)$ fois n zéro] le quotient de cette division diffère de la partie qu'il reste à obtenir de moins d'une unité en plus ou en moins.

Soit a la partie obtenue, b celle qu'il reste à obtenir, r la différence entre N et la plus grande $m^{ième}$ puissance exacte contenue dans N et soit posé $a.\,10^n = A$, on a d'après l'énoncé :

$$N = (a\,.\,10^n + b)^m + r = (A + b)^m + r,$$

$$\frac{N - A^m}{mA^{m-1}} = b + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{b^2}{A} + \ldots + \frac{b^m}{m\,.\,A^{m-1}} + \frac{r}{m\,.\,A^{m-1}},$$

r peut être égal ou supérieur à $m(A+b)^{m-1}$ sans que $(A+b)$ cesse d'être le nombre le plus grand dont la $m^{ième}$ puissance peut se retrancher de N, ainsi le second membre de cette égalité peut être b ou $(b+1)$. Comme il va être démontré qu'il est toujours inférieur à $(b+2)$, et comme l'on ne prend que la partie entière du quotient $\frac{N-A^m}{m\,.\,A^{m-1}}$ pour complément de la partie obtenue, il s'ensuit que cette méthode donne

$(A+b)$ ou $(A+b+1)$ pour $\sqrt[m]{N}$, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement supérieur ou immédiatement inférieur à $\sqrt[m]{N}$. N étant au plus égal à $(A+b+1)^m-1$, il suffit pour établir le théorème de prouver que

$$\frac{(A+b+1)^m-1-A^m}{m \, . \, A^{m-1}} < b+2,$$

ou

$$(A+b+1)^m < A^m+m \, . \, A^{m-1}(b+1)+m \, . \, A^{m-1}+1;$$

supprimant $A^m+m \, . \, A^{m-1}(b+1)$ dans les deux membres, et les divisant ensuite tous les deux par A^m et enfin posant $(b+1)=B$, on a :

$$\frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2}\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}\left(\frac{B}{A}\right)^3+\ldots+\left(\frac{B}{A}\right)^m<\frac{m}{A}+\frac{1}{A^m}$$

cette inégalité sera à fortiori vérifiée si elle existe en remplaçant chaque coefficient du premier membre par un coefficient plus grand, et si en même temps l'on diminue le second membre de $\frac{1}{A^m}$; car les inégalités $M<N$, $N<P$, $P<Q$ donnent évidemment $M<Q$; or

$$\frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2}\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}\left(\frac{B}{A}\right)^3+\ldots.<\left(\frac{mB}{A}\right)^2+\left(\frac{mB}{A}\right)^3+\ldots.$$

donc l'inégalité précédente sera à fortiori vérifiée si l'on a :

$$\left(\frac{mB}{A}\right)^2+\left(\frac{mB}{A}\right)^3+\ldots.+\left(\frac{mB}{A}\right)^m<\frac{m}{A};$$

le produit de deux facteurs a autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ou un de moins ; b ayant n chiffres, $B=(b+1)$ en a n ou $(n+1)$, donc mB en a au plus $(\mu+n+1)$, et comme A en a $(2n+\mu+1)$, il s'ensuit que $\left(\frac{mB}{A}\right)$ est une fraction proprement dite [son numéra-

teur ayant moins de chiffres que son dénominateur] et l'on peut mettre l'inégalité précédente sous la forme :

$$\frac{\left(\frac{mB}{A}\right)^2 - \left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1}}{1 - \left(\frac{mB}{A}\right)} < \frac{m}{A},$$

ou

$$\frac{m^2B^2}{A^2} + \frac{m^2B}{A^2} - \left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1} < \frac{m}{A},$$

ou, multipliant les deux membres par $\frac{A^2}{m}$,

$$m(B^2+B) - \frac{A^2}{m}\left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1} < A\,;$$

si B a n chiffres, sa plus grande valeur est (10^n-1), et dans cette hypothèse

$$B^2+B = B(B+1) = (10^n-1)\,10^n,$$

c'est-à-dire, est un nombre formé de n chiffres 9 à la suite desquels sont écrits n zéro, au total $2n$ chiffres ; donc (B^2+B) ne peut avoir plus de $2n$ chiffres, et par suite $m(B^2+B)$ ne peut en avoir plus de $(\mu+2n)$; ainsi $m(B^2+B)$ ayant au moins un chiffre de moins que A, l'inégalité précédente est vérifiée.

Dans le cas où $B=(b+1)$ aurait $(n+1)$ chiffres, on aurait au plus $B=10^n$, alors

$$mB^2+mB = m\,.\,10^{2n} + m\,.\,10^n;$$

cette somme ne peut avoir au plus que $(2n+\mu+1)$ chiffres, c'est-à-dire autant que A, à moins que l'indice m de la racine ne soit un nombre formé de plus de n chiffres 9 (n est le nombre de chiffres qui restent à obtenir). Ce cas est donc le seul qui puisse offrir quelque incertitude, mais alors il est facile de la lever en calculant un chiffre de plus, c'est-à-dire $(n+\mu+2)$ au lieu de $(n+\mu+1)$.

Remarque. Dans l'extraction d'une racine dont l'indice est inférieur à 10, c'est-à-dire dont l'indice n'a qu'un chiffre, il faut, d'après ce qui précède, que la partie obtenue ait au moins deux chiffres de plus que la partie qui reste à obtenir pour pouvoir achever l'opération par une simple division; cependant cette condition se simplifie pour la racine carrée, car il suffit que la partie obtenue ait un seul chiffre de plus que la partie restant à obtenir.

Pour le prouver, prenons le cas le plus défavorable :

$$N = (10^n . a + b)^2 + 2(10^n . a + b),$$

$$N = 10^{2n} . a^2 + 2 . 10^n . a . b + b^2 + 2 . 10^n . a + 2b,$$

$$\frac{N - 10^{2n} . a^2}{2 . 10^n . a} = b + 1 + \frac{b^2 + 2b}{2 . 10^n . a};$$

la plus grande valeur de b est $(10^n - 1)$ nombre formé de n chiffres 9, dans cette hypothèse

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = 10^{2n} - 2 . 10^n + 1 \\ 2b = 2 . 10^n - 2 \end{array}\right\} b^2 + 2b = 10^{2n} - 1;$$

ainsi le numérateur de la fraction $\frac{b^2 + 2b}{2 . 10^n . a}$ est alors un nombre formé de $2n$ chiffres 9, et comme le dénominateur a $(2n+1)$ ou $(2n+2)$ chiffres, il s'ensuit que cette fraction est plus petite que l'unité, donc le quotient de la division $\frac{N - 10^{2n} . a^2}{2 . 10^n . a}$ est b ou $(b + 1)$, c'est-à-dire que cette méthode donne ou $(10^n . a + b)$ ou $(10^n . a + b + 1)$ pour $\sqrt{N}$; donc enfin l'on trouve le nombre entier immédiatement inférieur ou immédiatement supérieur à $\sqrt{N}$.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR M. BECK,
Professeur au collége de Verviers.

On donne la projection horizontale d'une droite et l'angle que cette droite fait avec un plan D : trouver la projection verticale.

(Fig. 54) La droite cherchée étant supposée déterminée, toutes les droites qui lui seront parallèles et qui seront dans le plan vertical P, qui la projette horizontalement, répondront pareillement à la question; il y a donc une infinité de solutions.

Par suite, en prenant un point quelconque a dans ce plan P, ce point pourra être considéré comme appartenant à l'une des droites cherchées, droite qui serait déterminée si l'on connaissait un second de ses points.

Or, nous pouvons supposer que le point a est le sommet d'un cône droit dont la base serait sur le plan donné, et dont les génératrices feraient avec ce plan l'angle donné; pour avoir la droite demandée, il faut chercher celle de toutes ces génératrices dont l'extrémité est dans le plan P, et cette extrémité, que nous désignerons par x, étant connue par ses projections, serait le second point cherché; rien de plus facile que de la déterminer, car ce point x est situé sur la circonférence de la base du cône, circonférence qui se trouve dans le plan donné, il doit se trouver dans le plan P et par conséquent, c'est le point de rencontre de cette circonférence avec la ligne d'intersection du plan P et du plan donné.

Construction. — Pour résoudre le problème, il faut donc,

afin de connaître le rayon de la base, commencer par déterminer le triangle rectangle générateur du cône droit :

Pour cela abaissons du point a une perpendiculaire sur le plan donné, et cherchons le point où elle perce ce plan : ce point est le centre de la base du cône.

Pour le déterminer, rabattons sur le plan horizontal l'axe du cône en faisant tourner le plan qui projette cet axe horizontalement, autour de sa trace horizontale comme charnière; l'intersection de ce plan et du plan donné rabattue est mn; le rabattement a' du sommet a du cône se trouve en élevant au point a^h de la charnière une perpendiculaire egale à la distance $a^o g$ de ce sommet a au-dessus du plan horizontal, et par conséquent en menant $a'c$ perpendiculaire à mn, on aura le rabattement de l'axe du cône sur le plan H ; pour avoir le triangle générateur $ca'r$, il suffit de faire au point a' un angle a égal au complément de l'angle donné, et l'on trouve ainsi que cr est le rayon de la circonférence dont c est le centre.

Telle est la première partie de la construction.

Il faut maintenant construire cette base dans le plan D. pour cela rabattons le plan donné sur le plan H en le faisant tourner autour de sa trace horizontale A comme charnière; le centre c, qui se trouve aussi dans le plan projetant horizontalement la perpendiculaire, vient en c' sur la projection horizontale de cette perpendiculaire à une distance de la charnière marqué par cm ; le point r vient en r'; donc si du point c' comme centre avec $c'r'=rc$ pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence sera celle de la base du cône rabattue sur le plan H.

Nous avons encore à rabattre la ligne d'intersection des plans P et D; le point K de cette intersection, se trouvant sur la charnière, reste immobile; il suffit donc de rabattre un second point de cette droite, le point b, par exemple :

ce point se meut dans un plan perpendiculaire à la charnière, il viendra se rabattre en b' sur la trace horizontale $b^h q$ de ce plan à une distance du point q marquée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont bb^h et $b^h q$; la ligne d'intersection rabattue est donc $b'k$.

Cette ligne d'intersection rencontre la circonférence $c'r'$ en un point d qui est l'extrémité x cherchée rabattue sur le plan OH ; c'est ce point dont il faut chercher les projections : pendant sa rotation, ce point s'est mû dans un plan perpendiculaire à la charnière ; sa projection horizontale doit donc être située sur la trace horizontale dp de ce plan, et comme elle doit se trouver aussi sur la projection A^h de la droite, elle sera en d^h à la rencontre de A^h et de la perpendiculaire dp ; sa projection verticale doit se trouver en d à une distance de la ligne de terre marquée par l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est $d^h p$ et dont l'hypoténuse est dp ; par conséquent en joignant $a^o d^o$, on a la projection verticale cherchée.

L'intersection $b'k$, rencontrant la circonférence $c'r'$, en un second point l, qui est projeté verticalement en l^o, on a, en joignant $a^o l^o$, la projection verticale d'une seconde droite passant par le point a et qui répond à la question.

PROBLÈME DE COMBINAISON, t. III, p. 537.

Il est essentiel de remplacer depuis la dernière ligne de la page 547 jusqu'à la fin de l'article, le mot *personne* par le mot *objet* et *vice versâ*.

Le même problème a été résolu par M. Brianchon (*Corresp. sur l'École Polytechnique*, t. III à la fin).

NOTE

Sur la limite supérieure du nombre de divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

PAR M. G. H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au Collége royal de Saint-Louis.

—

I.

Soient A et B deux nombres dont on cherche le plus grand commun diviseur. On sait qu'aucun reste, sauf le dernier, ne peut être égal à la moitié du diviseur respectif; car si cela avait lieu pour un reste quelconque, il serait le plus grand commun diviseur, et par conséquent il devrait être le dernier, ce qui n'est pas; d'après cela, appelons R_1, R_2, R_3, .. R_n les restes successifs, mais chacun plus petit que la moitié du diviseur respectif, en forçant bien entendu les quotients s'il le faut, comme on le fait ordinairement pour abréger les calculs.

On aura :

$$R_1 < \frac{B}{2}$$

$$R_2 < \frac{R_1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n < \frac{R_{n-1}}{2}$$

d'où en multipliant membre à membre

$$R^n < \frac{B}{2^n}.$$

Il est clair que le nombre des divisions indiqué par celui des restes, sera le plus grand possible, lorsque A et B sont premiers entre eux;

alors $$R_n = 1. \text{ et } 2^n < B.$$

Il s'agit de savoir quelle est la plus grande valeur entière de n.

Or, si chaque reste était égal à la moitié du diviseur respectif, on aurait :

$$2^n = B \text{ d'où } n = \frac{\log B}{\log 2}.$$

En appelant k le nombre des chiffres de B, comme

$$\log B < k, \log 2 > 0,3,$$

il viendrait :

$$n < \frac{10k}{3};$$

et n devant être entier quel que soit k, on aurait :

$$n \leqq 3k;$$

c'est-à-dire, qu'en supposant chaque reste égal à la moitié du diviseur respectif, n serait tout au plus égal à $3k$; mais ces restes, sauf le dernier, sont tous plus petits que la moitié des diviseurs, donc $n < 3k$.

Il résulte de là que le nombre des divisions pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres est *toujours moindre que le triple des chiffres* du plus petit nombre.

Prenons pour exemple 196 et 75. Comme le plus petit nombre a deux chiffres, le nombre de divisions pour trouver le plus grand diviseur commun est moindre que 3×2; en effet, on trouve pour restes : 29, 12, 5, 2, 1 ; ce qui indique bien *cinq* divisions (*).

(*) Voir tome IV, p. 71. Tm.

II.

Sur la détermination du reste lorsqu'on a trouvé par la division la seconde partie d'une racine carrée.

Soit N un nombre, a la partie trouvée contenant $k+1$ chiffres de sa racine carrée. On sait comment se trouvent par une simple division les k chiffres suivants de cette racine ; mais pour être plus clair dans la suite, je demande la permission de reprendre les raisonnements qui conduisent à cette opération.

Soit b la partie inconnue de la racine cherchée, on a :

$$N = a^2 + 2ab + b^2, \text{ d'où } \frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a},$$

ou bien, en appelant q le quotient entier et r le reste de la division de $N - a^2$,

$$q + \frac{r}{2a} = b + \frac{b^2}{2a} \qquad (1)$$

On a évidemment $r < 2a$, $b^2 < a$; car la valeur relative de a contient $2k+1$ chiffres, tandis que b^2 en renferme au plus $2k$; donc si $b < q$ la différence

$$b - q = \frac{r - b^2}{2a} < 1;$$

si au contraire $b > q$ la différence

$$q - b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - r}{a} < \frac{1}{2}.$$

Il suit de là, qu'en prenant le quotient entier q pour la partie cherchée b, $a+q$ sera la racine carrée extraite à moins *de 1 près si c'est par défaut*, et à moins *de 1/2 près si c'est par excès.*

Or l'égalité (1) montre que, si $b = q$, on a $r = b^2 = q^2$; si $b > q$ on a $r > b^2$ et à plus forte raison $r > q^2$; enfin

$b < q$ donne $r < b^2$, et à plus forte raison $r < q^2$: donc réciproquement 1° si $r = q^2$ on a $b = q$, alors $a + q$ est la racine carrée parfaite ; 2° si $r > q^2$ on a $b > q$, et $a + q$ est la racine carrée extraite par *défaut* à *moins d'une unité près*. Enfin 3° si $r > q^2$ on a $b > q$, et partant $a + q$ est la racine carrée extraite par *excès* à *moins d'une demi-unité près*.

Ayant ainsi trouvé par la division les k derniers chiffres de la racine carrée approchée, il s'agit de déterminer le véritable reste R, je veux dire la différence entre le nombre N et le carré de sa racine $a + q$ par défaut, sans effectuer ce carré ni même former de double produit. Voici comment :

1° Lorsque la racine est extraite par défaut, si l'on appelle ε l'erreur que l'on commet en prenant q pour b, on aura $b = q + \varepsilon$, et par conséquent le reste

$$R = (a + q + \varepsilon)^2 - (a + q)^2 = 2(a + q)\varepsilon + \varepsilon^2 ;$$

d'ailleurs la substitution de $q + \varepsilon$ pour b dans l'égalité (1) donne, toute réduction faite, $2(a + q)\varepsilon + \varepsilon^2 = r - q^2$; donc le reste $R = r - q^2$.

2° Lorsque la racine est extraite par excès, la différence $q^2 - r$ indique ce qui manque au nombre N pour être carré parfait ; en effet on a alors, $q = b - \varepsilon$, et le manque $(a + q)^2 - N = (a + q)^2 - (a + q - \varepsilon)^2 = 2(a + q)\varepsilon - \varepsilon^2$; d'une autre part, en remplaçant b par $q - \varepsilon$ dans l'égalité (1), il vient $2(a + q)\varepsilon - \varepsilon^2 = q^2 - r$; donc le manque $(a + q)^2 - N = q^2 - r$. Il est aisé de voir par là qu'on obtiendra le reste R en retranchant le manque $q^2 - r$ augmenté de 1 du double de la racine trouvée, savoir :

$$R = 2(a + q) - (q^2 - r + 1).$$

Il n'y a dans cette détermination de R qu'un seul calcul pénible, c'est celui de q^2.

Les deux exemples suivants achèveront l'explication.

I. Soit à extraire la racine carrée de 199996164

```
√199996164 = 141
  99|24
    399|281
    118
```

Ayant obtenu trois chiffres, on peut calculer les deux suivants par une simple division que voici.....

```
11861|64|282|00
  581    42
   1764
```

On a ici $N - a^2 = 1186164$, $2a = 28200$, et l'on trouve

$$q = 42,\ r = 1764.\ \text{Or}\ q^2 = 1764,$$

donc $r = q^2$ et par conséquent 14142 est la racine carrée parfaite.

II. Extraire la racine carrée de 3.

On aura d'abord

$$\sqrt{3} = 1,732 \text{ et } R = 176.$$

On trouvera maintenant les trois chiffres suivants par la division ci-contre.....

```
176000|3464
  2800  050
```

On a ainsi : $q = 050$. $r = 2800000$; et comme $q^2 = 2500$ la racine est extraite par défaut ; par suite

$$R = r - q^2 = 2797500, \text{ et } \sqrt{3} = 1,732050.$$

En continuant, on déterminera les 6 chiffres suivants par la division ci-contre.....

```
27975000000|00|34641|00
    262200      807569
     197130
      239250
       314040
        2271
```

On obtient $q = 807569$ et $r = 227100000000$; il est facile de voir ici que $r < q^2$; en conséquence

$$\sqrt{3} = 1,732050807596$$

est extraite par excès à moins de 1/2 près.

Pour déterminer le reste R, on a d'abord

$$q^2 = 652167689761$$

et ensuite le manque $q^2 - r = 425067689761$; par conséquent

$$R = 2(a+q) - (q^2 - r + 1) = 2039033925376.$$

On peut maintenant trouver les 12 chiffres suivants, etc... Si l'on veut vérifier la racine trouvée en employant la preuve par 11, on n'a pas besoin de calculer R, ni $q^2 - r$; il suffit de connaître q et r. L'explication en serait superflue.

THÉORIE

Des points associés dans l'ellipse et théorème de Fagnano;

PAR M. V. O. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

I. Théorème. Dans chaque quadrant d'ellipse, on peut toujours trouver deux points tels que les normales qui passent par ces points sont à une même distance donnée du centre; deux points ainsi déterminés sont des *points associés*.

Démonstration. Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation de l'ellipse; coordonnées rectangulaires; celle de la normale au point (x', y') est

$$y = \frac{a^2y'x}{b^2x'} - \frac{a^2e^2}{b^2}y'; \quad \text{ou} \quad a^2e^2 = a^2 - b^2;$$

on a donc pour la perpendiculaire p abaissée du centre sur cette normale,

$$v = e^2 x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}};$$

d'où l'on déduit

$$e^4 x^4 - (a^2 e^2 + p^2)\, e^2 x^2 + a^2 p^2 = 0; \qquad (1)$$

et $$2e^2 x^2 = a^2 e^2 + p^2 \pm \sqrt{(a^2 e^2 + p^2)^2 - 4a^2 p^2}.$$

La quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(a+b+p)\,(a-b+p)\,(a+b-p)\,(a-b-p);$$

or $p < a$, donc les trois premiers facteurs, sont positifs; pour que le quatrième soit aussi positif, on doit avoir $p < a - b$; et dans ce cas, $e^2 x^2$ a deux valeurs réelles et positives; donc x a deux valeurs réelles et de même signe. C. Q. F. D.

Corollaire. La plus grande valeur de p est $a - b$; et alors les deux points associés se confondent; et l'on a pour les coordonnés de ce point associé *double* :

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}};\ y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

II. *Relation entre les abscisses des points associés.*

Soient x et ξ les abscisses de deux points associés; l'équation (1) donne :

$$x^2 + \xi^2 = \frac{a^2 e^2 + p^2}{e^2};\ x^2 \xi^2 = \frac{a^2 p^2}{e^4};$$

éliminant p^2, il vient $a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + e^2 x^2 \xi^2 = 0$ (2), relation cherchée qui peut prendre cette forme

$$(a^2 - x^2)\,(a^2 - \xi^2) = (1 - e^2)\, x^2 \xi^2.$$

Corollaire I. A $x = 0$ correspond $\xi = a$, donc les deux sommets sont des points associés; ce qui est évident à priori, puisque alors, pour les deux points, $p = 0$.

Corollaire II. x augmentant, ξ diminue et *vice versâ*.

Corollaire III. En résolvant l'équation de relation, on trouve :

$$\frac{a}{x}=\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}}; \quad \frac{a}{\xi}=\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

III. Théorème de Fagnano.

Différentiant l'équation de relation (2) et divisant par $ax\xi$, il vient

$$\frac{adx}{\xi}+\frac{ad\xi}{x}=\frac{e^2}{a}d(x\xi);$$

ou bien

$$dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}+d\xi\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}}=\frac{e^2}{a}d(x\xi);$$

intégrant entre les limites x_0 et x auxquelles répondent ξ_0 et ξ, on aura :

$$\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}-\int_{\xi}^{\xi_0}d\xi\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}}=\frac{e^2}{a}x\xi-\frac{e^2}{a}x_0\xi_0=p-p_0$$

la première intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par s=arc (ξ, ξ_0) ; et la seconde intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par σ=arc (ξ, ξ^0) ; donc arc (x_0, x)—arc $(\xi, \xi_0)=p-p_0$ (a) ; faisant $x=0$, l'équation (a) devient arc (o, x)—arc $(\xi, a)=p$; ce qui est précisément l'équation de Fagnano (V. Cauchy, *Appl. géom. du calc. infin.*, t. II, p. 24) ; l'équation (a) revient à l'équation (108) de l'ouvrage cité.

CONCOURS D'AGRÉGATION — 1845.

(V. p. 461.)

—

Sujets d'argumentation.

1 Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.

2 Série de Taylor pour une et plusieurs variables.
3 Théorie des maxima et des minima.
4 Théorie de la courbure des surfaces.
5 Intégration des équations aux différences partielles du premier ordre.
6 Principes du calcul des variations.
7 Principe des vitesses virtuelles.
8 Mouvement de rotation; pressions sur l'axe.
9 Théorie du mouvement curviligne.
10 Principe des forces vives; stabilité de l'équilibre.
11 Équations générales du mouvement des fluides.
12 Théorie des corps flottants.

Sujets de leçons.

1 Règles des signes de Descartes.
2 Logarithmes en Arithmétique.
3 Première leçon de géométrie descriptive.
4 Détermination du rapport de la circonférence au diamètre.
5 Théorie des foyers dans les lignes du second ordre.
6 Analyse indéterminée du premier degré.
7 Théorie des tangentes et extension aux courbes d'un degré supérieur.
8 Equilibre du levier et de la vis.
9 Théorie des angles trièdres.
10 Théorie des sections du cône; position remarquable des foyers.
11 Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.
12 Règles de trois et de société.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

De la question d'analyse, proposée au concours d'agrégation en 1845. (V. p. 461.)

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉRÉ,
professeur au collége de Nantes, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

I. *La projection de la spirale conique sur le plan principal passant par le sommet perpendiculairement à l'axe est une spirale logarithmique.*

Démonstration. — Soit S le sommet du cône ; M, un point de la spirale conique et M' sa projection sur le plan principal, que nous pouvons supposer être horizontal, et soit MT, la tangente à la spirale conique au point M et T la trace horizontale de cette tangente ; dans le tétraèdre MSM'T, les angles SMM', SMT sont donnés et l'angle dièdre formé par le plan de ces angles est droit ; donc ce tétraèdre est toujours semblable à lui-même, quelleque soit la position de M ; l'angle M'TS est donc constant ; or M'T, projection horizontale de la tangente, est la tangente à la projection de la spirale conique ; et cette dernière tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur SM', donc, etc.

II. *La tangente à la spirale conique a une inclinaison constante sur l'axe,*

Démonstration. — Car l'angle M'MT du tétraèdre (1) est constant.

Coroll. 1. Si par un point de l'espace, on mène une parallèle à une tangente à la spirale conique, le lieu géométri-

que de cette parallèle est un cône droit dont l'axe est parallèle à celui du cône donné.

Coroll. 2. Toutes les tangentes sont également inclinées sur le plan horizontal.

III. *La longueur d'un arc de la spirale conique divisée par la longueur de ce même arc projeté, donne un quotient constant.*

Démonstration. La proposition est évidente pour chaque arc élémentaire ; elle est donc vraie pour la somme de ces arcs élémentaires ou pour les arcs de grandeur finie.

Coroll. 1. La spirale logarithmique est rectifiable ; la spirale conique est donc aussi rectifiable.

Coroll. 2. Le quotient constant est séc. MTM'.

IV. *L'aire de l'espace conique compris entre deux génératrices et un arc de la spirale conique, divisée par l'aire de sa projection horizontale, donne un quotient constant.*

Démonstration. La même que pour la proposition précédente.

Coroll. 1. La spirale logarithmique est carrable, on sait donc aussi carrer l'espace conique.

Coroll. 2. Le quotient constant est la sécante de l'angle dièdre formé par les plans STM, STM' dans le tétraèdre (1).

V. *Le plan osculateur de la spirale conique a une inclinaison constante sur l'axe du cône et égale à l'inclinaison de la tangente sur l'axe.*

Démonstration. Par le point de rencontre du plan osculateur et de l'axe, concevons des parallèles à toutes les tangentes ; elles forment un cône droit (II, coroll. 1) ; le plan osculateur contient deux tangentes consécutives, il est donc tangent à ce cône, donc, etc.

VI. *La normale principale de la conique spirale est horizontale ; l'axe étant vertical.*

Démonstration. Par le point M de la spirale conique, concevons le plan osculateur rencontrant l'axe en un point O, et par OV menons une parallèle OV à la tangente MT; elle est dans le plan osculateur, qui est perpendiculaire au plan méridien VOS; car le plan osculateur est tangent au cône droit des parallèles (V); le plan normal en M étant perpendiculaire à la tangente MT est perpendiculaire à sa parallèle OV et par conséquent au plan méridien VOS; les deux plans, osculateur et normal, étant perpendiculaires au même plan méridien, leur intersection est aussi perpendiculaire à ce même plan méridien; or cette intersection donne la direction de la normale principale, donc, etc.

VII. *La projection horizontale de la normale principale est normale à la spirale logarithmique, projection de la spirale conique.*

Démonstration. La normale principale étant horizontale est perpendiculaire au plan vertical projetant MM'T (1); et par conséquent la projection de ce rayon de courbure est perpendiculaire à M'T, tangente à la spirale logarithmique, donc, etc.

Coroll. La plus courte distance de la normale principale de la spirale conique à l'axe est égale à la distance du pôle de la spirale logarithmique, à la normale correspondante.

VIII. Théorème. Six droites passent par le point M de la conique spirale : 1° la génératrice du cône; 2° la tangente MT; 3° le rayon du cercle parallèle; 4° la tangente à ce cercle; 5° la normale principale; 6° la parallèle à l'axe du cône; les quinze angles formés par ces droites, prises deux à deux, sont constants.

Démonstration. Pour un autre point M' de la spirale conique, ramenant les deux génératrices l'une sur l'autre, les six droites en M deviennent parallèles aux six droites en M', donc, etc.

IX. *Les centres de courbure de la spirale conique sont*

sur un cône droit de même sommet et de même axe que le cône donné.

Démonstration. En ramenant, comme dans le théorème précédent, les génératrices l'une sur l'autre, les plans osculateurs respectifs deviennent parallèles ; les rayons de courbure sont donc proportionnels aux distances MS et M'S ; les droites qui joignent le sommet aux centres de courbure font des angles constants avec l'axe du cône, donc, etc.

X. *La projection horizontale de la courbe des centres de courbure de la spirale conique est une spirale logarithmique.*

Démonstration. Le rayon de courbure de la spirale conique et le rayon du cercle parallèle sont dans un rapport constant ; et se projettent suivant leurs véritables grandeurs ; le rayon de courbure de la spirale logarithmique et le rayon vecteur correspondant sont aussi dans un rapport constant ; et ce rayon vecteur n'est autre que la projection horizontale du rayon du cercle ; donc le rayon de courbure de la spirale logarithmique et celui de la spirale conique sont dans un rapport constant ; mais la développée de la spirale logarithmique est une spirale logarithmique, donc, etc.

XI *En développant le cône donné sur un plan tangent, la spirale conique se développe suivant une spirale logarithmique.*

Démonstration. Les tangentes de la spirale conique développée font des angles constants avec les rayons vecteurs, donc, etc.

XII. *La tangente à la spirale conique trace sur un plan perpendiculaire à l'axe une spirale logarithmique.*

Car la spirale conique se projette sur un tel plan, suivant une spirale logarithmique, et la tangente à la spirale conique trace sur ce plan une courbe semblable (voir p. 454).

XIII. *Le lieu des centres des courbures de la spirale conique est une spirale conique*

Démonstration. Ce lieu est situé sur un cône droit (IX) et

a pour projection horizontale une spirale logarithmique (X); donc, etc.

Note. Soit une surface développable sur laquelle on a tracé une trajectoire coupant tous les éléments rectilignes suivant un angle donné; développant sur un plan tangent, les éléments rectilignes deviennent des tangentes à l'arête de rebroussement développée, et la trajectoire développée coupe toutes les tangentes suivant le même angle donné; si l'angle donné est droit la trajectoire développée devient une développante de l'arête de rebroussement développée; si l'arête se réduit à un point, ce qui est le cas des surfaces coniques, la trajectoire développée est une spirale logarithmique; et si le sommet est à l'infini, si la surface devient cylindrique, la trajectoire sur le cylindre est une hélice et sa développée est une droite. Tm.

NOTE

Sur la mesure des hauteurs.

PAR M. L. A. LE COINTE.

—

On sait que parmi les nombreuses applications de la trigonométrie rectiligne, il en est une dont l'objet est de déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible :

Pour cela, sur le terrain, supposé de niveau, on mesure une base BC (*fig.* 55), à partir du pied de l'édifice; et on place en C le pied d'un graphomètre avec lequel on mesure l'angle ADE, formé par DA avec l'horizontale DE parallèle à CB. Ensuite, au moyen de la formule

$$AE = DE \tan ADE,$$

on détermine AB = AE + BE (hauteur du pied du graphomètre).

Mais remarquons qu'en mesurant l'angle ADE, on peut commettre une erreur, laquelle en introduit une aussi sur la hauteur de l'édifice.

Cela posé, ne tenant pas compte de l'erreur que l'on peut commettre en mesurant la base BC, et n'ayant égard qu'à celle qui est commise dans la mesure de l'angle ADE (nous supposons cet angle mesuré toujours avec la même approximation, quelle que soit d'ailleurs la base BC que l'on ait choisie), nous allons nous proposer de résoudre la question suivante :

Déterminer le rapport qui doit exister entre la base BC et la hauteur AE de l'édifice, prise au-dessus de l'horizontale DE, pour qu'on obtienne la hauteur de l'édifice le plus exactement possible.

Désignons, d'abord, l'angle ADE par φ, et soit α l'erreur commise dans la mesure de cet angle (α peut être une quantité positive ou négative); alors, $\varphi + \alpha$ sera la mesure de l'angle ADE telle qu'on l'a obtenue.

Maintenant soit δ l'erreur introduite dans la mesure de AE (δ peut être une quantité positive ou négative) par suite de celle commise sur l'angle D, et désignant par λ la longueur exacte de AE, $\lambda + \delta$ sera la mesure de AE telle qu'on l'a obtenue.

Cela posé, on a la relation

$$\lambda = \beta \operatorname{tang} \varphi$$

en désignant la base BC par β

Mais, entre les quantités $\lambda + \delta$ et $\varphi + \alpha$, on a aussi la relation

$$\lambda + \delta = \beta \operatorname{tang} (\varphi + \alpha);$$

d'où

$$\delta = \beta [\operatorname{tang} (\varphi + \alpha) - \operatorname{tang} \varphi],$$

et comme on a $\beta = \frac{\lambda}{\operatorname{tang} \varphi}$, on aura

$$\delta = \frac{\lambda}{\operatorname{tang} \varphi} \left[\operatorname{tang} (\varphi + \alpha) - \operatorname{tang} \varphi\right],$$

ou bien

$$= \frac{\lambda \cos \varphi}{\sin \varphi} \left[\frac{\sin (\varphi + \alpha)}{\cos (\varphi + \alpha)} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right] =$$

$$= \frac{\lambda \left[\sin (\varphi + \alpha) \cos \varphi - \sin \varphi \cos (\varphi + \alpha)\right]}{\sin \varphi \cos (\varphi + \alpha)},$$

$$\delta = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sin \varphi \cos (\varphi + \alpha)},$$

ou enfin

$$\delta = \frac{\lambda \sin \alpha}{\frac{1}{2} \sin (2\varphi + \alpha) - \frac{1}{2} \sin \alpha}.$$

Cette formule nous montre immédiatement que l'erreur δ sera la plus petite possible lorsqu'on aura

α le plus petit possible,

et $2\varphi + \alpha = 90°$.

Ces deux conditions réunies expriment que l'angle φ doit être sensiblement égal à 45°, ou en d'autres termes, que le rapport $\frac{BC}{AE}$ doit être à peu près égal à l'unité.

Ainsi, dans la pratique, si l'on tient à avoir la hauteur AB de l'édifice, avec une grande approximation, il faudra choisir (à vue d'œil) la base BC telle que l'on ait sensiblement BC = AE, ou que l'angle ADE soit à peu près égal à 45°, et ensuite on calculera cet angle avec l'approximation voulue.

Note. On trouve dans *Cagnoli* (ch. XI, § 302) les corrections à faire pour avoir la mesure précise des hauteurs.

CORRESPONDANCE

relative aux Examens de Strasbourg.

—

Monsieur le Rédacteur,

Tout ce qui peut intéresser l'enseignement des sciences a trouvé place jusqu'ici dans votre excellent journal. Oserai-je réclamer de votre obligeance l'insertion des deux lettres que je vous envoie ici. La première est la copie d'une lettre que j'ai écrite à M. Lefebure de Fourcy; la seconde est la réponse que vient de faire M. l'examinateur. Je ne dirai rien sur les faits qu'énonce ma lettre : cela parle de soi-même.

Recevez l'assurance de mon attachement sincère.

FINCK.

Strasbourg, ce 20 octobre 1845.

A Monsieur Lefebure de Fourcy, examinateur.

Monsieur,

Il résulte de témoignages certains qu'en examinant un de nos élèves dans le courant de septembre dernier, vous avez traité de *sa.....ie* l'enseignement mathématique du Collége royal de Strasbourg (*). Je sais parfaitement que, en votre qualité d'examinateur : 1° vous n'êtes pas mon supérieur, hiérarchiquement parlant; 2° « vous n'êtes ni juge des méthodes » ni en droit d'exiger, comme vous le faites, que les candi- » dats répondent sur la géométrie de Legendre. » Je vous demande donc de vouloir bien rétracter la qualification que

(*) Je n'ai pas assisté aux examens, parce que ce n'est pas moi qui ai fait la classe de mathématiques spéciales cette année 44-45. (Cela ne fait pas partie de ma lettre.)

vous avez lancée sur notre enseignement, et qui, si elle pouvait tomber sur quelqu'un, tomberait sur moi. Quant au blâme que vous avez prétendu exprimer, il porte principalement sur deux points :

1° Nous enseignons la théorie des infiniment petits : *elle est* PRESCRITE *par le conseil royal de l'instruction publique.*

2° Nous définissons la similitude comme elle est définie dans plusieurs ouvrages *adoptés par le même conseil*, et notamment dans la géométrie analytique de M. Lefebure de Fourcy, page 342 de la 4e édition.

Votre attaque ayant été publique, la réponse le sera. Ainsi ma lettre et votre réponse, que j'attendrai jusqu'au 15 novembre, s'il le faut, seront insérées dans le journal Terquem. J'adresse d'ailleurs une copie de ma lettre à M. le Ministre de l'Instruction publique, et une pareille à M. le président du Conseil de perfectionnement de l'École royale polytechnique.

J'ai l'honneur d'être

Votre très-humble serviteur,

FINCK.

Strasbourg, ce 12 octobre 1845.

Réponse de M. Lefebure de Fourcy.

Paris, 15 octobre 1845.

Monsieur et cher confrère,

Vous comprendrez parfaitement qu'après un si long délai j'ai pu oublier plusieurs des choses dont vous me parlez : mais ce que je regrette surtout, c'est de n'avoir pas eu le plaisir de vous voir pendant mon séjour à Strasbourg.

Vous me parlez, Monsieur et cher confrère, comme si le savoir est la méthode d'un professeur se retraçaient toujours avec fidélité dans les élèves qui ont suivi ses leçons ou ses

ouvrages. Cela est vrai dans quelques cas; mais ces cas sont rares, surtout lorsque les méthodes sont fondées sur des considérations fines et délicates. Veuillez donc, je vous prie, séparer entièrement votre cause de celle des candidats, très-nombreux aujourd'hui, qui se présentent aux examens, sans s'y être préparés sérieusement.

Dans votre lettre, Monsieur et cher confrère, vous me faites l'honneur, pour justifier certaines définitions de géométrie, de me rappeler que je m'en suis moi-même servi dans mes leçons de géométrie analytique. Sur ce point je vous dois des remercîments : car j'avoue que je n'aurais point osé, de ma seule autorité, les faire descendre dans la *Géométrie élémentaire*, à laquelle tous les auteurs se sont toujours fait un devoir de conserver une grande simplicité.

Quoi qu'il en soit, Monsieur et cher confrère, je me félicite de trouver cette occasion de vous dire à vous-même toute l'estime que je fais de votre talent. Je l'ai souvent manifestée devant des géomètres habiles, lesquels ont toujours été de mon avis.

Je continuerai donc toujours d'être avec une parfaite considération, Monsieur et cher confrère,

Votre dévoué confrère,

L. Lefebure de Fourcy.

Au moment de faire partir cette réponse, je me rappelle que j'ai été chargé de rendre compte de votre arithmétique, mon opinion a été qu'on devait la juger digne d'être adoptée dans l'enseignement des colléges. Depuis, j'ai eu occasion de faire rectifier une petite erreur qui s'était glissée, à votre préjudice, dans le journal de M. Terquem. — Si je fais mention ici de cette circonstance, c'est dans l'intention seulement de vous faire mieux comprendre qu'il n'y a aucune inimitié

là où vous êtes peut-être disposé à en trouver. Je crois aussi me souvenir que vous avez été soumis à mon examen lors de votre sortie de l'École Polytechnique : c'est de cette époque déjà ancienne que date l'estime que je vous porte.

L. LEFEBURE DE FOURCY.

Note. La lettre de M. Lefebure ne renferme point explicitement la rétractation que je lui ai demandée. Peut-on la regarder comme une rétractation implicite? C'est ce dont le lecteur peut juger lui-même. Quoi qu'il en soit, deux vérités sont énoncées entre autres dans ma propre lettre; elles sont marquées de guillemets. M. Lefebure ne les ayant pas combattues, je dois conclure qu'il les admet d'après le dicton *qui ne dit rien consent*.

FINCK.

Note. Une décision du Conseil royal du 14 septembre 1841 prescrit la méthode des infiniment petits pour les classes de troisième, seconde, rhétorique, dites préparatoires; il n'est pas question des *mathématiques spéciales*; d'ailleurs les examens de l'École Polytechnique ne ressortissent pas de l'Université. TM.

THÉORÈME DE LEXELL,

Et transformation des polygones sphériques, d'après M. Steiner.

(Journal de Crelle, t. II, p. 45. 1827.)

I. THÉORÈME 1. Dans tout quadrilatère sphérique inscrit dans un cercle, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles.

II. Théorème 2. Si deux triangles sphériques ont une base commune et sont inscrits dans le même cercle, la différence entre l'angle au sommet et la somme des angles à la base est la même dans les deux angles, et réciproquement si cette différence est la même pour deux triangles sphériques, ayant même base, ils sont inscrits dans le même cercle.

Observation. Le second théorème est un corollaire immédiat du premier dont la démonstration est facile.

III. Théorème 3. Le lieu des sommets des triangles sphériques équivalents et de même base, est une circonférence. Cette circonférence passe par les deux points diamétralement opposés aux extrémités de la base.

Démonstration. Soit ABC un triangle dont la base AB et l'aire sont données; soient A' et B' les points diamétralement opposés à A et à B; dans le triangle sphérique A'B'C, l'on a $A'=2^q-A$; $B'=2^q-B$; d'où l'on tire $A+B+C=4^q+C-A'-B'$; mais l'aire des triangles étant constante $A+B+C$ est constant, donc aussi $C-A'-B'$; et, d'après la réciproque du théorème précédent, le point C est sur une circonférence passant par les points A',B'; c. q. f. d.

Observation. La première partie de cette proposition est le théorème de Lexell (*Nova acta Petropolitana*, volume V, 1re partie); la seconde partie est de M. Steiner ainsi que toute la démonstration.

Corollaire. Si par les points B,B' on mène un demi grand cercle tangent au cercle CA'B', il est évident que l'aire du faisceau formé par ce demi-cercle et le demi-cercle BAB' est équivalente à l'aire du triangle ABC; soit β l'angle du fuseau; on a donc $2\beta=ABC-2^q$.

IV. *Problème.* Dans un triangle sphérique, on connaît un côté, un angle adjacent et l'aire, construire le triangle.

Solution Soit ABC le triangle à construire; le côté AB et

l'angle B sont donnés, ainsi que l'aire du triangle ABC ; on connaît donc $A+B+C$; avec l'angle B construisons le faisceau BAB'; le point cherché C est situé sur le demi-cercle BMB'; par BB' menons un autre demi-cercle BDB' faisant avec le demi-cercle BAB' un angle β égal à $\frac{1}{2}(A+B+C)-1^{q}$; par le point A' diamétralement opposé à A et par B', menons un petit cercle tangent au demi-cercle BDB'; ce petit cercle coupe le demi-cercle BMB' au point cherché C.

Corollaire I. On peut donc diviser un triangle sphérique en deux parties, dont les aires soient dans un rapport donné par un arc de grand cercle mené du sommet au côté opposé.

Corollaire II. On peut aussi construire un triangle sphérique connaissant un angle, un côté adjacent et le périmètre ; à l'aide du triangle polaire, on ramène ce problème au précédent.

Corollaire III. Le théorème de Lexell, rapporté au triangle polaire, donne cet autre théorème : Dans tout triangle sphérique qui a un angle constant et dont le périmètre est constant, l'enveloppe du côté opposé à l'angle constant est un petit cercle de la sphère.

Corollaire IV. Le théorème de Lexell peut servir à transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

Observation. Lorsque la sphère devient un plan, le théorème de Lexell se réduit à cet énoncé élémentaire : Le sommet d'un triangle de base et d'aires constantes est une droite.

Mais le théorème du corollaire III se change en celui-ci : dans un triangle qui a un angle et un périmètre constants, l'enveloppe du côté opposé à l'angle est une hyperbole, si cet angle est aigu ; une parabole, si l'angle est droit ; une

ellipse si l'angle est obtus; mais jamais un cercle. (Pour la démonstration voir *Annales*, t. III, p. 182.)

V. *Théorème de M. Steiner*. Les trois arcs de grand cercle qui partant des sommets d'un triangle sphérique le partagent en deux parties équivalentes, se coupent en un même point.

Démonstration. Soit ABC le triangle sphérique; A',B',C' les points diamétralement opposés à A,B,C; A*a*,B*b*,C*c*, les trois arcs de grand cercle, bissecteurs d'aire.

D'après le théorème de Lexell, les quatre points A,B,*b*,*a*; de même les quatre points B',C',*c*,*b* et les quatre points A',C', *c*,*a* sont sur de petits cercles; les trois plans de ces petits cercles se rencontrent en un point O; donc les trois droites A'*a*,B'*b*,C'*c* intersections de ces plans passent par le même point O; et les plans des trois arcs de grands cercles bissecteurs A'*a*A, B'*b*B, C'*c*C, passent encore par ce point O; mais ils se rencontrent aussi au centre de la sphère; par conséquent les plans des arcs bissecteurs ont deux points en commun, se coupent suivant la même droite, donc, etc...

Observation. La droite d'intersection des trois plans bissecteurs d'aire ne passe pas par le centre de gravité de l'aire du triangle.

QUESTION D'EXAMEN

sur les cordes des coniques.

(V. p. 520.)

—

QUESTION. *Quel est le lieu géométrique du milieu d'une corde de grandeur constante, inscrite dans une conique?*

I. *Considérations générales*. Une corde de longueur con-

stante étant inscrite dans une conique, l'enveloppe est une ligne du quatrième degré. On trouve le point de contact de chaque corde avec l'enveloppe, en projetant sur cette corde le point d'intersection des deux normales menées à la courbe donnée, par les deux extrémités de la corde ; ce même point d'intersection, joint à un point quelconque de la corde, donne la direction de la normale à la courbe que décrit ce point pendant le mouvement de la corde (t. II, p. 289 et t. III, p. 187). On sait donc, à chaque position de la corde, mener une tangente par le point milieu à la courbe décrite par ce point milieu.

II. *Expression analytique de la longueur d'une corde inscrite dans une conique.*

Soit l'équation à six termes d'une conique; axes rectangulaires ; et $dy+ex+f=0$ (1) l'équation d'une sécante ; les équations donnant respectivement les deux abscisses, et les deux ordonnées des deux points d'intersection de la droite et de la conique, sont (*voir* t. II, p. 108) :

$$Rx^2+Sx^2+T=0\ (3);\ Ry^2+S'y+T'=0\ (4);\ R=Ae^2-Bde+Cd^2;$$
$$S=2Aef-Bdf-Dde+Ed^2;\ T=Af^2-Ddf+Fd^2.$$

On trouve T' et S' en changeant d en e, A en C, D en E, et *vice versâ*. Le carré de la différence des racines dans l'équation (3) est $\frac{S^2-4RT}{R^2}$, et dans l'équation (4), $\frac{S'^2-4RT'.}{R^2}$.

Désignant par p la longueur de la corde interceptée, on a donc :

$$p^2=\frac{S^2-4RT+S'^2-4RT'}{R^2}=\frac{V}{R^2}(d^2+e^2) \qquad (4)$$

$$V=l'd^2-2den+le^2+mf^2+2fdk'+2fek.$$

Faisant $e=dr$, $f=ds$, l'équation (1) prend la forme

$$y+rx+s=0; \qquad (5)$$

et l'équation (4) devient :

$$p^2 = \frac{(1+r^2)(l'-2rn+lr^2+ms^2+2k's+2krs)}{(Ar^2-Br+C)^2}. \quad (6)$$

III. Théorème. Le lieu géométrique du milieu d'une corde de longueur constante inscrite dans une conique à centre, est une ligne du quatrième degré concentrique à la conique.

Démonstration. Prenons pour axes, les deux diamètres principaux, l'équation de la conique est :

$$Ay^2+Cx^2+F=0;\quad k=k'=n=0;\quad l=-4AF;$$
$$l'=-4CF;\quad m=-4AC.$$

Conservons les mêmes données que dans le paragraphe précédent, l'équation (6) devient :

$$p^2(Ar^2+C)^2=-4(1+r^2)[F(Ar^2+C)+ACs^2]. \quad (7)$$

Désignant par x' et y' les coordonnées du point milieu de la corde, on a :

$$x'=-\frac{S}{2R}=-\frac{Ars}{Ar^2+C};\ y'=-\frac{S'}{2R}=-\frac{Cs}{Ar^2+C}, \quad (8)$$

et l'on a aussi $y'+rx'+s=0$; mais deux de ces trois équations impliquent la troisième ; y' et x' étant les coordonnées courantes du point milieu, nous supprimons les accents, et pour avoir le lieu cherché, nous éliminons r et s entre les équations (5), (7) et (8); éliminant d'abord s entre les équations (5) et (8), il vient après avoir divisé par r,

$$Ary-Cx=0;\ \text{d'où}\ r=\frac{Cx}{Ay};\ s=-\frac{Ay^2+Cx^2}{Ay};$$

portant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient, après avoir ôté le facteur Ay^2+Cx^2 :

$$4(A^2y^2+C^2x^2)(Ay^2+Cx^2+F)+ACp^2(Ay^2+Cx^2)=0. \quad (9)$$

Telle est l'équation du lieu cherché, courbe du quatrième degré, concentrique à la conique donnée; ce qui était évident *à priori*. $x=y=0$ satisfont à l'équation; donc l'origine est sur la courbe ou est conjuguée à la courbe. Lorsque $c=0$, l'équation se réduit à $Ay^2+Cx^2+F=0$, c'est-à-dire à la conique donnée; ce qui est encore évident.

DISCUSSION.

IV. *Ellipse*. Soit a le demi-grand axe et b le demi-petit axe; l'équation (9) peut se mettre sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l} 4a^6y^4+4a^2b^2x^2y^2(a^2+b^2)+4b^6x^4+ \\ +a^4b^2y^2(p^2-4a^2)+a^2b^4x^2(p^2-4b^2)=0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Résolvant, il vient :

$$8a^4y^2=-b^2\left[4(a^2+b^2)x^2+a^2(p^2-4b^2)\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{16(a^2-b^2)^2x^4-8a^2(a^2-b^2)(p^2+4a^2)x^2+a^4(p^2-4a)^2}\right],$$

ou bien :

$$8a^4y^2=-b^2\left\{4(a^2+b^2)x^2+a^2(p^2-4a^2)\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{[4x^2(a^2-b^2)-a^2(p+2a)^2][4x^2(a^2-b^2)-a^2(p-2a)^2]}\right\},$$

équation qui rend facile la construction de la courbe, lors même que la conique n'est pas tracée.

1° Si p est supérieur ou égal à $2a$, l'équation n'est possible que pour les valeurs réelles $x=y=0$; donc la courbe se réduit à son centre.

2° $p<2a$ et $>2b$; la courbe est un *huit de chiffre* passant par le centre; la tangente parallèle au grand axe a pour équation $y=\dfrac{b}{2a}\sqrt{4a^2-p^2}$.

Désignant le coefficient angulaire de la tangente (coefficient différentiel) par y', on a :

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}\cdot\frac{8b^4x^2+4a^2y^2(a^2+b^2)+a^2b^2(p^2-4b^2)}{8a^4y^2+4b^2x^2(a^2+b^2)+a^2b^2(p^2-4a^2)};$$

ou bien, prenant la dérivée sur l'équation résolue, on trouve :

$$4a^4yy' = (a^2 - b^2)x \frac{[8x^2(a^2 - b^2) - 2a^2(p^2 + 4a^2)]}{\sqrt{X}};$$

où X est la fonction de x qui est sous le radical, dans la valeur de y^2; y' devient nul en faisant $x=0$, et $x^2 = \frac{a^2(p^2+4a^2)}{4(a^2-b^2)}$; mais cette seconde valeur rend y^2 imaginaire; y' devient infini lorsque $X = 0$; ce qui donne :

$$x^2 = \frac{a^2(p+2a)^2}{4(a^2-b^2)} \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{a^2(p-2a)^2}{4(a^2-b^2)}.$$

La première valeur rend y^2 négatif, la deuxième valeur donne $y^2 = \frac{1}{4}\frac{b^2}{a} \cdot \frac{2a-p \,.\, pa-2b^2}{a^2-b^2}$; le second membre est positif; on connaît donc la position des deux tangentes parallèles à l'axe des y.

Le système des deux diamètres égaux chacun à p est donné par l'équation $a^2(p^2-4b^2)y^2 - b^2(4a^2-p^2)x^2 = 0$.

3° $p < 2a$; $p = 2b$; le système des diamètres égaux se réduit au petit axe.

4° $p < 2a$; $p < 2b$; le système des diamètres égaux disparaît ; la courbe n'a plus de points multiples au centre, qui devient un point isolé et conjugué ; la forme est ellipsoïdale et elle est inscrite dans le rectangle formé par les tangentes parallèles aux axes ; les équations de ces tangentes sont :

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-p^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-p^2}.$$

5° Si $a = b$, l'équation (10) devient :

$$(y^2+x^2)[4(y^2+x^2)+p^2-4a^2] = 0,$$

qui représente un point conjugué et un cercle, ainsi que l'enseigne la géométrie élémentaire.

V. *Hyperbole*. Prenant $2a$ pour l'axe focal, l'équation du lieu cherché est :

$$\left.\begin{array}{l}4a^6y^4-4a^2b^2x^2y^2(a^2-b^2)-4b^6x^4-\\-a^4b^2y^2(p^2-4a^2)+a^2b^4x^2(p^2+4b^2)=0\end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Les termes du quatrième degré sont :

$$4(a^4y^2+b^4x^2)(a^2y^2-b^2x^2).$$

Ainsi la courbe formée par les cordes intérieures a les mêmes asymptotes que l'hyperbole, ou plutôt l'hyperbole est une asymptote curviligne à la courbe du quatrième degré; ce qu'on peut voir *à priori*, puisqu'à l'infini l'hyperbole se confond avec ses asymptotes. Lorsque p est égal ou inférieur à l'axe focal, il n'y a point de courbe à l'extérieur, et le centre est un point conjugué; mais lorsque p est plus grand que l'axe focal, il existe une courbe correspondante aux cordes extérieures, ayant une forme lemniscoïde, et la détermination des tangentes limites a lieu comme ci-dessus.

1° Il est facile de voir, par la comparaison des équations, que la courbe du quatrième degré, soit pour l'ellipse, soit pour l'hyperbole, ne peut devenir ni une cassinoïde ni une lemniscate.

2° Si $a=b$, l'équation (11) devient :

$$4(y^4-x^4)+p^2(x^2-y^2)+4a^2(x^2+y^2)=0.$$

3° Faisant $b=ah$, l'équation de l'hyperbole est :

$$y^2-h^2x^2=-b^2,$$

et l'équation (11) devient :

$$\begin{array}{l}4y^4+4h^2x^2y^2(h^2-1)-4h^6x^4-p^2h^2(y^2-h^2x^2)+\\+4b^2(y^2+4h^4x^2=0.\end{array}$$

Faisant $b=0$, l'hyperbole se réduit à deux droites, et l'équation du lieu prend cette forme :

$$(y^2-h^2x^2)(4y^2+4h^4x^2-p^2h^2)=0.$$

Le premier facteur représente le système des deux droites, et le second une ellipse rapportée à des diamètres conjugués; ce qui s'accorde avec le théorème connu sur le lieu décrit par un point d'une droite d'une longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne (*voir* p. 186).

VI. *Parabole.* Soit l'équation de cette courbe, axes rectangulaires, $Ay^2 + Ex = 0$; d'où

$$k = 2AE, \quad l' = E^2, \quad m = l = k' = n = 0.$$

L'équation (4) donne :

$$Ar^4p^2 = E(1+r^2)(E + 4Ars). \qquad (12)$$

Désignant par x, y les coordonnées courantes du milieu de la corde, on trouve :

$$y = \frac{E}{2Ar}; \quad r = \frac{E}{2Ay}; \quad s = -y - rx = -\frac{2Ay^2 + Ex}{2Ay}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (12), on trouve pour équation du lieu cherché, après avoir fait $E = -2qA$,

$$4(y^2 + q^2)(y^2 - 2qx) + p^2q^2 = 0,$$

ligne qui a pour asymptote curviligne la parabole donnée, comme cela doit être.

Cette équation résolue donne :

$$2y^2 = q\left[2x - 4q \pm \sqrt{(2x - 4q + p)(2x - 4q - p)}\right].$$

VII. Les moyens de solution sont les mêmes, si l'on demandait, en général, à trouver le lieu géométrique d'un point dont les coordonnées sont respectivement des *fonctions symétriques* quelconques des coordonnées des extrémités de la corde; car r est donné en fonction de s; et les équations (3) et (4) fourniraient, par la théorie des fonctions symétriques, deux équations entre les coordonnées du point et la quantité s; éliminant s, on aura le lieu cherché. Tm.

ÉQUATIONS POLAIRES.

PAR M. MIDY,
ancien professeur dans les Colléges royaux.

I. *Discussion de la droite*,

Dans la plupart des traités de géométrie analytique, on ne discute guère d'autres équations polaires que celles des trois courbes du second degré, ramenées à leurs formes les plus simples. Encore ne donne-t-on pas en général le moyen de construire ces courbes en partant de ces mêmes équations. Cependant les élèves, dans les examens, ont fréquemment à discuter des courbes polaires d'espèces différentes. Nous croyons donc faire une chose utile en montrant, par quelques exemples choisis, comment il est souvent possible de déduire d'une équation polaire donnée non-seulement la construction géométrique de la courbe qu'elle représente, mais encore la détermination précise de ses tangentes, de ses asymptotes, et même de ses points d'inflexion lorsqu'elle doit en avoir.

Dans ce qui suit, nous supposerons connues les méthodes au moyen desquelles on détermine pour chaque point d'une courbe polaire la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente en ce point avec le rayon vecteur et la valeur linéaire de la sous-tangente correspondante. Nous désignerons, pour abréger, la première de ces deux grandeurs par la caractéristique *tg*, et la seconde par *st*; et comme l'équation polaire de la ligne droite, considérée sous ses diffé-

rentes formes, nous sera utile par la suite, c'est par elle que nous commencerons ces discussions.

Soit d'abord l'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega + \cos\omega}, \qquad (1)$$

indiquée dans les *Annales* (tome III, page 608), et qui est celle d'une droite rencontrant les axes rectangulaires OX et OY (*fig*. 56), en A et en B à une distance 1 de l'origine, et par suite parallèle à la bissectrice DE de l'angle YOX'.

La discussion directe de l'équation (1) ne conduirait pas immédiatement à cette conséquence. Voyons toutefois par quelle suite de considérations elle pourrait nous y faire arriver.

Les hypothèses $\omega = 0°$ et $\omega = 90°$ donnant l'une et l'autre $\rho = 1$, on voit de suite que la ligne cherchée coupe les droites rectangulaires OX et OY en A et en B. Puis, pour toutes les valeurs de ω comprises entre les deux précédentes, la somme $\sin\omega + \cos\omega$ est > 1, et il est facile de s'assurer que sa valeur maximum correspond à $\omega = 45°$.

Par suite, entre ces deux limites, ρ est < 1 et sa valeur minimum, égale à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ est la perpendiculaire OC abaissée du point O sur la droite AB. Il est donc reconnu déjà que celle-ci a trois points communs H, C, B avec la ligne cherchée.

D'ailleurs, en faisant varier ω de 90° à 90°+45°, ou de 0° à —45°, la valeur de ρ tend également vers l'infini; au delà de ces limites les valeurs de ρ deviennent négatives, mais leurs valeurs absolues sont égales aux précédentes, d'où il suit que celles-ci suffisent pour déterminer tous les points de la ligne.

Quoique ces premiers résultats indiquent déjà une sorte de contiguïté entre la droite indéfinie NABN' et la ligne cherchée, on ne peut néanmoins en conclure encore l'iden-

tité des deux lignes. Considérons donc la ligne (1) comme une courbe, et nous allons, pour la caractériser davantage, calculer les quantités que nous sommes convenus précédemment de désigner par *tg* et *st*.

De l'équation (1) on déduit :

$$\rho + k = \frac{1}{\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h)},$$

d'où

$$k = -\frac{(\sin(\omega + h) - \sin\omega) - (\cos\omega - \cos(\omega + h))}{(\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h))\ (\sin\omega + \cos\omega)};$$

par suite

$$\frac{h}{k} = = \frac{(\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h)\,.\,(\sin\omega + \cos\omega)}{\cos\left(\omega + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(\omega = \frac{h}{2}\right)} \times \frac{\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h},$$

donc

$$\lim.\ \frac{h}{k} = -\frac{(\sin\omega + \cos\omega)^2}{\cos\omega - \sin\omega};$$

d'où il suit que

$$tg = -\frac{\sin\omega + \cos\omega}{\cos\omega - \sin\omega} \text{ et } st = -\frac{1}{\cos\omega - \sin\omega}.$$

Voyons les conséquences de ces deux formules. Pour $\omega = 0$, elles donnent $tg = -1$ et $st = -1$. D'ailleurs $\rho = 1$. Donc, pour le point A de la ligne (1) la sous-tangente est OB, et la tangente, qui est par suite l'indéfini BA, fait avec le rayon vecteur OA dans le sens AN un angle OAN dont la tangente est -1. D'où il suit que la tangente de son supplément OAN' est $+1$, ce qui d'ailleurs est évident puisque le triangle rectangle OAB est isocèle.

On prouverait de même que, pour le point B, la sous-tangente est OA, et que par conséquent la tangente est AB.

Pour $\omega = 45°$, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $st = \infty$. Donc la tangente au point C est parallèle à DE.

D'ailleurs si l'on fait $\omega = 90^\circ + 45^\circ$, ou bien $\omega = -45^\circ$, l'on a également $\rho = \infty$ et $st = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans le premier cas, et $st = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans le second cas. Donc la droite AB, déjà tangente en A, en C et en B, à la ligne (1) est en outre, tant dans le sens CN que dans le sens contraire CN', une asymptote de cette ligne.

Il est donc reconnu que la ligne (1), qui suit l'indéfini AB dans toute son étendue, la touche dans ses points les plus remarquables. Pour vérifier enfin si cette ligne ne serait pas la droite AB elle-même, cherchons quelle serait la distance de chacun de ses points à la droite DE, parallèle à AB, ou ce qui est l'équivalent, déterminons quelle serait pour chaque valeur de ω, la projection de ρ sur la perpendiculaire OC à ces droites.

Nommons φ l'angle formé avec OX par la droite OC. Pour une position quelconque du rayon vecteur, nous aurons :

$$\cos(\omega - \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\cos\omega + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\omega + \sin\omega);$$

d'ailleurs

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega - \sin\omega},$$

donc

$$\rho\cos(\omega - \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \text{OC}.$$

Ainsi la projection de ρ sur OC est constante. Donc enfin la ligne (1) n'est autre que AB.

On voit, par la discussion précédente, combien il importe d'avoir une équation polaire de la ligne droite assez caractérisée pour que, dans aucun cas, on ne puisse la confondre avec celle d'une autre ligne.

Pour la trouver, prenons sur les axes rectangulaires

OX, OY (*fig*. 57), OA $= a$, OB $= b$ et menons AB; l'équation de cette droite sera

$$ay + bx = ab;$$

par suite son équation polaire sera

$$a \, . \, \rho \sin \omega + b \, . \, \rho \cos \omega = ab,$$

d'où

$$\rho = \frac{ab}{a \sin \omega + b \cos \omega}, \tag{2}$$

équation qui devient identique avec

$$\rho = \frac{1}{\sin \omega + \cos \omega}$$

quand on fait $a = 1$ et $b = 1$.

Quand on fait b infini l'équation (2) se change en

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega};$$

c'est l'équation polaire d'une droite perpendiculaire à OX, ou à l'axe polaire, menée à une distance a du pôle.

De même

$$\rho = \frac{b}{\sin \omega}$$

est une parallèle à cette même droite menée à la distance b.

En appelant α l'angle BAO et p la perpendiculaire OC sur AB, l'équation (2) deviendra :

$$\rho = \frac{p}{\sin \omega \cos \alpha + \cos \omega \sin \alpha},$$

ou

$$\rho = \frac{p}{\sin(\omega + \alpha)}, \tag{4}$$

et c'est la forme sous laquelle on la met ordinairement.

La figure (57) montre en effet que cette équation écrite comme il suit :

$$\rho \sin(\omega + \alpha) = p,$$

exprime que la projection de tous les rayons vecteurs, tels que ON sur OC, est constante et égale à p, ou que la ligne AB est droite.

En renversant le calcul qui précède, on reviendrait aisément de l'équation (4) à l'équation (2) qui l'a produite.

Il est facile de voir que l'équation particulière

$$\rho = \frac{1}{3 \sin \omega - 2 \cos \omega}, \tag{5}$$

indiquée également dans les Annales (tome III, page 608), rentre dans la forme générale :

$$\rho = \frac{ab}{a \sin \omega + b \cos \omega}.$$

Elle est celle d'une droite coupant l'axe polaire en A (*fig*. 58) à la distance $-\frac{1}{2}$ du pôle et la perpendiculaire OY sur cet axe à la distance $OB = \frac{1}{3}$.

On peut d'ailleurs identifier cette équation avec l'équation

$$\rho = \frac{p}{\sin \omega \cos \alpha + \cos \omega \sin \alpha}, \tag{6}$$

en posant l'équation

$$\sin \omega \cos \alpha + \cos \omega \sin \alpha = p\,(3 \sin \omega - 2 \cos \omega),$$

ou

$$\sin \omega\,(\cos \alpha - 3p) + \cos \omega\,(\sin \alpha + 2p) = 0\,;$$

et comme celle-ci doit être satisfaite quel que soit ω, il faut qu'on ait séparément :

$$\cos \alpha - 3p = 0\,,$$
$$\sin \alpha + 2p = 0\,,$$

ou bien

$$\cos\alpha = 3p,$$
$$\sin\alpha = -2p.$$

Élevant au carré et ajoutant, l'on a :

$$1 = 13p^2,$$

d'où

$$p = \pm\frac{1}{13}\sqrt{13};$$

par suite

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{13}\sqrt{13} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \mp\frac{2}{13}\sqrt{13};$$

substituant ces valeurs dans (6) l'on retombe sur l'équation primitive

$$\rho = \frac{1}{3\sin\omega - 2\cos\omega}.$$

II. *Courbe polaire.*

Considérons maintenant l'équation polaire

$$\rho = \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}.$$

(*Fig.* 59.) Soient O le pôle et OX l'axe polaire. Décrivons du centre O et du rayon OA=1 la circonférence ABA'B'. Faisons croître ω depuis 0° jusqu'à 90° : ρ, qui sera positif, croîtra depuis 1 jusqu'à ∞ ; ce qui donnera l'arc AV. De 90° à 180° les valeurs de ρ seront encore positives et en ordre inverse égales aux précédentes ; ce qui donne l'arc V'A'. De 180° à 270° les valeurs de ρ décroîtront de 1 à 0 ; ce qui donnera l'arc A'N'''O. Enfin de 270° à 360° les valeurs de ρ égales aux précédentes, croîtront de 0 à 1 ; ce qui donnera l'arc ON''A.

Voyons comment on déterminera le point N de la courbe

correspondant à une position donnée ON du rayon vecteur. La perpendiculaire MP sur OX étant la valeur correspondante de $\sin\omega$, on fera $MP' = MP'' = MP$; puis menant $P''Q$ parallèle à $P'A$, l'on aura par cette construction :

$$OQ = \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} = \rho.$$

Rabattant du centre O le point Q en N sur la direction ON, le point N ainsi construit sera le point cherché. Si l'on prend l'arc $AM' = AM$, il sera facile de déduire de la position connue du point N, situé sur le rayon ON, celle du point N'' sur ON' : car les rayons vecteurs correspondants seront liés par la relation

$$\rho'\rho'' = 1.$$

Donc si l'on détermine sur la tangente en A au cercle OA un point C également distant de A et de N, la circonférence CA coupera la direction OM en un point N' qui rabattu en N'' donnera la position du second point cherché.

Il sera donc facile de déterminer tant au-dessus qu'au dessous de l'axe polaire autant de points de la courbe que l'on voudra. Cherchons maintenant les valeurs de *tg* et *st*.

D'abord

$$\rho + k = \frac{1+\sin(\omega+h)}{1-\sin(\omega+h)};$$

par suite

$$k = \frac{2\left(\sin(\omega+h)-\sin\omega\right)}{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)} = \frac{4\cos\left(\omega+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)},$$

d'où

$$\frac{h}{k} = \frac{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)}{2\cos\left(\omega+\frac{1}{2}h\right)} \times \frac{\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h};$$

l'on aura donc :

$$\lim.\frac{h}{k}=\frac{(1-\sin\omega)^2}{2\cos\omega},$$

d'où l'on déduira

$$tg=\frac{1}{2}\cos\omega \text{ et } st=\frac{(1+\sin\omega)^2}{2\cos\omega},$$

ou encore $st=\frac{1}{2}\rho\cos\omega$.

De cette dernière expression il résulte, que la sous-tangente en un point quelconque de la courbe est égale à la demi-projection du rayon vecteur correspondant sur l'axe polaire. Ainsi projetant le point N en n sur OX et prenant sur la perpendiculaire en O à ON, $OS=\frac{1}{2}On$, la droite SN sera tangente en N à la courbe considérée. Il résulte des mêmes formules qu'au point O la perpendiculaire OY sur OX est tangente aux deux branches de la courbe : qu'aux points A et A' la sous-tangente OL, est égale à $\frac{1}{2}$OA : que l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente croît depuis le point O, où il est nul, jusqu'au point A où il a atteint sa valeur maximum : que de A en V il décroît sans cesse pour devenir nul à l'infini ; c'est-à-dire, quand la tangente, devenue parallèle à OY, est située à une distance infinie de cette droite.

Proposons-nous enfin en dernier lieu de trouver sur la partie ON″A le point le plus bas. C'est évidemment celui où la tangente est parallèle à OX et où par conséquent l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur est égal à celui que ce dernier fait lui-même avec l'axe. Il sera donc déterminé par la relation

$$\frac{1}{2}\cos\omega=\tang\omega,$$

qui conduit à

$$\tang^4\omega+\tang^2\omega-\frac{1}{4}=0;$$

d'où

$$\tang^2\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

ou, rejetant le signe inférieur,

$$\tang^2\omega=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Pour avoir la position correspondante du rayon vecteur nous ferons la construction suivante. Rabattant E'G en E'H' sur le côté E'B' du carré construit sur OA et projetant H' en H", la moitié AI de la corde AK sera la valeur de tang ω. Faisant AT"=AT'=AI, le point N', conjugué du point N, rabattu en N" sur AT', sera la position du point le plus bas cherché et la courbe aura la forme VNAN"ON'"A'V' indiquée par la figure.

FORMULES FONDAMENTALES

de la trigonométrie sphérique et sur les angles de torsion,

PAR M. H. LEMONNIER,
ancien élève de l'École normale, professeur au collége de Nantes.

—

La plupart des livres élémentaires ne présentent le théorème relatif à la projection d'une ligne brisée sur un axe que pour en faire usage dans le problème de la transformation des coordonnées. Les applications dont ce théorème est susceptible sont cependant si variées et si simples, qu'on ne

saurait lui accorder trop d'importance. On peut y rattacher immédiatement par une discussion fort simple, comme le fait M. Duhamel dans ses conférencee à l'Ecole normale, le théorème que la projection d'une droite sur une axe est égale à la somme de ses projections sur trois directions rectangulaires respectivement multipliées par les cosinus des angles que font ces directions avec l'axe : ce qui donne le cosinus de l'angle de deux droites. Les deux théorèmes ainsi établis de prime abord, on peut en faire dépendre la trigonométrie tout entière. Les démonstrations des formules fondamentales deviennent d'une simplicité remarquable ; et en apportant quelques légers changements aux premières définitions, on pourrait s'épargner bien des discussions fastidieuses et toujours embarrassantes pour les élèves. Si le sujet vous paraissait mériter quelques développements, je me ferais un devoir de vous exposer la manière dont je l'entends. Mais je dois à la vérité de dire que les idées que j'ai à cet égard ne m'appartiennent pas pour le fond : j'en ai puisé le germe aux leçons de M. Duhamel.

L'objet principal de la note que je vous adresse est une démonstration de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique fondée uniquement sur le théorème dont j'ai rapporté plus haut l'énoncé, ainsi que sur une remarque connue que, deux axes rectangulaires étant pris dans un plan, le cosinus de l'angle que fait avec l'un de ces axes une direction quelconque prise dans le plan, est toujours le sinus de l'angle qu'elle fait avec le second axe, pourvu que ce dernier angle soit compté en allant du second axe vers le premier.

Je présente ensuite une démonstration élémentaire des séries qui expriment sin x et cos x ; elle est analogue à celle que l'on doit, je crois, à M. Cauchy pour le développement de l'exponentielle.

1° Soit un triangle sphérique *quelconque* ABC (*fig.* 60) sur une sphère de rayon égal à l'unité. (*V.* t. I, p. 33.)

Projetons le rayon OC sur la direction OB : cette projection est cos a. Mais si dans le plan COA, et du côté de l'angle COA, on mène une perpendiculaire ON sur le rayon OA, et qu'on projette OC sur les deux axes rectangulaires OA, ON, on aura immédiatement, d'après les théorèmes que j'ai rappelés :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos \text{NOB}.$$

Pour transformer le second terme de cette formule, menons en O un plan perpendiculaire au rayon OA, et soit ON' son intersection avec le plan BOA prise du côté de l'angle BOA ; menons d'ailleurs dans ce plan une perpendiculaire ON" à ON'. Il est clair que l'angle NON' sera l'angle A du triangle, et que la droite ON" perpendiculaire à ON' et à OA le sera à la droite OB. La projection de sin b sur OB pourra s'obtenir en prenant ses projections sur ON' et sur ON", et les multipliant ensuite par cos N'OB et cos N"OB. Comme ce dernier cosinus est nul, le terme correspondant disparaît. Puis le cosinus de N'OB est le sinus de BOA ou de c. Donc

$$\sin b \cos \text{NOB} = \sin b \cos \text{A} \sin c.$$

On a par conséquent la formule :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \text{A}.$$

Et elle se trouve établie sans aucune discussion pour tous les cas possibles.

2° Considérons les deux séries :

$$\varphi x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots..$$

$$\psi x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2...7} + \ldots..$$

On déduit des premières notions sur les séries qu'elles sont convergentes pour toutes les valeurs de x.

On a la relation

$$\overline{\varphi x}^2 + \overline{\psi x}^2 = 1.$$

Pour le démontrer, rappelons qu'étant données deux séries dont les modules des termes forment eux-mêmes des séries convergentes, on peut en déduire une série dont la somme soit le produit des sommes des deux séries.

D'après cela, on trouve :

$$\overline{\varphi x}^2 = 1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4}\right)x^4 \ldots \pm$$

$$\pm \left(\frac{1}{12..2_n} + \frac{1}{1..2_{n-2}} + \ldots \frac{1}{12}\right)x^{2n}$$

$$\overline{\psi x}^2 = x^2 - \left(\frac{1}{123} + \frac{1}{123}\right)x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \pm$$

$$\pm \left(\frac{1}{1\ldots 2_{n-1}} + \frac{1}{1.2..2_{n-3}} \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right)x^{2n-1}$$

Le coefficient du terme général dans l'expression de $\overline{\varphi x}^2$ revient :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\left\{1 + \frac{2n.2n-1}{1.2} + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4.} + \frac{2n\ldots 1}{1.2..2n}\right\};$$

et celui du terme général dans l'expression de $\overline{\psi x}^2$ à

$$\frac{1}{1.2\ldots 2n-1}\left\{1 + \frac{2n-1.\,2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n-1\ldots 2}{1.2.3\ldots 2n-1}\right\};$$

mais le développement de $(1-1)^{2n} = 0$, donne

$$0 = 1 - 2n + \frac{2n.2n-1}{1.2} - \frac{2n\ldots 2n-2}{1.2.3} + \ldots - \frac{2n..2}{1.2..2n-1} + \frac{2n..1}{1.2..2n}\Big\}$$

d'où

$$1 + \frac{2n.2n-1}{1.2} + \frac{2n..\,2n-3}{1.2..4} + \ldots + \frac{2n\ldots 1}{1\ldots 2n} =$$

$$= 2n + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n\ldots 2}{1.2..2n-1} =$$

$$= 2n\left\{1 + \frac{2n-1.\,2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n-1.2}{1.2\,.2n-1}\right\};$$

et de là il résulte que les deux coefficients sont égaux.

En ajoutant les deux relations obtenues membre à membre, on aura donc

$$\overline{\varphi x}^2 + \overline{\psi x}^2 = 1.$$

Si on pose $\varphi x = \cos \omega$, on aura donc $\psi x = \sin \omega$, en disposant convenablement du signe de ω.

Cela posé l'expression $\varphi x + \sqrt{-1}\, \psi x$ étant

$$\varphi x + \sqrt{-1}\, \psi x = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + ..$$

Si on prend l'expression

$$\varphi y + \sqrt{-1}\, \psi y = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + ..$$

On en conclura, comme on le fait pour les développements de e^x et de e^y,

$$(\varphi x + \sqrt{-1}\, \psi x)(\varphi y + \sqrt{-1}\, \psi y) = \varphi(x+y) + \sqrt{-1}\, \psi(x+y),$$

ce qui conduit à

$$(\varphi x + \sqrt{-1}\, \psi x)^m = \varphi m x + \sqrt{-1}\, \psi m x;$$

au moins pour toute valeur de m entière et positive.

Cette formule comme celle de Moivre pourrait dès le moment être soumise à la même généralisation et la même discussion, ce qui conduirait à voir que φx et ψx sont des fonctions périodiques à même période. Mais cela n'étant d'aucune utilité pour l'objet que je me propose, je ne m'y arrête pas.

Si l'on prend

$$\varphi x + \sqrt{-1}\, \psi x = \cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega,$$

ce qui précède avec la formule de Moivre donne

$$\varphi m x + \sqrt{-1}\, \psi m x = \cos m\omega + \sqrt{-1} \sin m\omega.$$

Soient donc x et x' deux nombres qui représentent des

grandeurs commensurables entre elles ; on pourra poser $x = m\xi$, $x' = m'\xi$, et si l'on pose

$$\varphi\xi + \sqrt{-1}\,\psi\xi = \cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega,$$

il viendra

$$\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x = \cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega = \cos n + \sqrt{-1}\sin n$$

$$\varphi x' + \sqrt{-1}\,\psi x' = \cos m'\omega + \sqrt{-1}\sin m'\omega = \cos n' + \sqrt{-1}\sin n'$$

on peut donc considérer n et n' comme proportionnels à x et x' : d'où

$$n = \mathrm{K}x\,;$$

et par suite

$$\varphi x = \cos n = \cos \mathrm{K}x = 1 - \frac{x2}{1.2} + \frac{x4}{1..4}$$

$$\psi n = \sin n = \sin \mathrm{K}x = x - \frac{x3}{1.2.3} + \frac{x5}{1.2.3.4.5}.$$

Quant à la constante K, observons pour la déterminer que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ comme on le voit en trigonométrie, ayant l'unité pour limite, quand on fait décroître x indéfiniment, le rapport $\frac{\sin \mathrm{K}x}{x}$ aura K pour limite. Mais puisqu'on tire de la série même $\frac{\sin \mathrm{K}x}{x} = 1 - \frac{x2}{1.2.3} +$ cette limite est l'unité même. Donc $\mathrm{K} = 1$.

Je finirai en communiquant un moyen de déterminer l'angle de torsion ; étant fondé en partie sur des considérations géométriques, il n'entraîne dans aucun calcul pénible. J'y ajoute une solution géométrique d'un problème, traité par une analyse ingénieuse, dans un des derniers volumes du journal de M. Liouville, à savoir que l'hélice est la seule courbe qui ait ses deux courbures constantes.

Lemme I : L'angle de contingence en un point d'une courbe

a pour complément l'angle que fait la normale principale en ce point, avec la tangente en un point infiniment voisin.

En effet, on a pour le cosinus de ce dernier angle

$$\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}+d\frac{dx}{ds}\right\}+\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\left\{\frac{dy}{ds}+d\frac{dy}{ds}\right\}+\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\left\{\frac{dz}{ds}+d\frac{dz}{ds}\right\}$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\rho}{ds}\left\{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}=\frac{\rho}{ds}\,\frac{ds^2}{\rho^2}=\frac{ds}{\rho}=\omega;$$

ω désignant l'angle de contingence, et ρ le rayon de courbure.

Angle de torsion.

Soit M un point quelconque sur une courbe, soit M′ le point correspondant sur l'arête de rebroussement de la surface polaire.

L'angle de contingence en M′ est, comme on le sait, égal à l'angle de torsion en M, puisque les génératrices de la surface polaire sont perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe.

On sait encore que les plans tangents d'une surface développable, sont osculateurs à son arête de rebroussement. Donc, le plan osculateur en M′ est le plan normal en M, et comme le plan normal y est parallèle au plan osculateur en M′, il s'ensuit que les normales principales en M et M′ sont parallèles.

L'angle de contingence en M′ sera donc, d'après le lemme établi, le complément de l'angle que fait la normale principale en M avec la perpendiculaire au plan osculateur en un point infiniment voisin de M.

Si l'on désigne par l, m, n les angles que la normale au plan osculateur en M fait avec les axes des coordonnées, on aura en conséquence pour l'expression de l'angle de torsion ω':

$$\pm\omega' = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}(\cos l + d\cos l) + \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}[\cos m + d\cos m] +$$

$$+\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}(\cos n + d\cos n),$$

c'est-à-dire :

$$\pm\omega' = \rho\frac{d\frac{d\omega}{ds}}{ds}d\cos l + \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}d\cos m + \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.d\cos n$$

Si l'on observe que la relation

$$\cos l\, d\frac{d\omega}{ds} + \cos m\, d\frac{dy}{ds} + \cos n\, d\frac{dz}{ds} = 0$$

donne

$$d\frac{dx}{ds}.\, d\cos l + \ldots = -\left(\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \ldots\right),$$

on a cette autre forme de l'angle de torsion :

$$\pm\omega' = -\frac{\rho}{ds}\left\{\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \cos m\,.d^2\frac{dy}{ds} + \cos n\,.d^2\frac{d_z}{ds}\right\} = -$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left(\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \cos m\, d^2\frac{dy}{ds} + \cos n\, d^2\frac{d_z}{ds}\right).$$

Qu'on veuille déduire de là les expressions ordinaires, il suffira de remarquer que :

$$d^2\frac{dx}{ds} = d.\left\{\frac{d^2x}{ds} - dx\frac{d^2s}{ds.}\right\} =$$

$$= \frac{d^3x}{ds} - 2\frac{d^2xd^2s}{ds^2} - dx\, d.\frac{d^2s}{ds^2}:$$

ce qui, en omettant les termes qui se détruisent, conduit à

$$\pm\omega' = -\frac{1}{\omega ds}(\cos l d^3x + \cos m\, d^3y + \cos n d^3z).$$

Comme on a d'ailleurs :

$$\frac{\cos l}{dy d^2z - dz d^2y} = \frac{\cos m}{dz d^2x - dx d^2z} = \frac{\cos n}{dx d^2y - dy d^2x} = \frac{\rho}{ds^3},$$

il vient :

$$\pm \omega' = \frac{\rho^2}{ds^5} [(y d^2z - dz d^2y) d^3x + (dz d^2 d - dx d^2z) d^3y +$$

$$+ (dx d^2y - dy dx^2) \; d^3z] = \frac{\rho^2}{ds^5} \; [dx \; (d^2y d^3 \; - \; d^2z d^3y) +$$

$$+ dy \; (d^2z d^3x - d^2x d^3z + dz \, (d^2x d^3y - d^2y d^3x)],$$

ce qui se réduit, quand on prend x pour variable indépendante, à :

$$\pm \omega' = \frac{\rho^2}{ds^5} [d^2y d^3z - d^2z d^3x] \, dx.$$

Une courbe dont les deux courbures sont constantes peut se considérer comme limite d'une ligne brisée dont les côtés pris égaux présenteront consécutivement les mêmes angles et qui détermineront deux à deux de proche en proche des plans également inclinés entre eux dans le même sens.

Cela posé, nous allons prouver qu'une pareille ligne brisée peut toujours se considérer comme un polygone de longueur minimum sur une surface prismatique régulière. Quand en multipliant indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée on le fait converger vers la courbe, il est clair que cette surface prismatique convergera vers une surface cylindrique à base circulaire : et la ligne courbe limite étant sur ce cylindre une courbe de longueur minima sera une hélice même.

Soit ABCDE (fig. 61) la ligne polygonale. Menons les bissectrices des angles C et D, et soit OO' la perpendiculaire commune à ces deux bissectrices. Le quadrilatère gauche OO' DC aura ses angles O et O' droits et ses angles C et D égaux comme moitiés d'angles égaux. Les côtés OC et O'D y seront aussi égaux.

Pour le prouver construisons le prisme OCIO'KD, et considérons l'angle trièdre dont C est le sommet et dont les arêtes sont CO, CK et CD avec le trièdre dont les arêtes sont DO' DK et DC. Ces deux trièdres ont leurs angles plans respectivement égaux, car par construction OCD = O'DC KCD = CDI à cause des parallèles CK, ID et les angles OCK, O'DI sont droits ; donc l'angle dièdre formé suivant CK dans le premier, égale l'angle dièdre formé suivant DI dans le second. Il en résulte que dans le triangle O'KD, les deux angles en K et D sont égaux : donc O'D = O'K = OC.

Si l'on mène la bissectrice de l'angle B et que $O_,O''$ soit la perpendiculaire commune à cette droite et à CO, on aura de même $O''B=O_,C$. Mais ABCD pouvant d'après la nature de la ligne coïncider avec le système BCDE, il est clair que la coïncidence établie, BO″ tombera sur CO et CO sur DO' : en sorte que la perpendiculaire OO″ coïncidera alors avec OO'. Donc $O_,C$=O'D=OC. Le point $O_,$ est donc le même que le point O. Je dis de plus que OO″ est le prolongement de OO'.

Considérons en effet le trièdre dont CO,CB,CK' sont les arêtes et celui dont les arêtes sont CO,CK et CD. Ces deux trièdres ont un angle dièdre égal suivant OC ; les faces adjacentes sont respectivement égales comme moitiés d'un même angle d'un côté et comme angles droits de l'autre. Donc l'inclinaison des deux plans OCB,BCK' est la même que celle des deux plans OCD,KCD. Mais celle-ci est la même que celle des deux plans O'DC,CDI d'après ce qui a été dit des deux trièdres d'abord considérés. Donc l'inclinaison des deux plans OCB,BCK' est la même que celle des deux plans O'DC,CDI. Donc si l'on porte le quadrilatère OCBO″ sur son égal O'DCO en considérant la droite CK' comme invariablement liée avec lui, le plan BCK' tombera sur le plan CDI, par suite CK' coïncidera avec DI. Puisque alors OO″ coïncide

avec O'O, il s'ensuit que CK' et OO'' sont parallèles. Donc OO'' est parallèle à OO', et par conséquent en est le prolongement.

Concevons maintenant des plans menés par les différents côtés de la ligne ABCDE parallèlement à l'axe O'OO'', la surface prismatique qui en résultera aura toutes ses faces égales. C'est une conséquence de ce que tous les côtés de la ligne polygonale sont égaux et que d'après ce qui précède leurs inclinaisons sur les autres latérales de cette surface sont égales. De plus, comme les plans O'OC, O'OD sont les plans bissecteurs des angles dièdres que présentent en faces suivant KCK', DI... et qu'il est démontré que l'inclinaison des plans OCK', BCK' est la même que celle des plans O'DI, CDI, les inclinaisons des faces de la surface prismatique sont égales entre elles. Donc cette surface prismatique est une surface régulière dont l'axe est O'OO'', et dont les arêtes sont également inclinées sur les côtés de la ligne brisée dans le même sens; donc, etc.

ANNONCE.

—

M. Faure, professeur à Gap, vient de publier, à la librairie Bachelier, un premier Mémoire, contenant des vues ingénieuses sur l'*Interprétation géométrique des quantités imaginaires*. Il en sera rendu compte avec une indication des travaux exécutés dans la même direction. Y a-t-il progrès ou n'est-ce qu'un jeu d'esprit avec les équations d'équilibre? Nous attendons le second Mémoire pour répondre à cette question. M. l'abbé George, qui s'occupe depuis longtemps du même sujet, nous a adressé une lettre qui sera insérée au mois prochain.

NOTE

Sur la limite du nombre des divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers;

PAR M. E. LIONNET,

Professeur de mathématiques au collége royal Louis-le-Grand (*).

Dans cette note, j'indique, pour le nombre des divisions à faire lorsqu'on cherche le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, des limites qui conviennent à tous les systèmes de numération et qui comprennent les limites déjà données par MM. Binet et Lamé. De plus, je montre comment on obtient, quel que soit le mode de division, la limite la plus approchée entre toutes celles qui dépendent seulement du plus petit des deux nombres proposés. Les démonstrations dont je fais usage paraîtront, je l'espère, aussi élémentaires que le comporte la nature de la question.

I. Soient A et B les deux nombres proposés, D leur plus grand commun diviseur. Si l'on divise A et B par D et qu'on cherche le plus grand commun diviseur des quotients ainsi obtenus, on effectuera le même nombre de divisions que pour trouver celui des nombres A et B; or ces quotients sont premiers entre eux, donc, dans la recherche d'une limite du nombre de ces divisions, on peut supposer que le plus grand commun diviseur D est égal à l'unité. Cela posé, soient

$$B \ldots\ldots D_5,\ D_4,\ D_3,\ D_2,\ 1,$$

(*) Un extrait de cette note a été présenté, le 1er décembre dernier, par M. Binet, à l'Académie des sciences.

tous les nombres qui ont servi successivement de diviseurs. Si l'on considère trois diviseurs consécutifs tels que D_5, D_4, D_3, le troisième sera le reste de la division du premier par le second ; donc le premier est au moins égal à la somme des deux autres : mais, D_2 est au moins égal à 2, donc D_3 est au moins égal à 3 ; pareillement, D_4 est au moins égal à 5, D_5 au moins égal à 8, D_6 au moins égal à 13 et D_7 au moins égal à 21 ; donc on a

$$(1)\ D_6 > 10 \text{ et } D_7 > 10 \times 2 ;$$

d'où l'on déduit

$$D_8 > 10 \times 3,\ D_9 > 10 \times 5,\ D_{10} > 10 \times 8,$$
$$D_{11} > 10 \times 13,\ D_{12} > 10 \times 21,$$

et, à plus forte raison,

$$(2)\ D_{11} > 10^2,\ D_{12} > 10^2 \times 2 :$$

Or, de même que les inégalités (1) ont conduit aux inégalités (2), celles-ci conduiront à

$$(3)\ D_{16} > 10^3,\ D_{17} > 10^3 \times 2,$$

ou à

$$D_{3.5+1} > 10^3,\ D_{3.5+2} > 10^3 \times 2,$$

et, ainsi de suite, en supposant que le nombre des diviseurs intermédiaires soit constamment égal à 3 : donc on a généralement

$$D_{5n+1} > 10^n ;$$

mais, 10 étant la base du système dans lequel on opère, 10^n contient $n+1$ chiffres ; d'ailleurs $5n+1$ est le nombre total des divisions effectuées, lorsqu'on prend D_{5n+1} pour premier diviseur ou pour le plus petit B des deux nombres proposés ; donc, lorsqu'on effectue plus de $5n$ divisions, B contient plus de n chiffres, ou autrement, *le nombre des divisions effectuées ne peut excéder cinq fois le nombre des*

chiffres de B. Telle est la limite donnée par M. Lamé (*).

II. En observant que, dans la démonstration précédente, la seule particularité relative à la base 10 consiste en ce qu'on a supposé que le sixième et le septième des nombres 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 contiennent l'un la base et l'autre le double de la base, on voit que des raisonnements analogues sont applicables à une base quelconque, et l'on peut établir cette règle générale : *Pour avoir une limite du nombre de divisons à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, en opérant dans un système dont la base est* b, *on écrit la suite des nombres*

(1) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144....

dont chacun, à partir du troisième, est égal à la somme des deux qui le précèdent immédiatement, jusqu'à ce qu'on ait obtenu deux termes consécutifs dont l'un contienne la base et l'autre le double de la base; le nombre des termes précédents multiplié par le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres proposés est la limite demandée.

Lorsque les deux termes auxquels on s'est arrêté sont précédés immédiatement d'un terme qui contient la base, ainsi que cela arrive pour les bases 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, on reconnaît facilement que la limite peut être diminuée d'une unité. Ainsi, en désignant par c le nombre des chiffres de B, et par l la limite correspondante à la base b, on aura les résultats suivants :

$b=$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$l=$	$2c-1$,	$3c-1$,	$3c$,	$4c-1$,	$4c$,	$5c-1$,	$5c-1$,	$5c$,

$b=$	10,	11,	12,	13.
$l=$	$5c$,	$6c-1$,	$6c-1$,	$6c-1$.

(*) Comptes rendus de l'Académie, 28 octobre 1844.

III. La forme des limites $2c-1$, $3c-1$, $3c$.... varie avec la base b; de plus, si l'on considère, par exemple le nombre 13, écrit dans le système décimal, et le même nombre 21 écrit dans le système dont la base est 6, et qu'on fasse successivement $B=13$ et $B=21$, les limites $5c$ et $4c$ correspondantes à ces bases donneront $l=10$ et $l=8$. Ainsi ces limites varient en général de forme et de grandeur avec la base du système dans lequel on opère, quoique le nombre des divisions à faire soit indépendant de cette base. Proposons-nous de déterminer une limite qui convienne à tous les systèmes.

Soient, comme précédemment, A et B les deux nombres dont on cherche le plus grand commun diviseur et R le reste de la division de A par B. En supposant que R ne soit pas contenu exactement dans B, on aura $R > \frac{1}{2}B$ ou $R < \frac{1}{2}B$; dans le premier cas, si l'on divise B par R, on obtiendra le reste $B-R < \frac{1}{2}B$: donc deux divisions au plus sont nécessaires pour obtenir un reste $R_1 < \frac{1}{2}B$; par la même raison deux divisions au plus sont nécessaires pour obtenir un nouveau reste $R_2 < \frac{1}{2}R_1$. En supposant que la même nécessité continue de se présenter jusqu'à ce qu'on ait obtenu le plus grand commun diviseur R_n, on aura la suite d'inégalités $2R_1 < B$, $2R_2 < R_1$, $2R_3 < R_2 \ldots 2R_{n-1} < 2R_{n-2}$, $2R_n < R_{n-1}$ d'où l'on conclut immédiatement

$$2^n \times R_n < B \text{ ou } 2^n < B,$$

en supposant $R_n = 1$. Mais on a fait au plus $2n$ divisions pour contenir R_n; donc, en comptant la dernière, *on en a fait au plus* $1+2n$, n *étant l'exposant de la plus grande puissance de* 2 *contenue dans le plus petit* B *des deux nombres proposés*. M. Binet a trouvé, par une démonstration analogue, la limite plus simple $1+n$ (*), mais en considérant la division sous un

(*) Journal de M. Liouville, tome VI, 1841.

autre point de vue. Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer que cette limite $1+2n$ est une conséquence immédiate de la limite $2c-1$ que nous avons déterminée précédemment et qui correspond au cas où le nombre B est écrit dans le système binaire.

En effet 2 étant la base du système et c le nombre des chiffres de B, on a $B = \text{ou} > 2^{c-1}$ et $B < 2^c$; donc $c-1$ est égal à l'exposant n de la plus grande puissance de 2 contenue dans B; donc $c = 1+n$ et, par suite, $2c-1 = 1+2n$.

IV. Considérons la suite des nombres

(1) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.....

auxquels on reconnaît immédiatement cette propriété, que si l'on cherche le plus grand commun diviseur de deux termes consécutifs, tels que 34 et 21, on obtiendra successivement pour restes les nombres précédents 13, 8, 5, 3, 2, 1 et le dernier reste 0 ; d'où il résulte que le nombre des divisions effectuées est égal au nombre des termes qui précèdent le plus grand 34 des deux nombres qu'on a pris dans la série.

Pour obtenir la limite $5c$, nous avons supposé seulement que les sixième et septième termes de cette série contiennent l'un la base 10 et l'autre le double de cette base, sans tenir aucun compte de l'excès 3 de 13 sur 10 ni de l'excès 1 de 21 sur 10×2 ; il est donc présumable qu'en ayant égard à ces différences nous pourrons trouver une limite plus approchée.

On a vu précédemment que D_2 est au moins égal à 2 ou, autrement, que lorsqu'on fait deux divisions pour trouver le plus grand commun diviseur des nombres A et B, le plus petit nombre B est au moins égal à 2 ; pareillement, quand on fait trois divisions, B est au moins égal à 3 ; quand on fait 4 divisions, B est au moins égal à 5, et, en général, quand

on fait n divisions, B est au moins égal au n^e terme de la série (1). Cela étant, supposons qu'on demande une limite du nombre des divisions à faire, lorsqu'on a, par exemple, $B = 17$: si l'on cherche dans la série (1) le premier terme $21 > 17$, le nombre 6 des termes précédents sera la limite demandée ; car si l'on était obligé de faire plus de 6 divisions, B serait au moins égal à 21, ce qui est contraire à l'hypothèse. Je dis de plus qu'aucune autre limite, dépendant seulement de B, ne donnera pour maximum du nombre des divisions un nombre inférieur à 6. Car, si cela était, cette même limite appliquée au nombre $13 < 17$ donnerait encore un maximum inférieur à 6 : et l'on vient de voir qu'en supposant $A = 21$ et $B = 13$ le nombre des divisions à faire était égal à 6. On peut donc établir cette règle générale : *Pour avoir la limite la plus approchée du nombre des divisions à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers* A *et* B, *on écrit les termes de la série* (1) *jusqu'au premier terme supérieur à* B ; *le nombre des termes précédents est la limite demandée.*

V. Chaque fois qu'une division conduirait à un reste plus grand que la moitié du diviseur correspondant, on peut ajouter une unité au quotient et soustraire le dividende du produit du diviseur par le quotient, ce qui conduit à un reste moindre que la moitié du diviseur. En réduisant ainsi deux divisions à une seule, on conçoit qu'on puisse trouver des limites moindres que celles qu'on vient d'obtenir. Supposons donc qu'on apporte cette modification à la recherche du plus grand commun diviseur des nombres A et B, et soient, comme précédemment,

$$B \ldots\ldots D_5,\ D_4,\ D_3,\ D_2,\ 1,$$

tous les nombres qui ont servi de diviseurs. Si l'on considère trois diviseurs consécutifs tels que D_5, D_4, D_3, le troisième

sera le reste de la division du premier par le second ; donc, suivant qu'on aura pris le quotient par excès ou par défaut, afin d'obtenir un reste $D_3 < \frac{1}{2} D_4$, on aura

$$D_5 = \text{ou} > 3D_4 - D_3 \quad \text{ou} \quad D_5 = \text{ou} > 2D_4 + D_3.$$

Désignant par K l'excès de D_4 sur $2D_3$, on trouve

$$3D_4 - D_3 = 5D_3 + 3K \quad \text{et} \quad 2D_4 + D_3 = 5D_3 + 2K,$$

d'où l'on conclut

$$2D_4 + D_3 < 3D_4 - D_3.$$

Donc, quel que soit le mode de division, on aura toujours

$$D_5 = \text{ou} > 2D_4 + D_3 :$$

mais D_2 est au moins égal à 2, donc D_3 est au moins égal à 5 ; pareillement, D_4 est au moins égal à 12, D_5 au moins égal à 29 et ainsi de suite ; donc on a

(4) $$D_4 > 10 \text{ et } D_5 > 10 \times 2.$$

Or, de même que les inégalités (1) ont conduit à

$$D_{5n+1} > 10^n$$

Les inégalités (4) conduiront, par des raisonnements analogues, à

$$D_{3n+1} > 10^n$$

d'où l'on conclut que *le nombre des divisions à faire ne peut excéder trois fois le nombre des chiffres de* B. M. Binet a donné la limite moins approchée $1 + \frac{10}{3} c$ (*).

On reconnait aisément que la série

(2) 1, 2, 5, 12, 29.....

(*) Journal de M. Liouville, tome VI, 1841, et comptes rendus de l'Académie, 4 novembre 1844.

dans laquelle 3 termes consécutifs sont tels que le 3[e] est égal au double du 2[e] augmenté du 1[er], donne lieu à des conséquences analogues à celles qu'on a déduites de la série (1). Aussi nous contenterons-nous de les énoncer :

1° *Pour avoir une limite* l' *du nombre de divisions à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers* A *et* B, *on écrit les termes de la série* (2) *jusqu'au premier qui contienne la base du système dans lequel on opère, le nombre des termes précédents multiplié par le nombre des chiffres du plus petit* B *des deux nombres proposés est la limite demandée.* On trouve ainsi les résultats suivants :

$$b = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$$
$$l' = c,\ 2c,\ 2c,\ 2c,\ 3c,\ 3c,\ 3c,\ 3c,\ 3c,\ 3c,\ 3c,\ 4c$$

On voit que la limite $3c$ est commune à 7 bases différentes et que, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres écrits dans le système dont la base est* 2, *le nombre des divisions à faire ne peut excéder le nombre des chiffres du plus petit* B *des deux nombres proposés.*

Remarque. Le nombre B étant écrit dans le système dont la base est 2, on a B = ou $> 2^{c-1}$ et $B < 2^c$; donc $c - 1$ est égal à l'exposant n de la plus grande puissance de 2 contenue dans B ; donc $c = 1 + n$. Telle est la limite donnée par M. Binet.

2° *Pour avoir la limite la plus approchée du nombre de divisions à faire, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers* A *et* B, *on écrit les termes de la série* (2) *jusqu'au premier terme supérieur à* B, *le nombre des termes précédents est la limite demandée.*

VI. Lorsqu'on connaît le plus grand commun diviseur de A et B, ou plus généralement un facteur D commun à ces deux nombres, on substitue à B, dans le calcul des limites

précédentes, le quotient $\frac{B}{D}$, ou seulement au nombre des chiffres de B celui des chiffres de ce quotient, ce qui donne ordinairement des limites plus approchées.

Prenons pour exemple les nombres 2904 et 1122 écrits dans le système décimal, et dont le plus grand commun diviseur s'obtient en effectuant 5 ou 4 divisions selon la manière d'opérer. Les limites $5c$ et $3c$ appliquées à 1122 donnent $l = 20$, $l' = 12$: l'emploi des séries (1) et (2) donnent les limites plus approchées $l = 15$, $l' = 9$. Mais les nombres 2904 et 1122, étant divisibles par 2, par 3, et par 11, sont divisibles par le produit $2 \times 3 \times 11 = 66$ et, sans effectuer la division de 1122 par 66, on voit que le quotient de cette division contient deux chiffres; ce qui réduit les limites $5c$ et $3c$ à $l = 10$, $l' = 6$. Enfin si l'on divise 1122 par 66 et qu'on emploie les séries (1) et (2) en substituant le quotient 17 à 1122, on aura les limites encore plus approchées $l = 6$, $l' = 4$.

VII. Supposons qu'en cherchant le plus grand commun diviseur de A et B, on ait pris tous les quotients par excès afin d'obtenir des restes moindres que la moitié des diviseurs correspondants, et soient, dans cette nouvelle hypothèse,

$$B \ldots \; D_5, \; D_4, \; D_3, \; D_2, \; 1,$$

tous les nombres employés comme diviseurs. Si l'on considère trois diviseurs consécutifs, tels que D_5, D_4, D_3, on aura

$$D_5 = \text{ou} > 3\, D_4 - D_3.$$

Or D_2 est au moins égal à 2, donc D_3 est au moins égal à 5, D_4 au moins égal à 13, D_5 au moins égal à 34, etc. On est ainsi conduit à la suite des nombres

(3) $\qquad 1, \; 2, \; 5, \; 13, \; 34, \; 89, \; 233 \ldots .$

dans laquelle trois termes consécutifs sont tels que le troi-

sième est égal au triple du second moins le premier. Cette série donnerait lieu à des conséquences analogues à celles qu'on a déduites des séries (1) et (2) : mais, comme les termes qui la composent sont l'unité et tous les termes de rang pair de la série (1), on voit qu'étant donnée une limite l déduite de la série (1) et relative au mode ordinaire de division, on obtiendra une limite l'' relative au cas actuel, en faisant $l''=1+\frac{1}{2}l$. Ainsi, par exemple, la limite $l=5c$ donnera $l''=1+\frac{5}{2}c$, c'est-à-dire que, lorsqu'en opérant dans le système décimal on a pris tous les quotients par excès, afin d'obtenir des restes moindres que la moitié des diviseurs correspondants, *le nombre des divisions effectuées ne peut excéder l'unité augmentée de cinq fois la moitié du nombre des chiffres du plus petit* B *des deux nombres proposés.*

Nota. La limite dite de M. Binet, relative aux quotients le plus approchés, est déjà ancienne et depuis longtemps du domaine public. La limite de M. Lamé, relative aux quotients ordinaires, est nouvelle ; M. Finck en a donné une démonstration dans ce volume (p. 71) ; le beau travail qu'on vient de lire complète et simplifie la théorie. Le lecteur attentif aura remarqué l'erreur qui nous a échappé dans un travail analogue (p. 569); on n'a $n<3k$ que lorsque k est moindre que 3.

Tm.

PROBLÈMES COMBINATOIRES.

PAR M. THIBAULT,
Professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

I. *Problème*. Étant données différentes séries, la première de m lettres a, b, c..., la seconde de m' lettres a', b', c'..., la troisième de m'' lettres a'', b'', c''..., etc. déterminer le nombre des arrangements qu'on peut faire, chaque arrangement devant contenir n lettres de la première série, n' lettres de la deuxième, n'' de la troisième, etc.

Il y a deux cas à considérer, savoir : 1° si aucune lettre ne doit se répéter dans un même arrangement; 2° si une même lettre peut se répéter plusieurs fois.

1er *cas*. *Arrangements sans répétitions*. Commençons par former tous les arrangements possibles des m lettres de la première série n à n ; leur nombre est donné par la formule connue $m(m-1) \ldots (m-n+1)$; nous le représenterons par $A_{m,n}$.

Dans l'un quelconque de ces arrangements, introduisons une lettre a' de la seconde série à toutes les places possibles qui sont au nombre de $n+1$; il en résultera $n+1$ arrangements nouveaux. L'introduction de chacune des autres lettres b', c',... en fournira le même nombre, ce qui fait en tout $(n+1)\,m'$ arrangements nouveaux provenant de l'arrangement considéré. La même chose étant faite pour chacun des $A_{m,n}$ arrangements déjà formés, il en résultera $(n+1)\,m'A_{m,n}$ arrangements composés chacun de n lettres de la première série, et d'une lettre de la deuxième.

Dans l'un quelconque de ces derniers arrangements, affectons pour un instant de l'indice 1, la lettre de la seconde série qu'il contient; puis introduisons-y une deuxième lettre de cette série en l'affectant de l'indice 2. Cette nouvelle lettre pouvant se mettre à toutes les places qui sont au nombre de $n+2$, il en résultera $n+2$ arrangements nouveaux. En introduisant de cette manière dans l'arrangement considéré chacune des $m'-1$ lettres de la seconde série qui ne se trouvaient pas dans cet arrangement, il en résultera en tout $(n+2)(m'-1)$ arrangements. La même chose étant faite pour chacun des $(n+1)\,m'A_{m,n}$ arrangements primitifs, on aura en tout

$$(n+1)\,(n+2)\times m'\,(m'-1)\,A_{m,n}$$

arrangements composés de n lettres de la première série, et de deux lettres de la seconde, ces deux dernières étant affectées des indices 1,2, d'après l'ordre de leur introduction.

On suivra le même ordre de formation jusqu'à ce qu'on ait introduit dans chaque arrangement n' lettres de la deuxième série, et en affectant successivement les nouvelles lettres introduites des indices 3,4, ... n'. On aura ainsi tous les arrangements qu'on peut former avec n lettres de la première série, et n' lettres de la deuxième, différents entre eux soit par les lettres, soit par l'ordre de ces lettres, soit par l'ordre des indices; leur nombre sera

$$(n+1)\,(n+2)\,\ldots.\,(n+n')\times m'\,(m'-1)\,\ldots.\,(m'-n'+1)\,A_{m,n},$$

qui peut s'écrire $(n+1)\,(n+2)\,\ldots.\,(n+n')\,A_{m,n}A_{m',n'}$.

Observons actuellement qu'un même arrangement de lettres se trouvera reproduit avec toutes les permutations possibles dans l'ordre des indices, c'est-à-dire $1.2\ldots.n'$ fois. Si donc on supprime les indices, le nombre des arrangements différents deviendra $1.2\ldots n'$ fois moindre. *Dans le cas de deux séries seulement, la formule cherchée est donc*

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n')\,A_{m,n}A_{m'n'}}{1.2\dots n'},$$

qui peut s'écrire sous la forme symétrique.

$$\frac{1.2\dots(n+n')}{1.2\dots n\times 1.2\dots n'}\,A_{m,n}A_{m'n'} \qquad (1)$$

Au moyen des arrangements relatifs à deux séries, on obtiendra ceux qui sont relatifs à trois, en suivant exactement la même marche pour introduire les m'' lettres de la troisième série n'' à n''. On trouvera ainsi que *la formule relative à trois séries est*

$$\frac{1.2\dots(n+n'+n'')}{1.2\dots n\times 1.2\dots n'\times 1.2\dots n''}\,A_{m,n}A_{m',n'}A_{m'',n''};$$

On trouvera de même que *la formule générale cherchée, relativement à toutes les séries*, *est :*

$$\frac{1.2\dots(n+n'+n''+\dots)}{1.2\dots n\times 1.2\dots n'\times 1.2\dots n''\times\dots}\,A_{m,n}A_{m',n'}A_{m'',n''}\dots \quad (A)$$

Deuxième cas. Arrangements avec répétitions. On suivra exactement la même marche que pour les arrangements sans répétitions. Mais alors $A_{m,n}$ représentera le nombre m^n qui exprime combien on peut faire d'arrangements n à n avec répétitions au moyen de m lettres. L'introduction de $1.2,..n'$ lettres de deuxième série, avec les indices respectifs $1, 2, ..n'$, dans les $A_{m,n}$ arrangements des lettres de la première série, conduit à des arrangements successifs, dont les nombres sont respectivement

$$(n+1)\,m'A_{m,n},\ (n+1)(n+2)\times m'^{2}A_{m,n},\dots\dots$$
$$(n+1)(n+2)\dots(n+n')\times m'^{n'}A_{m,n}.$$

Si on supprime les indices, le nombre total des arrangements est

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n')}{1.2\dots n'}\times m'^{n'}A_{m,n}$$

nombre qui, en représentant $m^{m'}$ par $A_{m',n'}$, prend la forme symétrique exprimée par la même formule (1) qu'on a obtenue pour le cas des arrangements sans répétitions.

On trouvera de même que *le nombre des arrangements relatif à toutes les séries, est exprimé par la formule* (A) *ci-dessus*.

Si les lettres d'une ou de plusieurs séries pouvaient se répéter et que les autres ne le pussent pas, le nombre des arrangements serait exprimé encore par la même formule (A), en considérant $A_{m,n}$, $A_{m',n'}$, etc., comme représentant des nombres d'arrangements avec ou sans répétitions, suivant que les lettres des séries correspondantes pourraient ou non se répéter.

II. Problème. *Dans le nombre total des arrangements avec ou sans répétitions, considérés dans le problème précédent, combien de fois se rencontre-t-il que des lettres d'une même série, de la première par exemple, se succèdent* 1° *par groupes de* p *lettres au moins*; 2° *par groupes formés exactement de* p *lettres?*

Nous emploierons les notations $A_{m,n}$, etc., comme dans le problème précédent, pour représenter les nombres d'arrangements de m lettres n à n, etc., avec ou sans répétitions de lettres.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, les arrangements où les lettres de la première série sont assujetties à ne pas se répéter.

Formons toutes les successions possibles des m lettres de la première série p à p sans répétitions, ce qui donnera $A_{m,p}$ groupes différents. Considérons l'un de ces groupes en particulier, et formons aussi tous les arrangements possibles contenant $n-p$ lettres de la première série, n' lettres de la deuxième, n'' lettres de la troisième, etc., mais dont seront exclues les p lettres du groupe considéré, arrangements dont

le nombre est exprimé par la formule (A), en y remplaçant m, n par $m-p$, $n-p$. Si nous plaçons le groupe considéré devant et après l'un des arrangements formés, et entre ses diverses lettres à toutes les places possibles, il en résultera $1+(n-p)+n'+n''+\ldots$ arrangements. Si on combine de la même manière ce groupe avec chacun des autres arrangements formés, il en résultera un nombre d'arrangements exprimé par

$$[1+(n-p)+n'+\ldots]\,\frac{1.2..\,((n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots}\,A_{m-p,n-p}\,A_{m',n'}\ldots$$

qui revient à :

$$\frac{1.2\ldots(1+(n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots\ldots(n-p)\times 1.2\ldots.\, n'\times\ldots.}\,A_{m-p,n-p}\,A_{m',n'}\ldots. \qquad (2)$$

La formule (2) exprime combien de fois une succession déterminée de p lettres se trouve dans tous les arrangements formés de n lettres de la première série, de n' lettres de la deuxième, etc. Chacune des $A_{m,p}$ successions de p lettres que l'on peut former avec la première série, devant se rencontrer le même nombre de fois dans ces arrangements, il faut multiplier la formule précédente par $A_{m,p}$, pour exprimer combien il se rencontre en tout de successions de p lettres de la première série. Dans le produit obtenu remplaçons

$$A_{m,p}\times A_{m-p,n-p}$$

par sa valeur

$$m(m-1)\ldots(m-p+1)\times(m-p)(m-p-1)\ldots$$
$$\big((m-p)-(n-p)+1\big),$$

ou

$$m\,(m-1)\ldots.(m-n+1),$$

c'est-à-dire par $A_{m,n}$, ce produit devient :

$$\frac{1.2\ldots.\,(1+(n-p)+n'+\ldots.)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots}\,A_{m,n}A_{m',n'}\ldots \qquad (3)$$

La formule (3) exprimerait encore, si les lettres de la première série pouvaient se répéter, combien il se rencontre de successions de p lettres de cette série dans tous les arrangements. On parviendrait à cette formule de la même manière ; seulement les lettres d'un groupe n'étant pas exclues des arrangements entre les lettres desquels on intercale ce groupe, il faudra dans la formule (2) remplacer

$$A_{m-p,n-p} \text{ par } A_{m,n-p}.$$

puis observer ensuite que le produit $A_{m,p} \times A_{m,n-p}$ revient à $m^p \times m^{n-p}$ ou m^n, c'est-à-dire à $A^{m,n}$.

La formule (3) étant également applicable aux arrangements avec ou sans répétitions, il doit en être de même de tout ce que nous allons en déduire.

Si l'on désigne par G_p, G_{p+1},.... les nombres des groupes formés respectivement de $p, p+1$,.... lettres consécutives de la première série, qui se rencontrent dans l'ensemble de tous les arrangements, l'expression (3) est égale à $G_p + 2G_{p+1} + 3G_{p+2} +$ etc. En effet, un groupe de p lettres ne donne lieu qu'à une des successions considérées, tandis qu'un groupe de $p+1$ lettres donne lieu à deux successions de p lettres, l'une commençant à la première lettre du groupe, l'autre à la deuxième. De même un groupe de $p+2$ lettres, donne lieu à trois successions et ainsi de suite. De l'égalité

$$G_p + 2G_{p+1} + 3G_{p+2} + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{1.2\ldots(1+(n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots$$

on déduit, par le changement de p en $p+1$,

$$G_{p+1} + 2G_{p+2} + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{1.2\ldots((n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p-1)\times 1.2\ldots n'\times\ldots} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots$$

soustrayant la deuxième égalité de la première, il vient :

$$G_p + G_{p+1} + G_{p+2} + \ldots =$$
$$\frac{1.2\ldots[(n-p)+n'+\ldots]}{1.2..(n-p-1)\times 1.2..n'\times..} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots \times$$
$$\times \left(\frac{1+(n-p)+n'+\ldots}{n-p} - 1\right)$$

ou, en réduisant

$$G_p + G_{p+1} + G_{p+2} + \ldots =$$
$$\frac{1.2\ldots[(n-p)+n'+\ldots]}{1.2..(n-p)\times 1.2..n'\times\ldots} (1+n'+n''+\ldots)\, A_{m,n}A_{m',n'}\ldots. \quad (B)$$

C'est la première formule cherchée, qui exprime combien de fois il se rencontre de groupes de p lettres consécutives au moins de la première série.

Dans la formule (B) remplaçons p par $p+1$, et soustrayons de (B) le résultat, il vient après une réduction toute semblable à celle qui précède

$$G_p = \frac{1.2\ldots[(n-p)-1+n'+n''+..]}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'+\ldots}$$
$$(1+n'+n''+\ldots)(n'+n''+\ldots)\, A_{m,n}A_{m'n'}\ldots \quad (C)$$

C'est la deuxième formule cherchée, qui exprime combien de fois il se rencontre des groupes de p lettres consécutives de la première série.

Comme application très-simple des formules (A), (B), considérons la question suivante : *déterminer le nombre de mots qu'on peut former avec* 19 *consonnes et* 5 *voyelles, chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et de* 2 *voyelles*; *en excluant les mots renfermant trois consonnes de suite.*

Le nombre total des mots est donné par la formule (A), appliquée à deux séries ; on trouve

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3\times 1.2}.\,19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 10.19^3.5^2.$$

La formule (B), dans laquelle on supprimera d'abord haut et bas le facteur $1.2\ldots(n-p)$, donne ensuite le nombre des mots exclus, savoir

$$\frac{1.2}{1.2}.(1+2)\,19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 3.19^3.5^2.$$

Il reste ainsi pour le nombre de mots demandé

$$7.19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 1200325.$$

III. Diverses méthodes pour obtenir directement la formule connue

$$C_{m,n}=\frac{m\,(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots n},$$

qui exprime le nombre des combinaisons sans répétitions, que l'on peut faire avec m lettres n à n.

Première méthode. Supposons formés les $C_{m,n-1}$ combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$. Dans chacune d'elles introduisons séparément chacune des $m-n+1$ lettres qui y manquent, l'ensemble ainsi formé contiendra

$$(m-n+1)\,C_{m,n-1},$$

combinaisons n à n. Mais ce nombre de combinaisons sera aussi exprimé par $nC_{m,n}$; car dans l'ensemble formé, chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n, se trouvera répétée n fois, puisqu'elle peut résulter indifféremment de l'introduction de l'une quelconque de ses n lettres, dans la combinaison précédemment formée des $n-1$ autres. On a donc :

$$(m-n+1)\,C_{m,n-1} = nC_{m,n},$$

d'où

$$C_{m,n}=\frac{m-n+1}{n}\,C_{m,n-1}.$$

Or on a

$$C_{m,1}=\frac{m}{1};$$

donc

$$C_{m,2}=\frac{m(m-1)}{1.2},\ldots\ldots C_{m,n}=\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots.n}.$$

Deuxième méthode. Parmi toutes les combinaisons des m lettres n à n, il y en a $C_{m-1,n-1}$ qui contiennent a. Car on obtient celles-ci en ajoutant a à chacune des $C_{m-1,n-1}$. Combinaisons $n-1$ à $n-1$ des $m-1$ autres lettres. Écrivons séparément la liste de ces combinaisons, contenant a; faisons aussi la liste des combinaisons contenant b, et ainsi de suite. L'ensemble de ces m listes, présente $mC_{m-1,n-1}$ combinaisons. Mais le nombre de ces combinaisons est aussi exprimé par $nC_{m,n}$; car dans l'ensemble formé, chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n se trouve répétée n fois, puisqu'elle se trouve écrite dans la liste correspondante à chacune de ses n lettres. On a donc

$$mC_{m-1,n-1}=nC_{m,n},$$

d'où

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}C_{m-1,n-1}=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}C_{m-2,n-2}=\ldots$$
$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n(n-1)\ldots.1},$$

à cause de

$$C_{m-n+1,1}=\frac{m-n+1}{1}.$$

Troisième méthode. Chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n contenant n lettres, leur ensemble en contient $nC_{m,n}$. La $m^{ième}$ partie de ce nombre, c'est-à-dire $\frac{n}{m}C_{m,n}$ exprime combien de fois se trouve écrite une même lettre a. Mais ce nombre de fois est aussi exprimé par

$$C_{m-1,n-1}.$$

En effet, pour obtenir toutes les combinaisons n à n renfer-

mant a, il faut d'abord former toutes les combinaisons des $m-1$ autres lettres $n-1$ à $n-1$, puis écrire la lettre a dans chacune de ces combinaisons, c'est-à-dire $C_{m-1,n-1}$ fois. On a donc :

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m-1,n-1}$$

d'où

$$C_{m,n} = \frac{m}{n} C_{m-1,n-1}$$

comme par la deuxième méthode.

Cette troisième méthode est remarquable en ce qu'elle conduit également à l'expression du nombre $C_{m,n}$, lorsqu'il s'agit de combinaisons avec répétitions de lettres. Alors la formule $\frac{n}{m} C_{m,n}$ exprime encore combien de fois une lettre a se trouve écrite; mais ce nombre de fois est aussi exprimé par

$$C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1}.$$

En effet, pour obtenir toutes les combinaisons n à n avec répétitions où se trouve a, il faut d'abord former les $C_{m,n-1}$, combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$, combinaisons dans lesquelles cette lettre se trouve déjà écrite $\frac{n-1}{m} C_{m,n-1}$ fois, puisqu'elles renferment $(n-1) C_{m,n-1}$ lettres; ensuite il faut encore écrire la lettre a une fois dans chacune de ces combinaisons $n-1$ à $n-1$, c'est-à-dire $C_{m,n-1}$ fois. On a donc

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1} = \frac{m+n-1}{m} C_{m,n-1},$$

formule dont il est facile de déduire

$$C_{m,n} = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

NOTE

Sur les chiffres qui peuvent terminer les puissances quelconques des nombres entiers.

PAR M. DROT,

professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Poitiers.

—

I. En formant les puissances des 10 premiers nombres, on reconnaît qu'elles sont terminées successivement par les chiffres suivants :

1re puissance	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2e —	:	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3e —	:	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4e —	:	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5e —	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

d'où résulte que la 6e puissance serait terminée par les mêmes chiffres que la 2e et dans le même ordre, et ainsi de suite : il est facile d'après ce tableau de déterminer quel sera le dernier chiffre de la puissance même d'un nombre, connaissant le dernier chiffre de ce nombre : si le nombre est élevé à une puissance d'exposant $4n$ il faudra consulter la quatrième ligne ; si l'exposant est $4n+1$, ce sera la première si $4n+2$, ce sera la 2e : si $4n+3$, la 3e.

Il m'a semblé que ces considérations pouvaient être établies d'une manière plus rigoureuse et même se généraliser : je me propose donc, dans cette note, de rechercher : 1° A

quelle puissance il faut élever un nombre N pour que le dernier chiffre se reproduise: 2° à quelle puissance il faut élever un nombre N pour que les deux derniers chiffres se reproduisent: 3° à quelle puissance il faut élever un nombre N pour que les trois derniers chiffres se reproduisent; ainsi de suite. Il sera facile de déduire de là quel est le dernier chiffre, ou quels sont les deux derniers chiffres, ou les trois derniers chiffres.... de la puissance quelconque d'un nombre entier; car, si pour une puissance x, par exemple, les deux derniers chiffres de N se reproduisent, on cherchera les deux derniers chiffres des différentes puissances de N, depuis la puissance 1, jusqu'à la puissance x, et à partir de là, les deux derniers chiffres reviendront dans le même ordre, puisqu'en multipliant un nombre par un autre, il est facile de voir que les deux derniers chiffres du produit ne dépendent que des deux derniers chiffres des facteurs.

II. Soit N, un nombre entier quelconque, chercher à quelle puissance x il faut l'élever pour que le dernier chiffre d se reproduise : il faudra pour cela que l'on ait :

$$(1)\qquad \begin{cases} N = 10q + d \\ N^x = 10q' + d \end{cases}$$

d'où :

$$N\,(N^{x-1} - 1) = 10\,(q' - q) \qquad (2)$$

c'est-à-dire que N $(N^{x-1} - 1)$ doit être divisible par 10 : cette condition est évidemment nécessaire d'après ce qui précède, et de plus elle est suffisante; car si elle existe, la 1re des relations (1) existant toujours, on en déduira facilement la 2e. Je distinguerai trois cas : 1° N divisible par 10 : 2° N premier avec 10 : 3° N non divisible par 10 sans être premier avec lui.

III. Dans le premier cas, la relation (2) est satisfaite, quel que soit x. Dans le second cas, pour que cette relation soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1} - 1$ soit divisible par

10 ; or, dans ce cas, N étant impair, $N^{x-1}-1$ est nécessairement divisible par 2 ; donc il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 5 : cette condition aura toujours lieu, d'après le théorème de Fermat, pour $x=5$, c'est-à-dire que N^4 divisé par 5 donnera le reste 1 : mais nous ne sommes pas certains qu'une puissance inférieure à N^4 ne puisse pas aussi donner le reste 1; toutefois, si une puissance inférieure à N^4 donnait le reste 1, ce ne pourrait être que N^1 ou N^2 (1 et 2 étant les seuls diviseurs de 4) on trouve en effet que N^1 divisé par 5 donnera le reste 1, toutes les fois que le nombre N qui est impair sera terminé par 1, et dans ce cas, la relation (2) sera satisfaite pour $x=2$ et conséquemment toute valeur de x ; car N^1 donnant le reste 1, toute puissance de N jouira de la même propriété. On trouve aussi que N^2 divisé par 5 donnera le reste 1, toutes les fois que N^2 qui est impair sera terminé par 1, c'est-à-dire que N sera terminé par 1 ou par 9 ; la première circonstance vient d'être considérée ; la seconde apprend que pour un nombre terminé par 9, la relation (2) est satisfaite pour $x=3$ et par suite pour $x=5$, 7.... Dans les autres cas, c'est-à-dire pour N terminé par 3 ou 7, la relation (2) n'est satisfaite que pour $x=5$ et par suite pour $x=9$, 13....

Soit actuellement le cas de N non divisible par 10 sans être premier avec lui ; considérons : 1° N divisible par 2 sans l'être par 5 : 2° N divisible par 5 sans l'être par 2.

1° N *divisible par 2 sans l'être par 5*. Pour que la relation (2) soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 5 ; ce qui aura toujours lieu pour $x=5$ et ce qui peut aussi avoir lieu pour des valeurs inférieures de x : une analyse semblable à la précédente montrera alors : que la relation (2) sera satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x, quand N^1 divisé par 5 donnera le reste 1, c'est-à-dire quand N sera terminé par 6 : que la relation (2) sera

satisfaite pour $x=3$ et par suite pour $x=5, 7\dots$ quand N^2 divisé par 5 donnera le reste 1, c'est-à-dire quand N sera terminé par 4 : que la relation (2) ne sera satisfaite que pour $x=5$ et par suite pour $x=9, 13\dots$ quand N sera terminé par 2 ou 8.

2° N *divisible par* 5 *sans l'être par* 2. Pour que la relation (2) soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 2 ; ce qui a toujours lieu. En résumant on conclura que pour les nombres terminés par 0, 1, 5, 6 le dernier chiffre est toujours reproduit : que pour les nombres terminés par 4 et 9, le dernier chiffre se reproduit à toutes les puissances d'exposant impair : que pour les nombres terminés par 2, 3, 7, 8, le dernier chiffre se reproduit à toutes les puissances d'exposant $4n+1$.

IV. Cherchons maintenant à quelle puissance il faut élever N pour que les deux derniers chiffres se reproduisent : en procédant de la même manière, on aura les relations :

$$(3)\qquad \begin{cases} N = 100q + \beta\alpha \\ N^x = 100q' + \beta\alpha \end{cases}$$

$$N(N^{x-1}-1) = 100(q'-q) \qquad (4)$$

il faudra donc et il suffira que la relation (4) soit satisfaite, c'est-à-dire que $N(N^{x-1}-1)$ soit divisible par 100. Je distinguerai encore trois cas : 1° N divisible par 100 : 2° N premier avec 100 : 3° N non divisible par 100 sans être premier avec 100.

V. Dans le premier cas, la relation (4) est satisfaite quel que soit x.

Dans le second cas, pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 100, c'est-à-dire que N^{x-1} divisé par cent donne le reste 1 : or, comme 100 n'est pas un nombre premier, le théorème de Fermat ne donne pas immédiatement une valeur de x qui satisfasse à cette condi-

tion ; mais on sait qu'entre N^0 et N^{100} il y a au moins une puissance qui, divisée par 100, donnera le reste 1 ; cette puissance se trouvera facilement, parce qu'il est aisé d'obtenir la série des restes correspondants aux diverses puissances de N ; on trouvera donc facilement la plus petite valeur de x, satisfaisant à la relation (4) et par suite toutes les autres. Dans le cas spécial où N serait terminé par 01, la relation (4) serait satisfaite pour $x=2$, et par suite pour toute valeur de x. Dans le troisième cas enfin, il peut arriver plusieurs circonstances.

1° N divisible par 4 sans l'être par 5. — Dans ce cas, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 25, et comme précédemment, on trouvera facilement la plus petite valeur de x satisfaisant à cette condition. — Dans le cas spécial de N terminé par 76, la relation (4) sera satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x.

2° N divisible par 25 sans l'être par 2. — Dans ce cas, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 4, et comme précédemment, on cherchera encore la plus petite valeur de x satisfaisant à cette condition. — Dans le cas spécial de N terminé par 25 la relation (4) est satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x.

3° N divisible par 2 sans l'être par 4, ou N divisible par 5 sans l'être par 25. — Dans ce cas, la relation (4) est impossible ; car il faudrait que $N^{x-1}-1$ fût encore divisible par 2 ou par 5, ou que $N^{x-1}-1$ divisé par 2 ou 5 ramenât le reste 1 ; ce qui ne peut être, puisque N ne serait pas premier avec 2 ou 5. En résumant, on conclura que pour les nombres terminés par 00, 01, 25, 76 les deux derniers chiffres sont toujours reproduits ; que pour les nombres divisibles par 2 sans l'être par 4, ou divisibles par 5 sans l'être par 25, les deux derniers chiffres ne sont jamais reproduits ; que pour tous les autres nombres, les deux derniers chiffres se reproduisent

pour une certaine puissance, dont il est toujours facile de calculer l'exposant.

6. Dans l'application de ce qui précède, il pourra paraître quelquefois pénible de calculer l'exposant de la plus petite puissance qui ramène les deux derniers chiffres du nombre donné ; mais ce calcul est très-rapide, si l'on veut faire usage des théorèmes connus à ce sujet, mais je rappellerai ces deux principes qu'on ne trouve pas ordinairement dans les livres élémentaires :

1° Il est toujours facile de trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre quelconque N et inférieurs à N : soit F le nombre cherché et décomposant N en facteurs premiers, soit $N = a^p b^q c^r$, on aura toujours :

$$F = N \times \frac{a-1}{a} \times \frac{b-1}{b} \times \frac{c-1}{c}. \text{ (*)}$$

2° Si un nombre p est premier avec N, l'exposant de la plus petite puissance de N autre que N^0, qui, divisé par p, donne le reste 1 est F ou un diviseur de F. Soit donc, par exemple, un nombre 759 ; il s'agit de calculer l'exposant de la plus petite puissance qui doit ramener les chiffres finals 59 : ce nombre tombe dans le deuxième cas, puisqu'il est premier avec 100 ; on doit donc chercher la plus petite puissance à laquelle il le faut élever, pour que cette puissance, divisée par 100, donne le reste 1. On a : $F = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 40$; l'exposant de cette puissance sera 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 ou 40 ; on n'aura donc qu'à calculer les résidus correspondants à ces puissances, jusqu'à ce qu'on arrive à un résidu 1 : ce calcul se fera très-vite, si l'on remarque que le résidu de la division par 100 se compose toujours des deux derniers chiffres du

(*) Catalan, t. I, p. 467, *Nouv. Annales*. Tm.

dividende ; que le résidu du produit de plusieurs facteurs s'obtient en multipliant les résidus des facteurs, et en cherchant le résidu du produit ; que le résidu de la puissance d'un nombre s'obtient en élevant le résidu de ce nombre à la même puissance, et en cherchant le résidu du résultat. C'est ainsi qu'on aura :

Puissances :	$\overline{759}^1$	$\overline{759}^2$	$\overline{759}^4$	$\overline{759}^5$	$\overline{759}^8$	$\overline{759}^{10}$,
Résidus. . :	59	81	61	99	21	1.

Ainsi, pour le nombre en question, la plus petite valeur de x qui satisferait à la relation (4) serait $x = 11$. Les chiffres finals 59 reviendraient à la douzième puissance.

Dans le cas d'un nombre N divisible par 25 sans l'être par 2, comme on a à rechercher à quelle puissance il faut élever N, pour que cette puissance divisée par 4 donne le résidu 1, on aura : $F = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. L'exposant de la puissance en question ne peut donc être que 1 ou 2 ; or, il est 1 dans le cas seulement de N terminé par 25 ; donc dans le cas de N terminé par 75, il sera nécessairement 2, et la relation sera satisfaite pour $x = 3$.

7. Si l'on cherche maintenant à quelle puissance il faut élever N pour que les trois derniers chiffres se reproduisent, on sera conduit à la relation :

$$N\,(N^{x-1}-1) = 1000\,(q'-q), \qquad (5)$$

et en la traitant comme les précédentes, on sera amené à conclure :

Que pour les nombres terminés par 000, 001, 376, 625, les trois derniers chiffres se reproduisent toujours ; que pour les nombres divisibles par 2 sans l'être par 8, ou divisibles par 5 sans l'être par 125 les trois derniers chiffres ne sont jamais reproduits ; que pour tous les autres nombres, les

trois derniers chiffres se reproduisent pour une certaine puissance, dont il est toujours facile de calculer l'exposant.

Les calculs se simplifieront d'après les remarques précédemment faites.

Il serait facile de généraliser ces résultats.

8. Je terminerai en observant qu'on pourrait simplifier davantage ces sortes de recherches, en ayant recours aux différents principes démontrés dans les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, dont j'énoncerai encore le suivant : si N est un nombre impair et si $p = 2^n$, la puissance de N qui a pour exposant 2^{n-2}, divisée par p, donne le reste 1.

On l'appliquerait facilement au cas où dans la relation (5) on suppose N divisible par 125; il faut alors que $N^{a-1} - 1$ soit divisible par $8 = 2^3$. Or, N^2 divisé par 8 donnera le reste 1 ; donc la relation sera toujours satisfaite pour $x = 3$.

DÉ O NSTRATION ÉLÉMENTAIRE

des formules relatives au mouvement rectiligne, uniformément varié, et sur le mouvement rectiligne varié en général.

—

1. Nous supposons que le mouvement est uniformément et instantanément accéléré.

T = temps pendant lequel le mouvement a lieu, exprimé en unités de temps.

V = vitesse acquise au bout du temps T, exprimée en unités métriques.

E = espace parcouru pendant le temps T, exprimé en unités métriques.

g. = vitesse acquise au bout de l'unité de temps, exprimée en unités métriques.

On a

$$V = gT \qquad (1)$$

$$E = \frac{VT}{2} = \frac{gT^2}{2} \qquad (2)$$

$$2gE = V^2. \qquad (3)$$

Démonstration. 1°. Partageons le temps T en n parties égales, dont chacune renferme t unités de temps, de sorte que l'on a $T = nt$ (a); divisons de même la vitesse V en n parties égales, donc chacune renferme u unités de vitesse; de sorte que l'on a $V = nu$ (b); imaginons un mouvement uniformément, mais non pas instantanément accéléré, tel que pendant le premier intervalle t de temps, d'une durée finie, le mobile soit constamment animé de la vitesse u; pendant le deuxième intervalle de temps, de la vitesse $2u$; pendant le troisième intervalle de la vitesse $3u$; et pendant le $n^{ème}$ intervalle de la vitesse nu ou V; les espaces parcourus successivement pendant ces intervalles, forment donc cette progression arithmétique

$$tu,\ 2tu,\ 3tu, \ldots ntu;$$

désignant donc par E' l'espace total, parcouru pendant les n intervalles ou pendant nt, on aura

$$E' = tu(1+2+3+\ldots n) = \frac{tun(n+1)}{2} = \frac{tun^2}{2} + \frac{tun^2}{2n}$$

et, ayant égard aux équations (a) et (b), on aura

$$E' = \frac{VT}{2} + \frac{VT}{2n}.$$

Dans ce mouvement u représente l'accélération pendant le temps fini t ; or, dans le mouvement uniformément et instantanément accéléré, cette accélération a lieu à chaque instant ; ainsi pour avoir ce mouvement, il faut que t devienne un instant ; en d'autres termes que n soit infiniment grand, puisqu'il y a une infinité d'instants dans un temps fini T ; dans ce cas E' devient E, et l'on a $E = \frac{VT}{2}$; ce qui est l'équation (2).

2°. Dans le mouvement uniformément et instantanément accéléré, la vitesse croit proportionnellement au temps ; il suffit donc de connaître la vitesse au bout d'un temps donné quelconque, pour la connaître au bout d'un temps quelconque ; on choisit pour ce temps donné, l'unité de temps ; ce qui donne l'équation $V = gT$ (1) ; celle-ci combinée avec $E = \frac{VT}{2}$ donne immédiatement $E = g\,\frac{T^2}{2}$; donc, les espaces croissent proportionnellement aux carrés des temps.

Observations I. Ainsi dans le mouvement uniformément, mais non instantanément accéléré, l'expression de l'espace est un binôme qui se réduit à un monôme, lorsque l'impulsion tu infiniment petite, se renouvelle à chaque instant ; comme cela a lieu pour la pesanteur terrestre.

II. Les mêmes raisonnements subsistent lorsque le mouvement est uniformément et instantanément retardé.

III. Réciproquement, lorsqu'un point parcourt des espaces proportionnels aux carrés des temps, on en conclut qu'il est animé d'une force accélératrice constante. On prend pour *unité* de ces forces, celle qui est capable de produire, en agissant pendant une seconde, une unité ou 1 mètre de vitesse : il n'existe pas de dénomination pour désigner cette unité de force ; nous avons proposé celle de *dynamide*. Ainsi,

l'expérience montre, dans la machine d'Athood, que, dans le mouvement des corps pesants, $\frac{2E}{T^2}$ est égal à 9,8038 ; cela veut dire que la pesanteur équivaut à 9,8038 dynamides.

IV. Lorsque plusieurs forces infiniment petites, permanentes et constantes agissent sur un point, elles se composent, comme des forces ordinaires, par le théorème du parallélogramme, et la résultante est encore une force permanente constante. Si donc, deux forces permanentes produisent un mouvement uniformément varié, et qu'on sait que l'une de ces forces, agissant seule, produit le même genre de mouvement, on en conclut que l'autre force est aussi permanente et constante. C'est ainsi que Coulomb et de notre temps M. Morin ont montré que le frottement combiné avec la pesanteur produit un mouvement uniformément varié. On en déduit que le frottement agit comme une force retardatrice constante.

V. Lorsqu'une force permanente ne fait pas décrire des espaces proportionnels aux carrés des temps, on en conclut que cette force n'est pas constante, qu'elle varie à chaque instant ; c'est-à-dire qu'à chaque instant elle a une autre mesure, contient un nombre différent de dynamides. Voici comment on trouve ce nombre variable : Soit en général $e = f(t)$ la relation entre les espaces et les temps, c'est-à-dire e contient autant d'unités métriques que $f(t)$ contient d'unités de temps. Pour fixer les idées, supposons que pour $t = 0$ on a $e = 0$; au bout du temps $t + h$ l'espace décrit est $e + k$; k et h deviennent infiniment petits simultanément, mais leur rapport reste fini. C'est ce rapport fini, représenté par la fonction prime de t, qui est évidemment la vitesse qui existe au bout du temps t ; de sorte qu'on a $v = f'(t)$, ou bien, v contient autant d'unités métriques que $f'(t)$ a d'unités de

temps. Au bout du temps $t+h$, v devient $v+l$; h et l sont infiniment petits simultanément; alors même leur rapport est fini et représenté par la fonction prime de $f't$ ou par $f''(t)$. C'est cette fonction qui représente la force accélératrice au bout du temps t; ou bien cette force contient autant de dynamides que $f''(t)$ contient d'unités de temps.

VI. La physique étant exigée pour l'admission à l'École polytechnique, nous traiterons, en 1846, plusieurs questions physico-mathématiques, entre autres la théorie des ondes, d'une si haute importance et si universellement négligée.

Tm

DÉMONSTRATION

d'un théorème sur les foyers de l'ellipse.

(Nouv. Ann., t. IV, p. 109.)

PAR M. PAUL SERRET,
élève de mathématiques.

—

D'un point M, de la circonférence d'une ellipse, on mène deux cordes MFP, MF'P', passant par les deux foyers; démontrer que la somme $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FP}}+\frac{\mathrm{MF'}}{\mathrm{F'P'}}$ est constante (*fig.* 62).

Je remarque que les projections sur un plan quelconque de deux longueurs comptées sur une même droite sont entre elles dans le même rapport que les longueurs correspondantes; et, dans le cas actuel, les longueurs dont on considère les rapports sont deux à deux situées sur une même droite.

Cela posé, imaginons, comme dans la figure, l'ellipse donnée placée sur un cylindre que nous coupons par un plan perpendiculaire à son axe, de manière à déterminer pour section le cercle o.

Soient m, f, p, f', p' et o les projections sur le plan du cercle des points M, F, P, F', P', O.

D'après le principe précédemment énoncé, on aura :

$$\frac{\text{MF}}{\text{FP}} = \frac{mf}{fp}; \quad \frac{\text{MF}'}{\text{F}'\text{P}'} = \frac{mf'}{f'p'}.$$

Par suite,

$$\frac{\text{MF}}{\text{FP}} + \frac{\text{MF}'}{\text{F}'\text{P}'} = \frac{mf}{fp} + \frac{mf'}{f'p'}.$$

Donc, si la somme $\frac{\text{MF}}{\text{FP}} + \frac{\text{MF}'}{\text{F}'\text{P}'}$ est constante et égale à H, la somme $\frac{mf}{fp} + \frac{mf'}{f'p'}$ sera de même constante et égale à H ; et *réciproquement*.

D'après cela, remarquant que, à cause de $\text{OF} = \text{OF}'$, on a aussi $of = of'$, nous apercevrons tout de suite que la proposition énoncée relativement à l'ellipse sera démontrée si nous parvenons à démontrer la proposition suivante relative au cercle qui existe nécessairement si le théorème proposé est vrai.

Théorème. D'un point M de la circonférence d'un cercle AMB on mène deux cordes MFP, MF'P' passant par deux points F, F' situés à égales distances du centre sur le même diamètre fixe AB ; démontrer que la somme $\frac{\text{MF}}{\text{FP}} + \frac{\text{MF}'}{\text{F}'\text{P}'}$ est constante (*fig.* 63).

Soit $d = o\text{F} = o\text{F}'$. Joignons oM et soit ω l'angle MoF.

Les deux triangles MoF, MoF', l'un acutangle, l'autre obtusangle en o, donnent, en désignant par r le rayon du cercle :

$$(1)\qquad MF = \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}\,;$$

$$(2)\qquad MF' = \sqrt{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}.$$

Maintenant si nous remarquons que

$$MF.FP = MF'.F'P' = AF.FB = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2,$$

nous aurons :

$$(3)\qquad FP = \frac{r^2 - d^2}{MF} = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}}\,;$$

$$(4)\qquad F'P' = \frac{r^2 - d^2}{MF'} = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}}.$$

Donc en divisant membre à membre les relations (1) et (3), (2) et (4), il viendra :

$$(A)\qquad \frac{MF}{FP} = \frac{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}{r^2 - d^2}\,;$$

$$(B)\qquad \frac{MF'}{F'P'} = \frac{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}{r^2 - d^2}.$$

Chacun des rapports (A) et (B) est dépendant de la variable ω, mais leur somme est indépendante, et par suite constante.

En effet, l'on a :

$$(C)\qquad \frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2(r^2 + d^2)}{r^2 - d^2},$$

quantité constante.

La proposition relative à l'ellipse est donc démontrée.

Maintenant il convient, pour résoudre complétement la question proposée, de déterminer en fonction des axes de l'ellipse, la valeur de la somme constante de ces rapports.

Pour l'ellipse, aussi bien que pour le cercle, la valeur de la somme constante est $\frac{2(r^2+d^2)}{r^2+d^2}$; nous pouvons donc résoudre la question que nous venons de nous proposer d'une

première manière, en cherchant les valeurs de r et d en fonction de a et b.

Or, on sait d'abord que $r = b$; car le petit axe de toute ellipse placée sur un cylindre est égale au diamètre de ce cylindre.

Quant à la valeur de d, si A désigne l'angle du plan de l'ellipse avec le plan du cercle, l'on a : $d = c \cos A$; d'ailleurs $\cos A = \frac{b}{a}$.

Donc

$$r = b\,; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

Donc

$$2\frac{(r^2 + d^2)}{r^2 - d^2} = 2\frac{b^2(a^2 + c^2)}{b^2(a^2 - b^2)} = 2 \cdot \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}.$$

La somme constante dont il s'agit est donc $2 . \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}$.

Mais nous pouvions arriver au même résultat d'une autre manière plus simple.

Pour cela, donnons au point M une position particulière pour laquelle les rapports dont il s'agit de déterminer la somme soient exprimés aussi simplement que possible. Supposons, par exemple, que le point M soit l'une des extrémités du grand axe de l'ellipse, l'extrémité de a, par exemple, on aura :

$$\frac{AF}{FB} = \frac{a + c}{a - c}; \quad \frac{AF'}{F'B} = \frac{a - c}{a + c}.$$

Donc

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AF'}{F'B} = \frac{a+c}{a-c} + \frac{a-c}{a+c} = \frac{(a+c)^2 + (a-c)^2}{a^2 - c^2} = 2\frac{(a^2 + c^2)}{a^2 - c^2},$$

ce qui nous conduit au résultat déjà obtenu.

DÉMONSTRATION

d'un théorème sur le foyer de la parabole.

(Nouv. Ann., t. IV, p. 509.)

PAR M. PAUL SERRET,
élève en mathématiques.

Des extrémités M, M' d'une corde passant par le foyer d'une parabole, on abaisse des perpendiculaires MP, M'P' sur une droite fixe située dans le plan de la parabole; démontrer que la somme $\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F}$ est constante (*fig.* 64).

Examinons d'abord, ce qui d'ailleurs nous servira tout à l'heure, le cas particulier où la droite fixe est parallèle à la directrice. Si nous désignons par $\pm d$ la distance de cette droite à la directrice, on aura :

$$MP = MF \pm d; \quad M'P' = M'F \pm d,$$

les signes se correspondant dans les valeurs de MP et M'P', c'est-à-dire que l'on doit prendre d avec le même signe dans les deux expressions. Or soient $MF=\rho_1$, $M'F=\rho_2$, on aura :

$$\frac{MP}{MF}=1\pm\frac{d}{\rho_1}; \quad \frac{M'P'}{M'F}=1\pm\frac{d}{\rho_2}.$$

D'après ce théorème on doit avoir :

$$\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F}=\text{une quantité constante.}$$

Donc aussi la somme $2+\frac{d(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}$ et par suite $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}$ doit être une quantité constante

Donc, il découle de la proposition à démontrer le théorème suivant, que nous allons démontrer directement, et qui nous servira dans un instant.

Théorème (A). Dans toute parabole, la somme des distances du foyer à deux points de cette courbe situés sur une même droite passant par le foyer, est dans un rapport constant avec le produit de ces mêmes distances.

Prenons, en effet, l'équation polaire $\rho = \frac{p}{1-\cos\omega}$ de la parabole rapportée à son foyer comme pôle, et à son axe comme axe polaire.

Menons par le point F une droite faisant un angle ω avec l'axe polaire et rencontrant la courbe aux deux points M, M'. Posons $FM = \rho_1$; $FM' = \rho_2$; on aura :

$$\rho_1 = FM = \frac{p}{1-\cos\omega}, \quad \text{et} \quad \rho_2 = FM' = \frac{p}{1+\cos\omega}.$$

Formons l'expression $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}$.

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{2p}{1-\cos^2\omega}; \quad \rho_1\rho_2 = \frac{p^2}{1-\cos^2\omega}.$$

Donc

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p},$$

ce qui démontre le théorème (A) et donne en même temps la valeur du rapport constant dont il s'agit.

Maintenant passons au cas général où la droite fixe est à une distance quelconque d du foyer et fait avec l'axe polaire un angle quelconque α.

Soient MP, M'P' les perpendiculaires abaissées. Par le foyer menons une parallèle pp' à la droite PP', on a :

$$MP = Pp + Mp = d + Mp = d + \rho_1 \sin(\alpha - \omega),$$
$$M'P' = P'p' - M'p' = d - M'p' = d - \rho_2 \sin(\alpha - \omega).$$

Nous aurons donc :

$$\frac{MP}{MF}=\frac{d+\rho_1 \sin(\alpha-\omega)}{\rho_1};\quad \frac{M'P'}{M'F}=\frac{d-\rho_2 \sin(\alpha-\omega)}{\rho_2};$$

d'où

$$\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F}=\frac{d(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}.$$

Or d est une quantité constante, puisque la droite PP' est fixe.

D'après ce qui vient d'être démontré, le rapport $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}$ est aussi constant et égale $\frac{2}{p}$.

Donc le théorème énoncé est démontré, et la somme constante des rapports dont il s'agit est égale à $\frac{2d}{p}$; d représentant la distance au foyer de la droite fixe considérée.

Remarque 1re. D'après l'expression de la valeur de la somme constante, on voit que la valeur de cette somme ne dépend aucunement de l'inclinaison de la droite considerée, mais simplement de la distance au foyer.

Remarque 2e. Si $d=p$, la somme constante est égale à 2 ; ce qui est facile à concevoir d'après la nature même de la parabole.

SOLUTION DU PROBLÈME 102. (V. *p*. 370.)

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Quatre points sont sur une même circonférence ; dans chacun des triangles formés par ces quatre points trois à trois existe un point de rencontre des hauteurs : ces quatre points

de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

I. *Lemme.* Dans tout triangle, la distance du cercle circonscrit, à l'un des côtés, est égale à la moitié du segment de la hauteur parallèle à cette distance; segment compris entre le sommet et le point de rencontre des trois hauteurs.

Soit un triangle ABC dans lequel O est le point de rencontre des hauteurs, O' le centre du cercle circonscrit, je dis que nous aurons : $O'E=\frac{AO}{2}$, $O'D=\frac{BO}{2}$.

En effet, joignant ED, nous aurons deux triangles O'DE, AOB qui sont semblables; donc nous aurons :

$$O'D:BO::DE:AB::O'E:BO.$$

Mais $ED=\frac{AB}{2}$; donc $O'D=\frac{BO}{2}$, $O'E=\frac{AO}{2}$.

Il en est de même de la troisième distance.

II. Soit un quadrilatère inscrit ABCD : E, G, F, H sont les points d'intersection des hauteurs. Il suffit de démontrer que le quadrilatère EGFH a ses côtés parallèles et égaux à ceux du quadrilatère donné.

1° Je vais démontrer, par exemple, que EG est parallèle à AB : d'abord AG et BE sont parallèles; il faut donc prouver que BE = AG.

Or, d'après le lemme précédent, O étant le centre du cercle, nous avons BE = 2 OI, AG = 2 OI; donc BE = AG. Démontrons encore que FH est parallèle à DC : il faut faire voir que CH = DF. Or DF = 2OK; CH = 2OK; donc DF = CH.

2° La circonférence circonscrite à ce nouveau quadrilatère est égale à la première. En effet, si nous prenons les deux triangles GEH, ADB; ces deux triangles sont égaux, et quand deux triangles sont égaux, les rayons des cercles circonscrits à ces triangles sont égaux.

Le théorème est donc entièrement démontré.

Si le quadrilatère a deux angles droits, la démonstration est immédiate.

Le quadrilatère est alors BFDE.

DF étant perpendiculaire à BC sera parallèle à AB :

BE étant perpendiculaire à AD sera parallèle à DC :

BF sera de même parallèle à AD, ainsi que DE à BC.

(*Prochainement la solution du problème* 101, *par le même.*)

SOLUTION DU PROBLÈME 98 (p. 368).

PAR M. HENRI BINDER,

élève en élémentaires du collége Charlemagne (institution Favard).

—

Soit n_3 le nombre des faces triangulaires; n_4 celui des faces quadrangulaires d'un polyèdre, et N le nombre des diagonales du polyèdre, faisant :

$$n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots = L$$

$$1.3.n_3 + 2.4n_4 + 3.5.n_5 + 4.6n_6 = M$$

on a

$$8N = (2 + L)(4 + L) - 4M.$$

Si n_3 est le nombre des faces triangulaires, n_4 celui des faces quadrangulaires, etc., on aura en appelant H le nombre des faces :

$$H = n_3 + n_4 + n_5 + \ldots$$

Le nombre des côtés de tous ces polygones réunis sera

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5, \text{ etc.},$$

comme deux de ces côtés réunis forment une arête, on aura en appelant A le nombre des arêtes :

$$2A = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \ldots$$

Remarquons que le nombre des diagonales que l'on peut mener dans un polyèdre, est égal au nombre des lignes qui joignent tous les sommets deux à deux, diminué du nombre des arêtes et du nombre des diagonales que l'on peut mener dans chacune des faces ; cela posé, cherchons chacun de ces nombres.

Soit S le nombre des sommets ; le nombre total des droites qui joignent les sommets est évidemment $\frac{S(S-1)}{1.2}$.

Nous connaissons le nombre A des arêtes ; il reste à avoir le nombre des diagonales que l'on peut mener dans chaque face.

Or, le nombre des diagonales que l'on peut mener dans un polygone, est égal au nombre des lignes, joignant deux à deux tous les sommets, diminué du nombre des côtés de ce polygone ; donc : pour avoir le nombre de diagonales que l'on pourra mener dans les faces réunies du polyèdre, nous prendrons chacune de ces faces en particulier, et du nombre des lignes joignant tous les sommets deux à deux, nous retrancherons le nombre des côtés, et nous ferons la somme ; nous avons ainsi :

Pour les faces réunies

$$\frac{3.2}{2}n_3 + \frac{4.3}{2}n_4 + \frac{5.4}{2}n_5 \dots - 3n_3 - 4n_4 - 5n_5,$$

ou

$$\frac{3.2}{2}n_3 + \frac{4.3}{2}n_4 + \frac{5.4}{2}n_5 \dots - 2A;$$

donc, on aura

$$N = \frac{S.(S-1)}{2} - A - \left(\frac{3.2}{2}n_3 + \frac{4.3}{2}n_4 + \dots - 2A\right)$$

d'où

$$N = \frac{S.(S-1)}{2} - \left\{\frac{3.2}{2}n_3 + \frac{4.3}{2}n_4 + \dots\right\} + \left\{\frac{3}{2}n_3 + \frac{4}{2}n_4 + \dots\right\},$$

ou

$$N = \frac{S.S-1}{2} - \frac{1}{2}\left\{1.3.n_3 + 2.4u_4 + 3.5n_5 + \ldots\right\}.$$

Multipliant par 8 de part et d'autre :

$$8N = 2S.(2S-2) - 4.M :$$

en prenant la notation indiquée dans l'énoncé ; or, le théorème connu d'Euler donne :

$$S = A - H + 2$$
$$2S = 2A - 2H + 4$$

or

$$2A - 2H = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots = L$$

donc

$$8N = (2A - 2H + 4)(2A - 2H + 2) - 4M$$
$$8N = (L+4)(L+2) - 4M,\ c.\ q.\ f.\ d.$$

DIVISION ABRÉGÉE.

(V. p. 348.)

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége de Strasbourg.

—

Relativement à ma discussion de la division abrégée, j'ai reconnu que le cas particulier où l'on trouve un quotient partiel égal à 10, peut se simplifier considérablement.

Je dis que si on trouve un quotient partiel $= 10$, on peut conclure qu'en prenant 9 pour ce quotient et pour chacun des suivants, on a le quotient total à UNE unité près en moins.

En effet, conservant mes notations antérieures, je nomme c_r le chiffre du quotient partiel qui $= 10$; de deux choses

l'une : ou c_{r-1} est en excès, où il est en défaut, dans chaque cas l'erreur est < 1. Mais si $c_r = 10$, c'est que c_{r-1} augmente d'une unité, et devient excédant. Donc, le quotient 10 est trop grand.

Si $c_{r-1} < 9$, le quotient devient $= < 9$, et on rentre dans le cas principal. Si $c_{r-1} = 9$, il devient $= 10$, et c_{r-2} augmente de 1 etc. ; enfin, si $c_1 = 9$, il devient 10, et S devient

$$= c_1 \times d_1 \times 10^{i-1} = d_1 \times 10^i,$$

quantité $< D_i \times 10^i$ et $< D$. Donc, le reste est $< D$, et le quotient est exact à une unité près ; d'ailleurs il est en excès. Si donc au lieu de

$$c_r = 10,\ c_{r+1} = 0, \ldots c_i = 0,$$

on prend

$$c_r = c_{r+1} = \text{etc.} = c_i = 9,$$

on a le quotient en moins à une unité près.

RECTIFICATION DE LA COURBE

qui coupe les génératrices d'un cône quelconque, sous un angle constant.

PAR M. TURQUAN,
professeur au collége royale de Pontivy.

—

Je placerai l'origine des coordonnées au sommet du cône, et je prendrai les axes rectangulaires.

Alors la distance d'un point quelconque (xyz) de la courbe à l'origine sera $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et les angles que fait avec les trois axes la génératrice qui passe par ce point, auront pour cosinus

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

on sait, au reste, que les angles de la tangente à la courbe avec les axes ont pour cosinus $\frac{dx}{ds}$. $\frac{dy}{ds}$. $\frac{dz}{ds}$.

Donc, si on appelle m le cosinus de l'angle constant que la courbe fait avec chaque génératrice, on aura :

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds}=m, \text{ ou } \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=mds,$$

d'où : $$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=ms+c,$$

c étant une constante arbitraire.

Si x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 sont les coordonnées de deux points de la courbe auxquels correspondent les arcs s_1 et s_2, on aura pour l'arc compris entre ces deux points :

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=m\,(s^2-s^1).$$

Prenons maintenant deux droites, oX et oY, qui fassent entre elles un angle dont le cosinus soit m, prenons sur oX ; $o\mathrm{P}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ et $o\mathrm{Q}=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$, puis, par les points P et Q, menons les perpendiculaires PM et QN, la partie MN de la droite oY sera la longueur de l'arc $s_1 - s_2$.

THÉORÈME DE M. GAUSS

sur les lignes géodésiques, généralisé et géométriquement démontré par M. Jacobi (*Journal astronomique* de Schumacher. 1843, p. 115).

—

Observation. Dans tout ce qui suit, nous supposons que la sphère a l'unité pour rayon.

I. *Lemme*. Soit BACDE (*fig*. 65) un polygone sphérique quelconque, ayant les angles rentrants C, D plus grands que deux droites, et pour fixer les idées, nous supposons que le polygone est un pentagone; soit S l'aire du polygone, on a $S = B + C + D + E + A - 3.180$; désignant par m et n les angles formés respectivement par le prolongement de BC, avec CD, et le prolongement de CD avec DE; il vient $S = B + m + n + A + E - 180$; on aura même résultat, quel que soit le nombre des angles rentrants.

Observation. Si le polygone est concave vers son enveloppe, on aurait $S = A + B + E + 180° - m - n$.

Corollaire I. Lorsque BCDE représente une courbe sphérique présentant toujours sa concavité vers les arcs des grands cercles BA, AE, les angles m et n sont des angles de contingence, et si on désigne par T la somme (quantité finie) de tous les angles de contingence, S désignant l'aire sphérique comprise dans les triangles BAE formé par deux arcs des grands cercles et la ligne sphérique, on aura $S = B + A + E + T - 180°$.

Corollaire 2. Si les arcs des grands cercles sont tangents en B et E, à la ligne sphérique les angles B et E sont nuls, et l'on a $S = A + T - 180$; si la courbe présente sa concavité, on aurait $S = A + 180° - T$.

II. *Lemme*. (*Fig*. 66.) Soit MN une ligne sphérique tournant sa convexité vers la même région; pour tous les points, M, I, I', N menant normalement dans le même sens des quadrants; les extrémités de ces quadrants forment une seconde ligne sphérique mn, *polaire* à la première. Chaque angle de contingence formé par les quadrants infiniment voisins Ii, I'i', est représenté, à un infiniment petit du second ordre près, par l'aire de l'élément II'ii'; donc la somme de tous les angles de contingence T est égale à l'aire sphérique comprise dans le quadrilatère MNnm,

formé par la ligne MN, sa polaire mn, et les quadrants extrêmes Mm, Nn.

Corollaire 1. Prolongeant le quadrant nN jusqu'à ce qu'il rencontre en A le quadrant Mm, l'aire du quadrilatère se décompose en deux triangles NAM et Anm; or, d'après le corollaire 2 du lemme précédent, l'aire de AMN est égale à $T + A - 180$; donc $T = T + A - 180 +$ aire Amn; donc aire $Amn = 180 - A =$ angle mAN.

III. *Théorème*. Étant donnée dans l'espace une courbe quelconque $\mu\nu$, si, par le centre d'une sphère, on mène des rayons parallèles aux rayons de courbure de la courbe, on forme un cône coupant la sphère suivant la ligne mn (*fig*. 66); si par le centre on mène des droites parallèles aux tangentes à la ligne $\mu\nu$, on formera un second cône rencontrant la sphère suivant la ligne MN, polaire par rapport à mn; ensuite, si par le centre on mène deux plans respectivement parallèles aux plans osculateurs en μ et en ν, on aura les deux seconds grands cercles MAm, ANn; alors l'aire du triangle Anm est égale à l'angle A, c'est-à-dire au supplément de l'angle des deux plans osculateurs.

Démonstration. C'est le corollaire du lemme II.

Exemple. Si la ligne dans l'espace est une trajectoire loxodromique tracée sur un cône droit, tous les rayons de courbure sont parallèles à un même plan; par conséquent, la ligne mn devient un grand cercle, et l'aire du triangle Amn étant égale à l'angle A, il s'ensuit que les angles m et n sont supplémentaires, ce qu'on voit aussi à priori.

IV. *Théorème*. (*Fig*. 67.) Étant donné dans l'espace un triangle ABC, formé par trois courbes quelconques, mais assujetties à la condition qu'à chaque sommet les directions des deux rayons de courbures des courbes qui s'y coupent se confondent. Si par le centre d'une sphère, on mène des

parallèles à tous les rayons osculateurs des trois courbes, on formera un triangle sur la sphère, dont l'aire est égale à la différence entre la somme des trois angles du triangle ABC et deux angles droits.

Démonstration. Soit ab, ba, ca, les lignes sphériques correspondant aux lignes AB, BC, CA dans l'espace ; $a\beta$ est l'arc du grand cercle, trace sphérique du plan mené par le centre parallèlement au plan osculateur en A, à la courbe AC, et $a\gamma$, l'arc du grand cercle correspondant au plan osculateur en A, à la courbe AB ; de sorte que $a\gamma$, $b\gamma$ sont les grands cercles relatifs aux plans osculateurs extrêmes de la ligne AB, et ainsi des autres ; et soient e, f, g les intersections des grands cercles dans l'intérieur du triangle abc, on a l'identité géométrique suivante entre les aires :

$$ab\gamma + bc\alpha + ca\beta - abc = ag\gamma + be\alpha + cf\beta - efg.$$

En vertu du corollaire du lemme II, on a $ab\gamma =$ angle γ, et $ag\gamma$ étant un triangle sphérique ordinaire, on a :

$$ag\gamma = a + g + \gamma - 180$$
$$efg = e + g + f - 180.$$

Substituant, dans cette identité, aux aires leurs valeurs angulaires, il vient, toutes réductions faites :

$$abc = 2.180 - \text{ang.}\, \alpha b\gamma - \text{ang.}\, \beta c\alpha - \text{ang.}\, \gamma x\beta$$
$$= (180° - \text{ang.}\, \alpha b\gamma) + (180° - \beta c\alpha) + (180° - \gamma a\beta) - 180° \quad (1),$$

ou $180° - \alpha b\gamma$ est l'angle formé par les deux plans osculateurs en A aux courbes AB et AC, et comme les rayons de courbure ont même direction, il s'ensuit que cet angle est aussi celui des tangentes en ce point aux deux courbes, ou a l'angle des deux courbes ; donc l'équation (1) renferme l'énoncé du théorème.

Corollaire. Lorsque les trois courbes données dans l'espace

sont les lignes les plus courtes sur une surface, elles remplissent la condition d'avoir aux points d'intersection des rayons de courbure coïncidents. On obtient alors le célèbre théorème démontré la première fois par M. Gauss, dans ses *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, etc., théorème qu'on peut énoncer ainsi : Si sur une surface quelconque on forme un triangle avec trois lignes de plus courte distance (lignes géodésiques), et qu'on mène par le centre d'une sphère des parallèles à toutes les normales à la surface, correspondant aux points du triangle, on formera sur la sphère un contour fermé dont l'aire est à celle de la sphère comme la différence de la somme des trois angles du triangle géodésique à deux angles droits, est à huit angles droits. différence qui est en excès si la surface est concave vers une région, et en défaut, si ce cas n'a pas lieu. L'illustre directeur de l'Observatoire de Gœttingue a démontré ce théorème à l'aide du calcul intégral, et M Jacobi en a généralisé l'énoncé en l'appliquant à des courbes quelconques et par la voie géométrique ; il a même donné la plus grande extension possible, en prenant des courbes quelconques, assujetties à aucune condition, par le théorème suivant :

IV. *Théorème* 3. Soit dans l'espace un triangle ABC formé par les trois courbes BC, CA, AB ; du centre d'une sphère, le rayon = 1, on mène des parallèles aux rayons de courbure des trois courbes ; on obtient sur la sphère trois autres courbes bc', ca'. ab', (c et c' ne se confondent plus) ; aux deux extrémités de chacune de ces courbes on mène des grands cercles $b\beta$, $c'\gamma$, $c\gamma$, $a'\alpha$, $a\alpha$, $b'\beta$, dont les plans sont parallèles aux plans osculateurs menés en B et C, C et A, A et B aux courbes BC, CA, AB ; par exemple : $b\beta$ est parallèle au plan osculateur B au côté BC et C ; alors l'aire de l'ennéagone sphérique $ab'\beta bc'\gamma ea'\alpha a$, dont trois côtés bc', ca. ab' sont, généralement parlant, des courbes à double cour-

bure, et dont les six autres côtés, $a\alpha$, $a'\alpha$, $b\beta$, $b'\beta$, $c\gamma$, $c'\gamma$, sont des arcs de grand cercle, est égale à l'excès sur deux angles droits de la somme des angles que les plans osculateurs forment ensemble aux sommets du triangle AB', ou égal à angle $a\alpha a'$ + angle $b\beta b'$ + angle $c\gamma c'$ — 180°.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème Ier.

Corollaire. Si les trois courbes énoncées sont planes (sans être dans un même plan), alors les courbes bc', ca', ab' deviennent aussi des grands cercles, et les trois arcs βb, bc', $c\gamma$ appartiennent au même grand cercle, et il en est ainsi des arcs γc, ca', $a'\alpha$; αa, ab', $b'\beta$, et l'ennéagone se réduisant au triangle sphérique ordinaire $\alpha\beta\gamma$, on parvient à l'expression connue de l'aire du triangle sphérique.

V. *Théorème* 4. Une courbe continue quelconque, mais fermée, étant donnée dans l'espace, si par le centre d'une sphère on mène des rayons parallèles aux rayons de courbure, les extrémités de ces parallèles forment toujours une courbe, qui partage la surface de la sphère en deux parties équivalentes.

Démonstration. Ce beau théorème est aussi une conséquence immédiate du théorème Ier.

Observation. Le mémoire de M. Jacobi est daté de Kœnigsberg, 16 octobre 1842.

LIEU GÉOMÉTRIQUE

d'un point dont les trois polaires, par rapport à trois coniques, dans un même plan passent par le même point.

—

Cas particulier.

1. Soient deux coniques M et M' semblables et semblable-

ment situées ; prenons le centre d'homologie pour origine, et deux axes conjugués pour les deux coniques ; et soient encore une troisième conique, où ces mêmes axes sont conjugués, nous aurons :

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

équation de la conique M ;

$$Ay^2 + Cx^2 + nDy + nEx + n^2F = 0,$$

équation de la conique M′;

$$A'y^2 + C'x^2 + D'y + Ex + F' = 0.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point situé dans le plan des coniques ;

Les équations des polaires de ce point respectivement par rapport aux coniques M, M′, M″ sont :

$$y\,[2Ay' + D] + x\,[2Cx' + E] = -Dy' - Ex' - 2F \quad (1)$$

$$y\,(2Ay' + nD) + x\,[2Cx' + nE = -n\,[Dy' + Ex' + 2nF] \quad (2)$$

$$y\,[2A'y' + D'] + x\,[2Cx' + E'] = -D'y' - E'x' - 2F' \quad (3)$$

On déduit des équations (1) et (2) :

$$y = \frac{Cx'\,(Dy' + Ex' + 2F) + FE\,(n+1)}{AEy' - CDx'},$$

$$x = -\frac{Ay'\,(Dy' + Ex' + 2F) + DF\,(n+1)}{AEy' - CDx'}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3) il vient :

$$[Dy' + Ex' + 2F]\,[Cx'(2A'y' + D') - Ay'[2C'x' + E']$$
$$+ F\,(n+1)\,[2A'Ey' + D'E' - 2C'D'x' - DE'] +$$
$$+ (D'y' + E'x' + 2F')\,(AEy' - CDx'] = 0\,;$$

réunissant les termes du troisième degré, il vient :

$$2\,(A'C - AC')x'y'\,(Dy' + Ex').$$

Donc, si l'on a $A'C = AC'$, le lieu géométrique n'est plus que du second degré.

Corollaire. Si les trois coniques sont des cercles ; alors

$$A = A' = C = C' = 1 ;$$

et le lieu géométrique devient :

$$y^2 [D'E - E'D] + x^2 [D'E - E'D] + 2y [nFE' + F'E]$$
$$2x [nFD' + F'D]$$
$$-(n+1) DE'F = 0 ;$$

équation d'un cercle.

Observation. Dans le cas général, les coniques étant quelconques, le lieu géométrique est une ligne du troisième degré ; nous la donnerons ailleurs. (*V*. Durrande. *Annales de Gergonne*, t. XVI, p. 112-117.) Tm.

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS

d'un système de lentilles.

D'après M. Möbius, professeur à Leipzig. (Crelle, t. V, p. 113 ; 1830.)

—

I. Lemme. Soit la fraction continue :

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \cfrac{1}{d \text{, etc.} - \cfrac{1}{k}}}}} = F.$$

Faisant $[a, b] = ab - 1$; $[a, b, c] = [a, b] c - a$;
$$[a, b, c, d] = [a, b, c] d - [a, b] ;$$
$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d] e - [a, b, c],$$

et ainsi de suite, on a :

$$F = \frac{[b, c, d \ldots k]}{[a, b, c, d \ldots k]} ;$$

et l'on a les identités :

$$[a, b, c \dots i][b, c, d \dots k] - [a, b, c \dots k][b, c, d \dots i] = 1,$$
$$[a, b, c \dots i, k] = [k, i \dots b, a].$$

Ces formules sont démontrées dans les Eléments.

II. Lemme. Soit a la distance de l'objet au centre de la lentille, et b la distance de l'image au même point; l'objet et l'image étant dans l'axe; si f est la distance focale principale de la lentille; on a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$. (*Voir* les traités d'optique.)

A. *Système de lentilles, l'objet étant dans l'axe du système.*

Notations.

III. Soient P_1, P_2, ... P_{n-1}, P_n les centres des lentilles, tous sur une même droite :

A l'objet devant la première lentille P_1, A_1 l'image entre P_1 et P_2; A_2 l'image entre P_2 et P_3 ....; A_n devant le dernier verre P_n; faisant :

$$AP_1 = a_1;\ A_1P_2 = a_2;\ A_2P_3 = a_3;\ \dots\ A_{n-1}P_n = a_n;$$
$$P_1A_1 = b_1;\ P_2A_2 = b_2 \dots P_nA_n = b_n.$$

h_1, h_2 ... h_{n-1} étant les distances respectives des lentilles P_1, P_2; P_2, P_3 .... $P_{n-1}P_n$, on aura :

$$b_1 + a_2 = h_1;\ b_2 + a_3 = h_2 \dots b_{n-1} + a_n = b_{n-1}.$$

Si nous désignons par g_1, g_2, g_3 .... g_n les valeurs *réciproques* des distances focales des lentilles, on aura (Lemme II) :

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=g;\ \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=g_2 \dots \frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=g_n.$$

Observation. Les signes de g_1, g_2 .... sont déterminés par la forme concave ou convexe des lentilles.

De même pour b_1, b_2 .... etc.; mais h_1, h_2 .... sont toujours à prendre avec le signe +

Lieu de la dernière image.

IV. On déduit facilement de ces deux systèmes d'équation :

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]}; \quad b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]} \cdots$$

et enfin

$$b_n = \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \ldots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1} \ldots h_1, g_1, a_1]} =$$

$$= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \ldots h_1, g_1] a_1 - [h_{n-1}, g_{n-1} \ldots h_1]}{[g_n, h_{n-1} \ldots h_1, g_1] a_1 - [g_n, h_{n-1} \ldots h_1]} =$$

$$= \frac{[g_1, h_1, g_2 \ldots h_{n-1}] a_1 - [h_1, g_2 \ldots h_{n-1}]}{[g_1, h_1 \ldots g_n] a_1 - [h_1, g_2 \ldots g_n]}.$$

Faisons $[g_1, h_1 \ldots h_{i-1}] = H_i$; $[h_1, g_2 \ldots h_{i-1}] = -L_i$,
$[g_1, h_1 \ldots g_{i-1}] = M_i$; $[h_1, g_2 \ldots g_{i-1}] = -N_i$;
on aura :

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}}.$$

Cette expression a été donnée sous cette forme par Lagrange (M. de Berlin, 1778 et 1803) :

$$\text{pour } a_1 = \infty, \text{ on a } b_n = \frac{H_n}{M_{n+1}};$$

$$\text{et pour } b_n = \infty, \ a_1 = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}.$$

Calcul de H, M, L, N.

Première méthode.

V. Les calculs de ces quantités, qui ne dépendent que de la construction de la lunette, s'abrégent au moyen de ces relations faciles à trouver :

$$H_{i+1} = h_i M_{i+1} - H_i,$$
$$L_{i+1} = h_i N_{i+1} - L_i,$$
$$M_{i+1} = g_i H_i - M_i,$$
$$N_{i+1} = g_i L_i - N_i.$$

Connaissant les résultats pour n lentilles, on en déduit ceux pour $n+1$ lentilles.

Deuxième méthode.

$$H_{i+1} = [h_i, g_i, h_{i-1} \dots g_2, h_1, g_1]$$
$$= \frac{[h_i, g_i, h_{i-1} \dots g_1]}{[g_i \dots g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1} \dots g_1]}{[h_{i-1} \dots g_1]} \dots \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1 g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1$$
$$= (h_i \dots g_1)(g_i \dots g_1) \dots (g_2, h_1, g_1) \cdot (h_1, g_1) \cdot g_1.$$

Les quantités renfermées entre les parenthèses ( ) représentent les valeurs de fractions continues ; ainsi :

$$(h_1 g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1} ; \ (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)}, \text{ etc.}$$

Faisant donc :

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \alpha ; \ g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta ; \ h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma ; \ g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta ,$$

on aura :

$$H_2 = \alpha g_1 ; \ H_3 = \gamma\beta\alpha g_1 ; \text{ et } M_2 = g_1 ; \ M_3 = \beta\alpha g_1 \dots \text{ etc.}$$

Et faisant de même :

$$g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu ; \ h_2 - \frac{1}{\mu} = \nu ; \ g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi \dots$$

on aura :

$$-N_3 = \mu h_1 ; \ -N_4 = \pi\nu\mu h_1 \dots ; -L_2 = h_1 ; \ -L_3 = \nu\mu h ;$$
$$-L_4 = \varphi\pi\nu\mu h.$$

Cette méthode est de M. Gabrio Piola (Éphémérides de Milan, 1822).

B. *L'objet n'étant pas dans l'axe du système.*

Notations.

VI. Soit C le lieu de l'objet ; C_1 le lieu de la première image entre P_1 et P_2 ; C_2 le lieu de l'image entre P_2 et P_3 .... ; et C_n le lieu de la dernière image devant P_n : et on sait, par les principes de dioptrique, que C, P_1 et C_1 sont sur une

même droite, ainsi que C_1, P_2, C_2, etc., de sorte que tous ces points sont dans un même plan passant par l'axe. Prenons sur l'axe une distance $PA = PC$; ou, ce qui dans le cas actuel revient au même, abaissons la perpendiculaire CA sur l'axe; de même les perpendiculaires C_1A_1 ; C_2A_2 ; C_nA_n ; $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ représentent les mêmes points que ci-dessus, et nous conservons les mêmes notations. Faisons de plus :

$$AC = c;\ A_1C_1 = c_1;\ A_2C_2 = c_2 \ldots A_nC_n = c_n;$$

on a évidemment :

$$\frac{c}{c_1} = -\frac{a_1}{b_1};\ \frac{c_1}{c_2} = -\frac{a_2}{b_2} \ldots$$

d'où

$$\frac{c}{c_n} = (-1)\frac{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}{b_1 \cdot b_2 \ldots b_n}.$$

Or

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}},$$

d'où

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{H_{i+1} a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}};$$

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i};$$

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_1 + N_i}{M_{i-1} a_1 + N_{i-1}};$$

d'où

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} \ldots \frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_1 a_1 + N_1} = M_{i+1} a_1 + N_{i+1};$$

car

$$M_1 = 0;\quad N_1 = 1;$$

et

$$c_n = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

C. *Propriétés analogues d'une lentille et d'un système de lentilles.*

Une lentille.

VI. Soit A l'objet placé devant la lentille P, et B son

image ; F le foyer principal de la lentille P du côté de l'objet A, et G le foyer principal du côté de l'image ; de sorte que $PF = PG = f$.

Faisons $AP = a$; $BP = b$; on aura :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}; \quad AF = a - f = \alpha; \quad GB = b - f = \beta.$$

d'où :

$$\alpha\beta = f^2; \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{f} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}};$$

$\frac{a}{b}$ est égal au diamètre de l'objet divisé par le diamètre de l'image. Appelant F le premier foyer principal et G le second foyer, nous avons ce théorème :

« La distance focale d'une lentille est moyenne proportionnelle entre la distance de l'objet au premier foyer et la distance de l'image au second foyer. Le diamètre de l'objet est à celui de l'image comme les racines carrées de ces distances. Les foyers principaux sont compris entre l'objet et l'image (lentille bi-convexe), ou l'inverse a lieu (lentille bi-concave).

Un système de lentilles.

VII. Reprenons les notations du paragraphe III.

Faisons $A_1 = p + \alpha$; $b_n = q + \beta$; p, q, α, β sont quatre indéterminées.

On a trouvé :

$$M_{n+1} a_1 b_n - H_n a_1 + N_{n+1} b_n = L_n \text{ (IV)}.$$

Remplaçant a_1 et b_n par leurs valeurs, il vient :

$$M_{n+1}\alpha\beta + (M_{n+1}q - H_n)\alpha + (M_{n+1}p + N_{n+1})\beta =$$
$$= L_n - M_{n+1}pq + H_n p - N_{n+1}q.$$

Faisons $\quad M_{n+1}q - H_n = 0$; $M_{n+1}p + N_{n+1} = 0$;

l'équation se réduit à :

$$M_{n+1}\alpha\beta = L_n + H_n p ;$$

et éliminant p :

$$M^2_{n+1}\alpha\beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1.$$

D'après les propriétés des fractions continues (1), faisant $\frac{1}{M_{n+1}} = f$, on a donc, comme pour une lentille, $\alpha\beta = f^2$.

Déterminant donc sur l'axe deux points F et G, de sorte qu'on ait :

$$P_1F = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} \quad \text{et} \quad P_nG = q = \frac{H_n}{M_{n+1}}.$$

F est le *premier foyer principal* du système, et G le second foyer principal (*voir* IV). On a encore AF. $GA_n = f^2$, et on déduit pour ce système le même théorème que pour une seule lentille.

Le rapport du diamètre de l'objet à celui de l'image =

$$= \frac{(-1)^n c}{c^n} = M_{n+1}a_1 + N_{n+1} = M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1} =$$

$$= M_{n+1}\alpha = \frac{\alpha}{f} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{AF}{GA_n}},$$ comme dessus.

D. *Télescopes dioptriques.*

VII. On appelle de ce nom un système de lunettes où les rayons incidents sur la première lentille, ainsi que les rayons émergents, sont parallèles ; alors $f = 0$; donc $g_n = 0$; et $M_{n+1} = 0$; l'on a donc :

$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{N_{n+1}}$; à $a_1 = \infty$ répond $b_n = \infty$, ainsi que cela doit être.

On a $N_{n+1}c_n = (-1)^n c$; donc, quelle que soit la distance de l'objet, la grandeur de l'image ne varie pas.

On trouve dans les traités de physique les conséquences *dioptriques* de ces diverses formules, qui semblent plus simples que celles que l'on lit au tome II du Traité d'Astronomie physique, édit. de 1844.

ANNONCES.

—

Cours de Géométrie théorique et pratique, par Lenthéric (Neveu), professeur de Mathématiques à l'École du génie de Montpellier ; in-8° de 275 pages, IX plan. lithog. ; Montpellier, 1844.

Ce cours destiné aux commençants et aux candidats au baccalauréat, remplit son but. Chaque théorème est suivi d'une pratique qui en facilite l'intelligence, et en fait ressortir l'utilité ; la méthode est celle des infiniment petits ; dans une note suffisamment étendue, on donne une idée de la méthode des limites, et de celle de la réduction à l'absurde. Il serait à désirer que les principales propriétés des coniques fissent désormais partie de la géométrie élémentaire ; ces propriétés sont indispensables pour apprendre les éléments de la physique, de la cosmographie, de l'astronomie, etc. ; connaissances exigibles des bacheliers. L'auteur écrit *hypotHénuse*, c'est contraire à l'étymologie. Un dièdre pour un angle dièdre n'est pas non plus une locution usitée.

1. Eléments de Géométrie, par A. M. Legendre, nouvelle édition, avec additions et modifications, par M. A. Blanchet, ancien élève de l'École polytechnique, directeur des Études mathématiques de Sainte-Barbe, in-8°. 1845 ; à la librairie de F. Didot frères, rue Jacob, 1.

On rendra compte de cet ouvrage dans le prochain numéro.

TABLE ALPHABÉTIQUE.

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces tables à l'extrême obligeance de M. le professeur Anne (Léon).

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

VII. Géométrie analytique à trois dimensions.

VIII. Statique et mécanique.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Algèbre élémentaire.

QUESTIONS D'EXAMEN.

I. Géométrie analytique à deux dimensions.

III. Statique et mécanique.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE ET THÉORÈMES A DÉMONTRER.

ANNONCES ET ANALYSES.

ERRATA.

TOME I. (*Troisième supplément.*)

Page 392, ligne 3, en descendant, SM′M″M‴, *lisez :* OM′M″M‴.
Page 502, ligne 11, en descendant, constants, *lisez :* restants.

TOME II. (*Second supplément.*)

Page 28, ligne 12, en remontant, L^2, *lisez :* L.
Page 257, ligne 7, en descendant, A_{p+1}, *lisez :* A_{p+2}.
Page 426, ligne 6, en descendant, $\sin^2\varphi$, *lisez :* $\sin^2\varphi'$.

Page 427, ligne 10, en descendant, cos φ', *lisez :* sin φ'.
Page 429, ligne 3, en remontant, B, *lisez :* β.
Page 533, ligne 12, en remontant, Amyot, *lisez :* Amiot.
Page 549, ligne 3, en descendant, il nous permettra d'obteni *lisez :* nous obtenons.
Page 549, ligne 5, en descendant, le plus grand possible, *lisez* des axes quelconques.
Page 549, ligne 10, en descendant, (x', y', z'), *lisez :* (x', y').
Page 549, ligne 8, en remontant, $\frac{bc}{2}$ *lisez :* $\frac{hc}{2}$.
Page 550, ligne 6, en descendant, ces, *lisez :* les.
Page 550, ligne 12, en remontant, H, *lisez :* M.
Page 556, ligne dernière, une racine réelle, *lisez :* *m* racines réelles.

TOME III. (*Supplément.*)

Page 188, ligne 4, en descendant, *m*, *lisez :* ma^7b^7.
Page 188, ligne 6, en descendant, *c*, *lisez :* *e*.
Page 596, ligne 2, en descendant, IO, *lisez :* TO.
Page 610, ligne 9, en descendant, lien, *lisez :* lieu.

TOME IV.

Page 76, ligne 6, en remontant, fournir, *lisez :* former.
Page 79, ligne 5, en descendant, $\delta\delta'$, *lisez :* dans $\delta\delta'$.
Page 79, ligne 5, en descendant, (β), *lisez :* (δ').
Page 79, ligne 7, en descendant, de 2, *lisez :* des.
Page 79, ligne 6, en remontant, *am*, *lisez :* *a*.
Page 184, ligne 4, en descendant, $m-2$, *ajoutez :* points.
Page 185, ligne 15, en descendant, algébriques, *lisez :* symétriques.
Page 265, ligne 2, en descendant, $2fdu^1$, *lisez :* $2fdu$.
Page 265, ligne 8, en remontant, *m*, *lisez :* $-m$.
Page 265, ligne 4, en remontant, *remplacez l'équation par celle-ci :*

$$u^2t^2(pu+qt-pq)^2=c(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq).$$

Page 300, ligne 3, en remontant, *dn*, *lisez :* *du*.
Page 357, ligne 8, en descendant, F, F, *lisez :* F, F'.
Page 368, ligne 13, en descendant, $+A$, *lisez* . $-A$.
Page 382, ligne 6, en remontant, $a^2\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$, *lisez :*

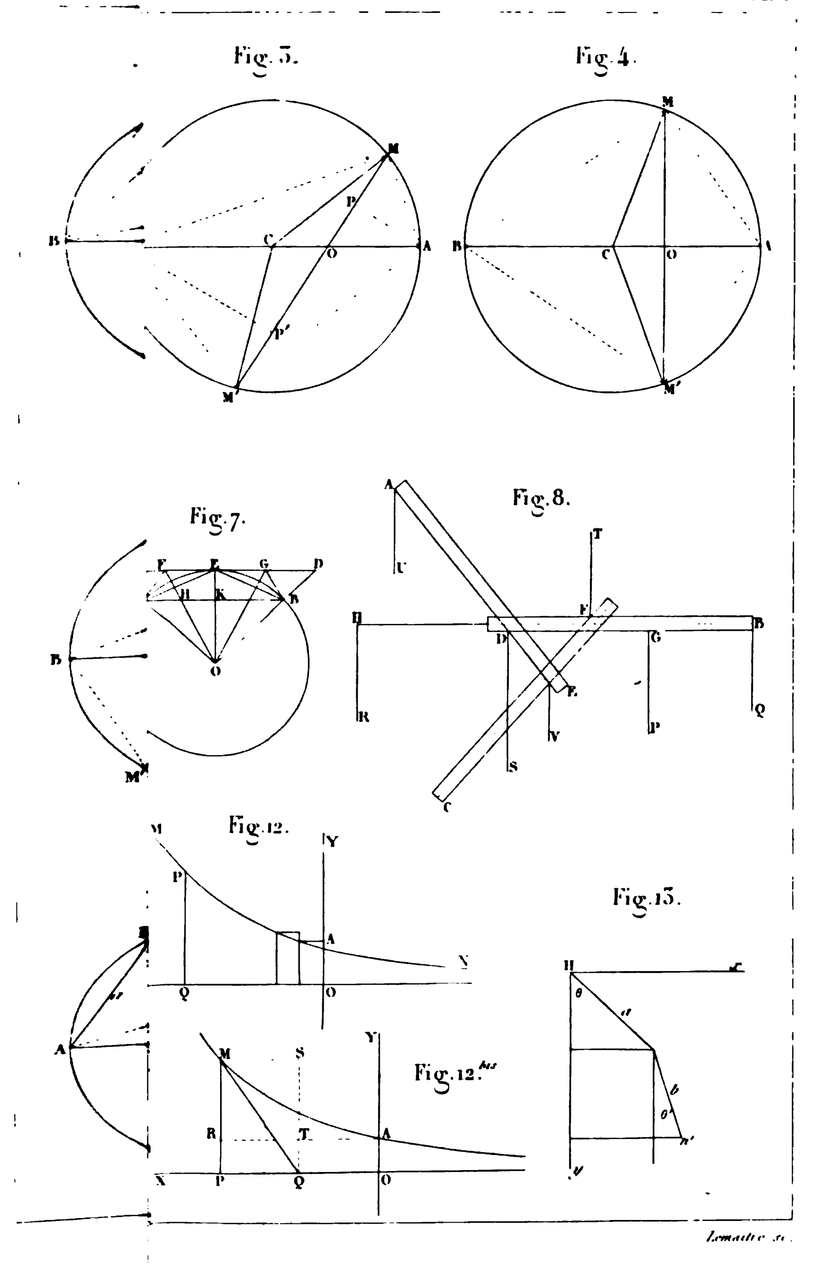
$$a\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}.$$

Page 382, ligne 7, en remontant, $a\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$, *lisez :*

$$a^2\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}.$$

Page 490, ligne 7, en remontant, $2t-p\sin\gamma$, *lisez :* $(2t-p)\sin\gamma$.
Page 588, ligne 4, en descendant, angles, *lisez :* triangles.
Page 588, ligne 9, en remontant, faisceau, *lisez :* fuseau.
Page 588, ligne 3, en remontant, ABC, *lisez :* A+B+C.
Page 589, ligne 2, en descendant, faisceau, *lisez :* fuseau.
Page 589, ligne 7, en remontant, sommet, *lisez :* lieu du sommet.
Page 593, ligne 5, en descendant, *c*, *lisez :* *p*.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.



Lemaître sc.

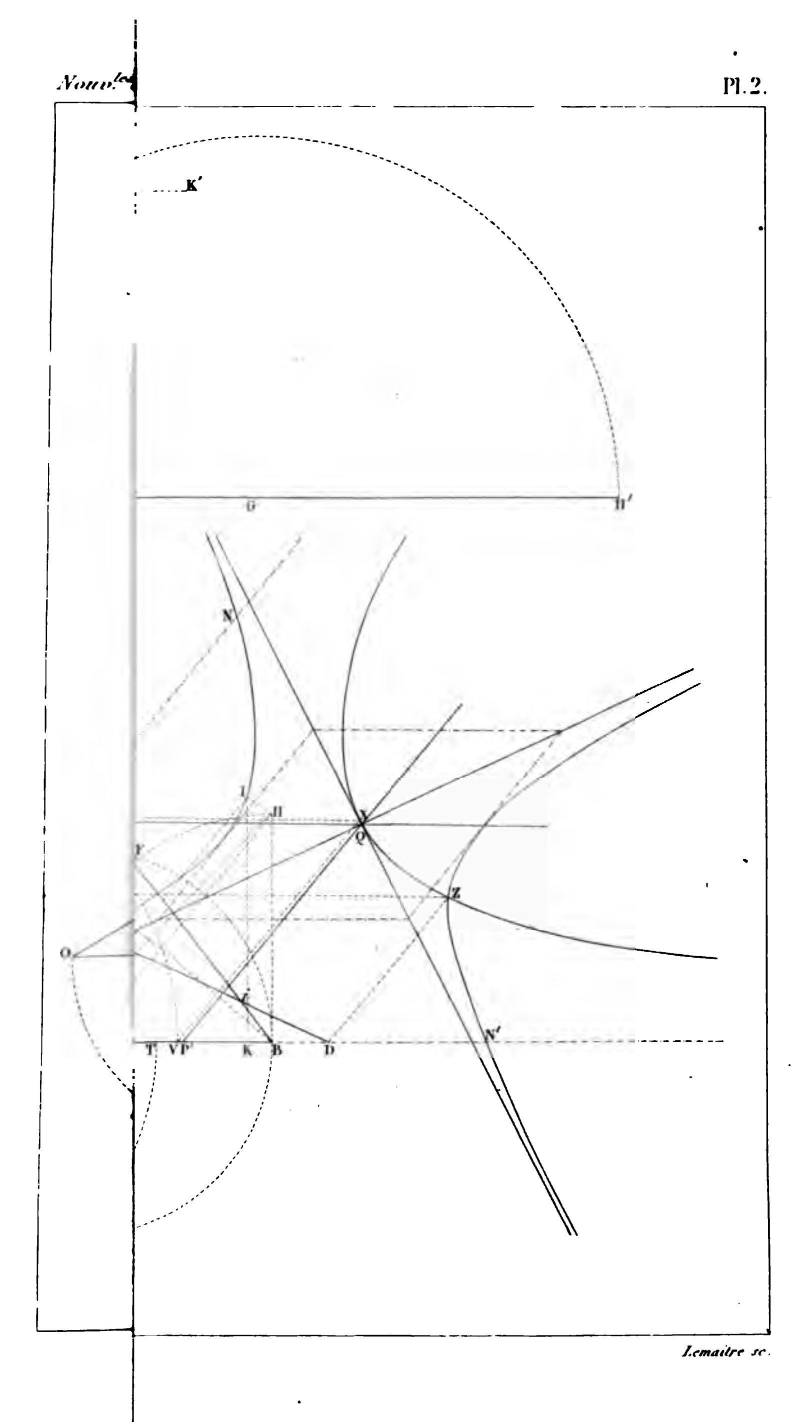

K'
G
H'
N
I
H
Y
Q
Z
O
T
V
P'
K
B
D
N'

Fig. 18.

Y N N' B a b θ O α

Fig. 21.

Fig. 24.

A B E F C D

Fig. 25.

C A F' N B X

Fig. 28.

Y Q=o Q P=c Q P=o D H F C m_2 M m_1 A F. m B P=o P=c Q Q=o O X

Lemaître sc.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 38.

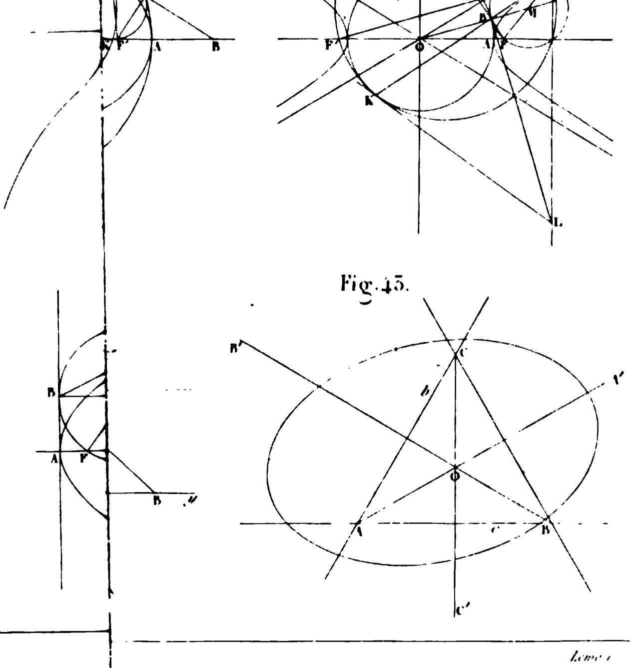
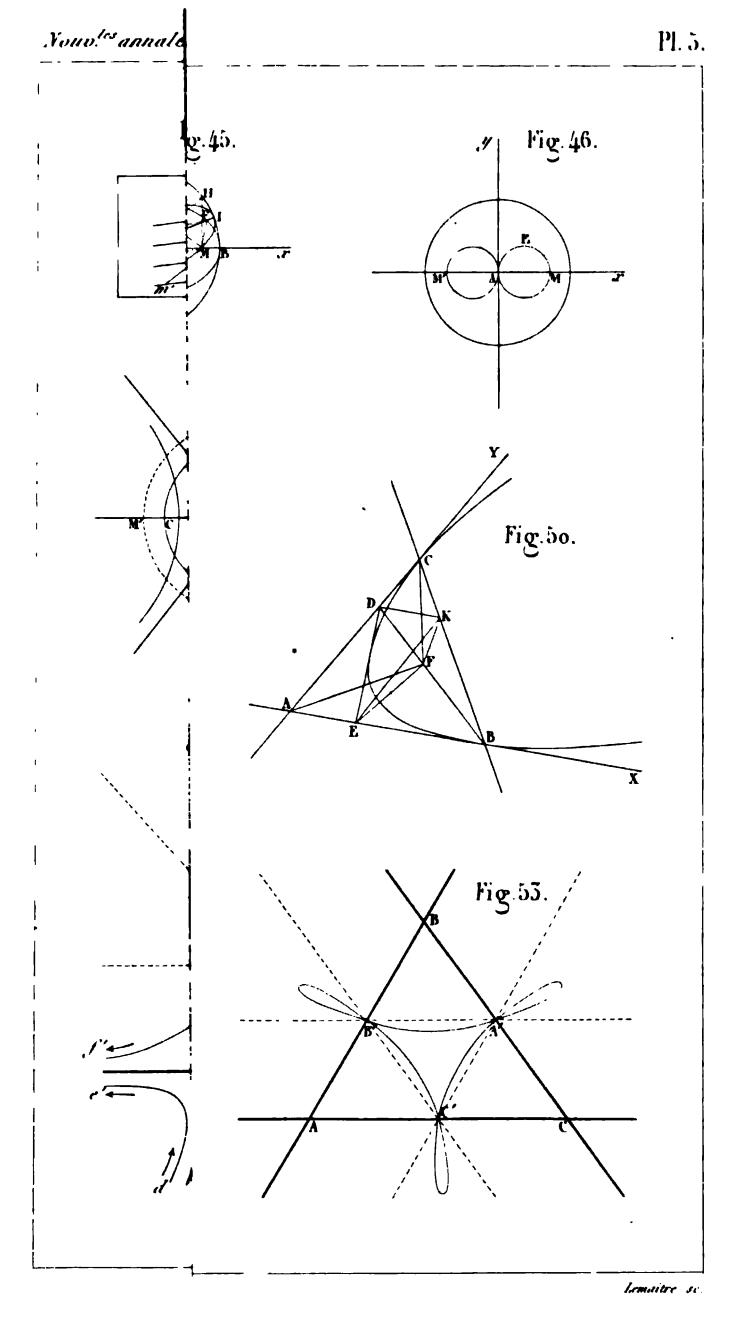
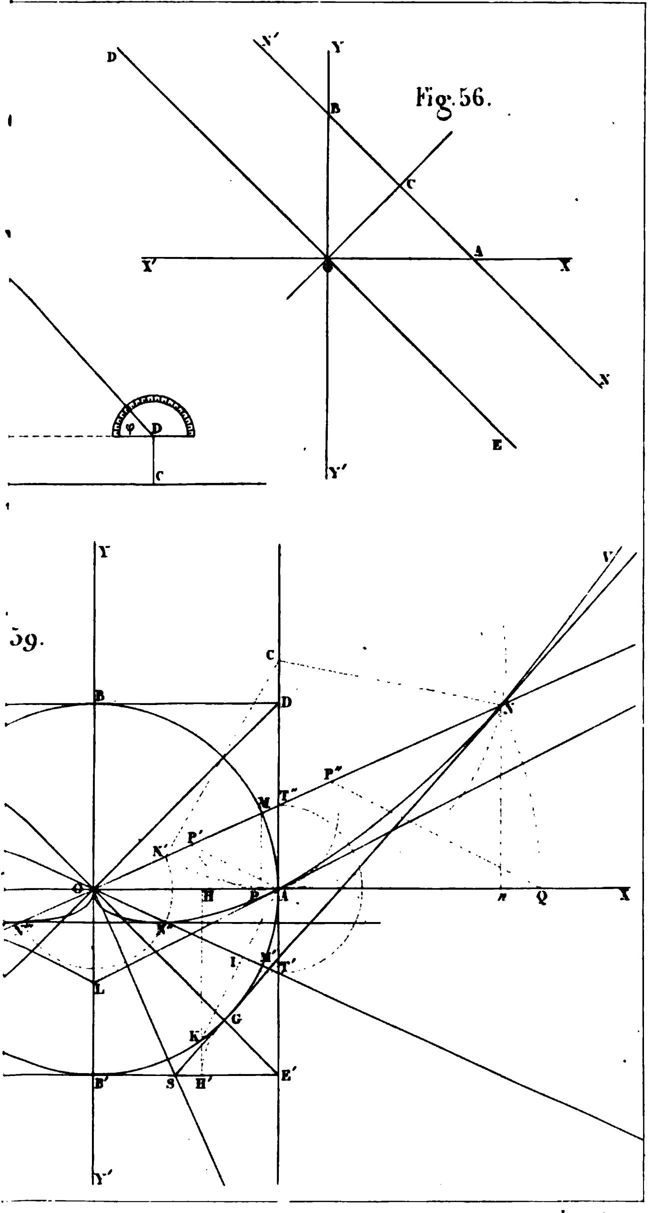


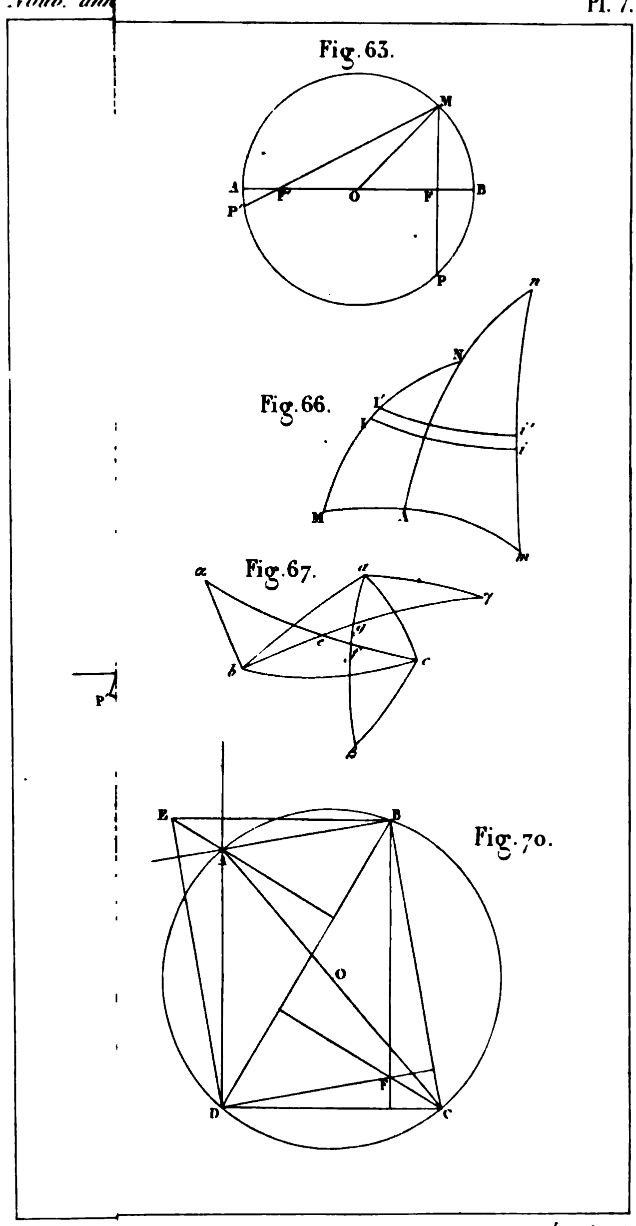
Fig. 43.


[Fi]g. 45.
H
I
M
B
x
m'
Fig. 46.
y
E
M'
A
M
x
M'
C
Y
Fig. 50.
C
D
K
F
A
E
B
X
Fig. 53.
B
B'
A'
C'
A
C
f'
e'
d'

Lemaitre sc.


Fig. 56.
N'
Y
D
B
C
A
X'
X
N
E
Y'
φ
D
C
59.
Y
C
B
D
P''
M
T''
P'
N'
O
H
P
A
n
Q
X
N''
M'
I
T'
L
G
K
B'
S
H'
E'
Y'
V

Lemaître sc


Fig. 63.
M
A
P'
O
F
B
P'
P
Fig. 66.
n
N
I'
I
i'
i
M
A
m
Fig. 67.
α
a
γ
g
e
f
b
c
δ
E
B
Fig. 70.
A
O
F
D
C

Lemaître sc.

